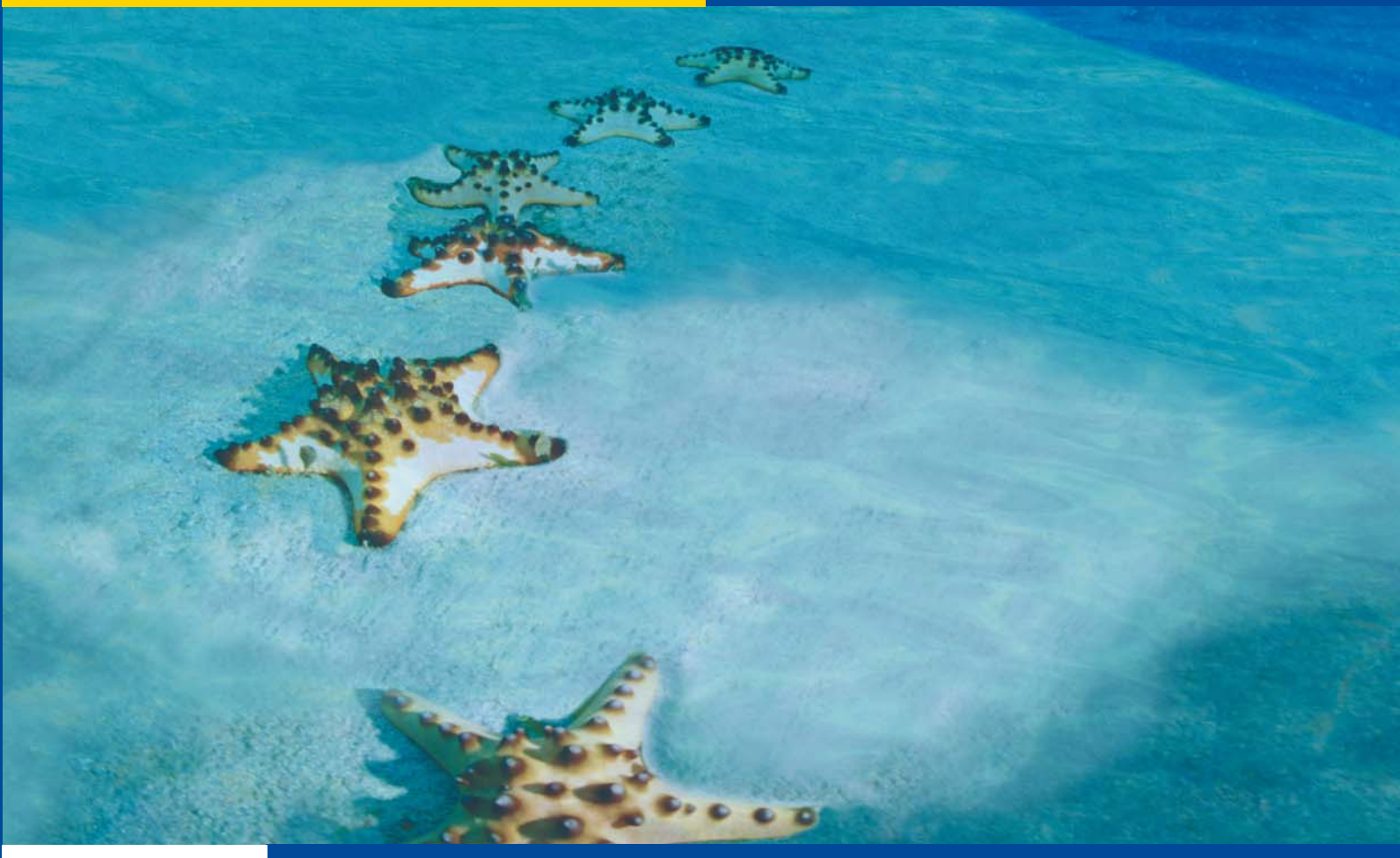
CENGAGE Learning

Matemáticas básicas

Tercera edición



Alan S. Tussy
R. David Gustafson

Incluye CD

Matemáticas básicas

TERCERA EDICIÓN

Matemáticas básicas

Alan S. Tussy
Citrus College

R. David Gustafson
Rock Valley College

Traducción
Antonio González Guzmán, UNAM
Eduardo Ramírez Grycuk, UAM

Revisión técnica
Nercy Pared, Universidad Interamericana, Puerto Rico
Norma Rivera, Universidad Metropolitana, Puerto Rico
Francisco Medina, Universidad Metropolitana, Puerto Rico
Juan Carlos Del Valle Sotelo, ITESM CEM

CENGAGE Learning™

Australia · Brasil · Corea · España · Estados Unidos · Japón · México · Reino Unido · Singapur

Matemáticas básicas
Tercera edición
Alan S. Tussy y David R. Gustafson

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Pedro Turbay Garrido

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora editorial:
María Rosas López

Editor de desarrollo y producción:
Felipe de J. Castro Pérez

Composición tipográfica:
Editec, S.A. de C.V.

© D.R. 2007 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro Basic *Mathematics for College Students*, 3rd ed.
Tussy, Alan S. and David R. Gustafson.
Publicado en inglés por Brooks/Cole,
Cengage Learning ©2006
ISBN: 0-495-01678-0

Datos para catalogación bibliográfica:
Tussy, Alan S. y David R. Gustafson.
Matemáticas básicas. Tercera edición.
ISBN-13: 978-970-686-464-4
ISBN-10: 607-481-464-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 10 09 08 07

CONTENIDO

1 Números cardinales 1

1.1 Introducción a los números cardinales 4
1.2 Suma de números cardinales 13
1.3 Resta de números cardinales 22
1.4 Multiplicación de números cardinales 28
1.5 División de números cardinales 39
Estimación 47
1.6 Factores primos y exponentes 49
1.7 Orden de las operaciones 57
Concepto clave: orden de las operaciones 66
Énfasis en el trabajo en equipo 67
Repaso del capítulo 68
Examen del capítulo 73

2 Los enteros 75

2.1 Introducción a los números enteros 78
2.2 Suma de enteros 89
2.3 Resta de enteros 98
2.4 Multiplicación de enteros 105
2.5 División de enteros 114
2.6 Orden de las operaciones y estimación 119
Concepto clave: números con signo 126
Énfasis en el trabajo en equipo 127
Repaso del capítulo 128
Examen del capítulo 133
Ejercicios acumulativos de repaso 135

3 Fracciones y números mixtos 137

3.1 Fracciones 140
3.2 Multiplicación de fracciones 148
3.3 División de fracciones 156
3.4 Suma y resta de fracciones 163
El MCM y el MFC 173
3.5 Multiplicación y división de números mixtos 175
3.6 Suma y resta de números mixtos 183
3.7 Orden de las operaciones y fracciones complejas 192
Concepto clave: propiedad fundamental de las fracciones 201
Énfasis en el trabajo en equipo 202
Repaso del capítulo 203
Examen del capítulo 209
Ejercicios acumulativos de repaso 211

4 Decimales 213

4.1 Una introducción a los decimales 216
4.2 Suma y resta de decimales 225
4.3 Multiplicación de decimales 232
4.4 División de decimales 241
Estimación 249
4.5 Fracciones y decimales 251
4.6 Raíces cuadradas 260
Concepto clave: los números reales 266
Énfasis en el trabajo en equipo 267
Repaso del capítulo 268
Examen del capítulo 273
Ejercicios acumulativos de repaso 275

5 Porcentaje 277

5.1 Porcentajes, decimales y fracciones 280
5.2 Resolución de problemas con porcentajes 289
5.3 Aplicaciones de los porcentajes 298
Estimación 307

5.4 Interés 310
Concepto clave: porcentaje 317
Énfasis en el trabajo en equipo 318
Repaso del capítulo 319
Examen del capítulo 323
Ejercicios acumulativos de repaso 325

6 Razón, proporción y medida 327

6.1 Razones 330
6.2 Proporciones 338
6.3 Unidades norteamericanas de medida 348
6.4 Unidades métricas de medida 357
6.5 Conversión entre unidades norteamericanas y unidades métricas 368
Concepto clave: proporciones 376
Énfasis en el trabajo en equipo 377
Repaso del capítulo 378
Examen del capítulo 383
Ejercicios acumulativos de repaso 385

7 Estadística descriptiva 387

7.1 Lectura de gráficas y tablas 390
7.2 Media, mediana y moda 401
Concepto clave: media, mediana y moda 409
Énfasis en el trabajo en equipo 410
Repaso del capítulo 411
Examen del capítulo 415
Ejercicios acumulativos de repaso 417

8 Introducción al álgebra 419

8.1 Resolución de ecuaciones por suma y resta 422
8.2 Resolución de ecuaciones por división y multiplicación 431
8.3 Expresiones algebraicas y fórmulas 440
8.4 Simplificación de expresiones algebraicas y la propiedad distributiva 451
8.5 Asociación o combinación de términos semejantes 457
8.6 Simplificación de expresiones para resolver ecuaciones 466

8.7 Exponentes 472
Concepto clave: variables 479
Énfasis en el trabajo en equipo 480
Repaso del capítulo 481
Examen del capítulo 487
Ejercicios acumulativos de repaso 489

9 Introducción a la geometría 491

9.1 Definiciones básicas 494
9.2 Rectas paralelas y perpendiculares 503
9.3 Polígonos 510
9.4 Propiedades de los triángulos 517
9.5 Perímetros y áreas de polígonos 526
9.6 Círculos 538
9.7 Área superficial y volumen 546
Concepto clave: fórmulas 557
Énfasis en el trabajo en equipo 558
Repaso del capítulo 559
Examen del capítulo 569
Ejercicios acumulativos de repaso 571

Apéndice I
Polinomios A-1
I.1 Introducción a los polinomios A-1
I.2 Suma y resta de polinomios A-4
I.3 Multiplicación de polinomios A-10

Apéndice II
Razonamiento inductivo y deductivo A-15

Apéndice III
Tabla de raíces y potencias A-22

Apéndice IV
Respuestas a los ejercicios seleccionados A-23

Índice I-1

PREFACIO

Para el docente

El propósito de este libro de texto es enseñar a los alumnos cómo leer, escribir y pensar matemáticamente aplicando el lenguaje de las matemáticas. Esta obra fue escrita para los alumnos que estudian matemáticas básicas por vez primera y para los que necesiten un repaso básico. *Matemáticas básicas*, tercera edición, emplea una variedad de métodos de instrucción que reflejan las recomendaciones del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y de la Asociación Matemática Americana de Universidades (AMATYC), ambas de Estados Unidos. Los lectores encontrarán una infinidad de oportunidades para poner en práctica sus habilidades y podrán beneficiarse del enfoque pedagógico que se utiliza, ambas son características que integran el enfoque tradicional de la enseñanza de las matemáticas. Los autores hacen énfasis en el raciocinio, la elaboración de modelos, y las habilidades de comunicación, ya que forman parte de la reforma actual en la enseñanza de la materia.

Esta tercera edición conserva la filosofía básica de la anterior. Sin embargo, se han aplicado varias mejoras como resultado directo de los comentarios y sugerencias que recibimos de profesores y de alumnos. Nuestra meta era realizar un libro que fuera más agradable para leer, más fácil de entender y más relevante.

Novedades en esta edición

Las nuevas características hacen que esta edición esté más vinculada y sea más atractiva para el alumno.

Verifique sus conocimientos: esta nueva sección de evaluación que se incluye al principio de cada capítulo sirve para medir la base de conocimiento que tiene el estudiante antes de iniciar el capítulo. Los profesores pueden aplicar una evaluación previa para comprobar la preparación de los alumnos antes de abordar la lección y pueden modificar las lecciones siguientes de acuerdo con las necesidades de sus educandos, y a su vez éstos pueden tomar las evaluaciones previas como preparación para el capítulo y revisar su estructura. Las respuestas a las evaluaciones previas aparecen en la parte final del libro.

Taller de habilidades para el estudio: este minicurso completo relativo a las habilidades del estudio de las matemáticas, ayuda tanto a los alumnos como a los profesores a abordar el problema de la falta de preparación y el uso de hábitos inadecuados de estudio. Está integrado por una serie de lecciones organizadas. Cada capítulo inicia con un taller de habilidades para el estudio (que ocupa una página), el cual presenta aspectos relevantes relacionados con las habilidades de estudio, esto sucede en una secuencia conforme el alumno avanza en el curso, por ejemplo, el alumno aprende a utilizar un calendario para programar los tiempos de estudio en la primera lección, las mejores prácticas para los grupos de estudio se analizan cuando están a punto de presentar un examen semestral, y el tema de cómo estudiar con eficacia se deja para el final, en una de las últimas lecciones. Esta útil referencia puede utilizarse en el salón de clases o como una tarea.

Para pensar a detalle: cada capítulo contiene uno o dos de estos apartados, que forman la unión entre las matemáticas y la vida diaria del alumno. Estos problemas están

relacionados con el estudiante y requieren el uso de habilidad matemática para aplicarla en situaciones de la vida real. Los temas incluyen costos, estadísticas, vida universitaria, oportunidades de empleo y muchos más que están directamente vinculados con la experiencia del alumno.

Un nuevo diseño a color organiza visualmente la información en la página.

Características notables del libro

- El autor ha desarrollado y probado una estrategia para la resolución de problemas que se desarrolla en cinco pasos, la cual enseña a analizar el problema, a plantear una ecuación, a resolverla, a obtener una conclusión y verificar el resultado. Como se desarrolla paso a paso, este procedimiento aclara el proceso de pensamiento y las habilidades matemáticas necesarias para resolver una amplia variedad de problemas, gracias a esto aumenta la confianza del estudiante y se fortalecen sus habilidades para resolver problemas.
- Ejercicios de estudio, se localizan al final de cada sección, tienen una organización única, que tiende a mejorar las habilidades de lectura, escritura y comunicación de ideas matemáticas en los alumnos, en consecuencia pueden analizar los temas desde una amplia gama de perspectivas. Cada ejercicio de estudio está dividido en siete partes: VOCABULARIO, CONCEPTOS, NOTACIÓN, PRÁCTICA, APLICACIONES, POR ESCRITO y REPASO.
  - Los problemas que aparecen en las secciones VOCABULARIO, NOTACIÓN y POR ESCRITO ayudan a los alumnos a mejorar su habilidad para leer, escribir y comunicar ideas matemáticas.
  - Los problemas de la sección CONCEPTOS refuerzan una mayor cantidad de ideas mediante la exploración, y fomentan el pensamiento independiente así como la habilidad para interpretar gráficas y datos.
  - Los problemas de la sección PRÁCTICA proporcionan los medios necesarios para lograr el dominio de los ejercicios de estudio, en tanto que las aplicaciones brindan las oportunidades para que los alumnos se enfrenten con situaciones de la vida real. Cada conjunto de ejercicios de estudio concluye con una sección de REPASO que está integrada por problemas que fueron seleccionados al azar de las secciones anteriores.
- Los problemas de AUTOEVALUACIÓN se presentan después de la mayor parte de los problemas planteados, refuerzan los conceptos y brindan confianza al alumno. Después de cada problema de autoevaluación se presenta la respuesta adecuada, para que el alumno tenga la retroalimentación instantánea.
- La sección CONCEPTO CLAVE es una página de repaso que podrá encontrar al final del capítulo, y hace hincapié en la importancia que tiene el concepto en el panorama global.
- Se incluye una gran cantidad de APLICACIONES DE LA VIDA REAL que están ligadas a una amplia gama de disciplinas, incluyendo ciencia, negocios, economía, manufactura, entretenimiento, historia, arte, música y matemáticas.
- La sección INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA indica cómo se pueden usar las calculadoras científicas en la resolución de problemas de aplicación, resulta útil para los profesores que desean integrar las calculadoras en su curso.
- La sección EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO se localiza al término de cada capítulo, excepto en el capítulo 1, y facilita la retención de todo el material que se analizó en los capítulos anteriores.

Para información detallada sobre el material disponible para este texto, lea lo siguiente:

Este libro cuenta con una serie de complementos para el profesor, los cuales están en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que adoptan la presente obra como texto para sus cursos. Para mayor información, favor de comunicarse con las oficinas de nuestros representantes de ventas o a los siguientes correos electrónicos:

Thomson México y Centroamérica: "mailto:clientes@thomsonlearning.com.mx" clientes@thomsonlearning.com.mx

Thomson América del Sur: "mailto:cliente@thomsonlearning.com" cliente@thomsonlearning.com

Thomson Caribe: "mailto:amy.reyes@thomsonlearning.com" amy.reyes@thomsonlearning.com

Thomson Cono Sur: "mailto:thomson@thomsonlearning.com.ar" thomson@thomsonlearning.com.ar

Adicionalmente encontrará más apoyos en la página web de este libro:

http://www.thomsonedu.com/thomsonedu/student.do?product_isbn=0495188956&disciplinenumber=1&s_cidnull&tab=Extras

Las direcciones de los sitios Web que se mencionan en esta obra no son administradas por Thomson Learning Iberoamérica, por lo que no nos hacemos responsables de los cambios que pudieran ocurrir. Sin embargo, le recomendamos visitar frecuentemente tales sitios para estar al tanto de cualquier actualización.

RECONOCIMIENTOS

Los autores estamos muy agradecidos con las siguientes personas, quienes revisaron la prueba de impresión y los demás manuscritos de toda la serie de esta obra, tanto de la edición de pasta dura como la rústica, en las diferentes etapas del desarrollo. Todas ellas aportaron sugerencias valiosas que se incorporaron al texto.

Las personas siguientes revisaron la primera y segunda ediciones.

Linda Beattie
Western New Mexico University

Julia Brown
Atlantic Community College

Linda Clay
Albuquerque TVI

John Coburn
Saint Louis Community College–Florissant Valley

Sally Copeland
Johnson County Community College

Ben Cornelius
Oregon Institute of Technology

James Edmondson
Santa Barbara Community College

David L. Fama
Germanna Community College

Barbara Gentry
Parkland College

Laurie Hoecherl
Kishwaukee College

Judith Jones
Valencia Community College

Therese Jones
Amarillo College

Joanne Juedes
University of Wisconsin–Marathon County

Dennis Kimzey
Rogue Community College

Sally Lesik
Holyoke Community College

Elizabeth Morrison
Valencia Community College

Jan Alicia Nettler
Holyoke Community College

Scott Perkins
Lake–Sumter Community College

Angela Peterson
Portland Community College

J. Doug Richey
Northeast Texas Community College

Angelo Segalla
Orange Coast College

June Strohm
Pennsylvania State Community College-DuBois

Rita Sturgeon
San Bernardino Valley College

Jo Anne Temple
Texas Technical University

Sharon Testone
Onondaga Community College

Marilyn Treder
Rochester Community College

Thomas Vanden Eynden
Thomas More College

Las personas siguientes revisaron los libros de la serie durante la preparación de la tercera edición:

Cedric E. Atkins
Mott Community College

William D. Barcus
SUNY, Stony Brook

Kathy Bernunzio
Portland Community College

Girish Budhwar
United Tribes Technical College

Sharon Camner
Pierce College–Fort Steilacoom

Robin Carter
Citrus College

Ann Corbeil
Massasoit Community College

Carolyn Detmer
Seminole Community College

Eric Sims
Art Institute of Dallas

Annette Squires
Palomar College

Lee Ann Spahr
Durham Technical Community College

John Strasser
Scottsdale Community College

Stuart Swain
University of Maine–Machias

Maggie Flint
Northeast State Technical Community College

Charles Ford
Shasta College

Michael Heeren
Hamilton College

Monica C. Kurth
Scott Community College

Sandra Lofstock
St. Petersberg College–Tarpon Springs Center

Marge Palaniuk
United Tribes Technical College

Jane Pinnow
University of Wisconsin–Parkside

Celeste M. Teluk
D'Youville College

Sven Trenholm
Herkeimer County Community College

Stephen Whittle
Augusta State University

Mary Lou Wogan
Klamath Community College

Sin el talento y la dedicación del personal de las divisiones editorial, comercialización y producción, además del apoyo que brindó el personal de Brooks/Cole, esta edición de *Matemáticas básicas* no podía haber sido tan bien lograda. Expresamos nuestro agradecimiento más sincero por el arduo trabajo de Roberto Pirtle, Jennifer Laugier, Helen Walden, Lori Heckleman, Vernon Boes, Diane Beasley, Sarah Woicicki, Greta Kleinert, Jessica Bothwell, Bryan Vann, Kristen Markson, Rebecca Subity, Hal Humphrey, Jolene Rhodes, Christine Davis, Diane Koenig, además del personal de composición tipográfica de G&S Typesetters por su ayuda en la realización del libro. Un agradecimiento especial para David Casey del Citrus College por su extensa labor realizada en la lectura de pruebas y a Sheila Pisa por escribir los textos excelentes que aparecieron en los Talleres de habilidades para el estudio.

Alan S. Tussy
R. David Gustafson

Para el alumno

Éxito en las matemáticas

Para tener éxito en las matemáticas el alumno necesita saber cómo estudiarlas. La siguiente lista de verificación le ayudará a desarrollar una estrategia personal y aprender el material. Las sugerencias requerirán de algún tiempo y disciplina de su parte, pero el esfuerzo valdrá la pena ya que le ayudará a obtener lo máximo de este curso.

Conforme avance en la lectura de los siguientes párrafos, le sugerimos marque los recuadros si su respuesta es afirmativa; en caso contrario, piense qué podría hacer para que la sugerencia forme parte de su plan de estudio. No olvide revisar varias veces la lista durante el transcurso del semestre para comprobar que la está siguiendo.

Preparación para la clase

- ❑ Acepto el compromiso personal de ofrecer mi mejor esfuerzo en este curso.
- ❑ Tengo los materiales apropiados: lápiz con goma, papel, cuaderno, regla, calculadora, un calendario o mi horario/agenda de los cursos.
- ❑ Estoy dispuesto a invertir un mínimo de dos horas diarias para hacer la tarea por cada hora de clase que reciba.
- ❑ Trataré de dedicar tiempo para estudiar lo visto en el curso todos los días.
- ❑ Confirmo que tengo una copia del programa de estudios, entiendo los requisitos del curso y los requisitos para acreditar la materia.
- ❑ Dispondré de una hora antes de cada clase para repasar mis notas y comenzar la tarea asignada.

Participación en clase

- ❑ Conozco el nombre de mi profesor.
- ❑ Asistiré a los cursos y seré puntual.
- ❑ Cuando me ausente, investigaré lo que se estudió en clase y obtendré una copia de las notas o del manuscrito y haré el trabajo asignado.
- ❑ Me sentaré en donde pueda escuchar al profesor y ver el pizarrón.
- ❑ Pondré atención a los temas expuestos en clase y tomaré con cuidado las notas.
- ❑ Haré las preguntas al profesor cuando no entienda sus explicaciones.
- ❑ Cuando se analicen en clase los resultados de los exámenes, problemas o tareas, escribiré las soluciones correctas de todos los problemas en los que me equivoque, de manera que pueda aprender de mis errores.

Sesiones de estudio

- ❑ Encontraré un lugar cómodo y tranquilo para estudiar.
- ❑ Me doy cuenta de que el leer matemáticas es diferente a leer un diario o una novela. Cuando sea necesario leeré el material más de una vez para entenderlo.
- ❑ Después de estudiar un ejemplo que aparece en el libro de texto, lo revisaré y luego realizaré la autoprueba que le sigue.
- ❑ Comenzaré a realizar la tarea después de haber leído la lección correspondiente.
- ❑ Trataré de utilizar el vocabulario matemático que se indica en el libro y lo utilizaré con mi profesor mientras lea o hable del tema estudiado en el curso.
- ❑ Buscaré los momentos para explicar el material a otros compañeros.
- ❑ Compararé las respuestas de los problemas con las que se incluyen al final del libro y resolveré cualquier duda.
- ❑ Mis tareas serán organizadas y limpias, las respuestas incluirán todos los pasos que se consideraron para llegar al resultado.
- ❑ Resolveré diariamente algunos problemas de repaso.

- ❑ Después de finalizar la tarea, leeré la siguiente sección para preparar la siguiente clase.
- ❑ Tendré la libreta con todas mis anotaciones, tareas, observaciones, exámenes y cualquier información en orden y con fecha.

Ayuda especial

- ❑ Conoceré el horario de asesorías de mi profesor y estaré dispuesto a pedirle ayuda.
- ❑ Formaré un grupo de estudio con mis compañeros y nos reuniremos periódicamente para analizar el material y trabajar en la resolución de los problemas.
- ❑ Cuando necesite la explicación adicional de un tema, utilizaré los videos tutoriales y el CD interactivo.
- ❑ Me inscribiré en las asesorías extra clase que ofrece mi plantel para los cursos de matemáticas.

Necesitará tiempo para seguir cada una de las sugerencias anteriores, además de mucha práctica para aprender matemáticas igual que otra habilidad.

Sin duda algunas veces se sentirá frustrado, esto es natural; cuando suceda tómese un descanso y reanude el estudio del material después de haber aclarado su mente, piense que la habilidad y la disciplina que aprenda en este curso le brindará un mejor futuro. ¡Buena suerte!

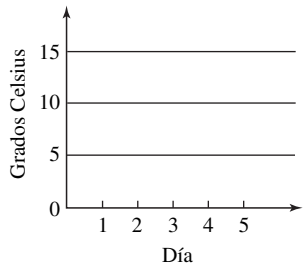
Verifique sus conocimientos

1. El conjunto de los números _____ es {1, 2, 3, 4, 5, . . .}, y el conjunto de los números _____ es {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}.
2. La distancia alrededor de un rectángulo se llama _____.
3. La propiedad que garantiza que podemos sumar dos números en cualquier orden se llama propiedad _____ de la suma. La propiedad que nos permite agrupar números en una suma de cualquier forma que deseemos se llama propiedad _____ de la suma.
4. Los números que se van a multiplicar se llaman _____. El resultado de una multiplicación se llama _____. La respuesta a una división se llama _____.
5. Un número _____ es un número natural, mayor que 1, que tiene por únicos divisores a 1 y a sí mismo.
6. Escriba 3737 en notación expandida.
7. Redondee 186 250 a la centena más cercana.

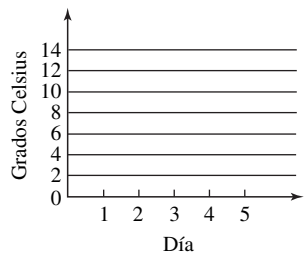
Refiérase a los datos de la tabla.

Día	1	2	3	4	5
Temperatura (Celsius)	13	8	12	5	7

8. Use la tabla para hacer una gráfica de barras.



9. Use los datos para hacer una gráfica de líneas.



10. Coloque uno de los símbolos < o > en el espacio para hacer que el enunciado sea verdadero 27 ☐ 19

11. Sume: $\begin{array}{r} 3742 \\ +1379 \\ \hline \end{array}$

12. Reste 289 de 347.

13. En 2003 la revista *People* tuvo una circulación pagada de 3 603 115. ¿En qué cantidad excedió ésta a *The National Enquirer* que tuvo una circulación de 1 541 618?

14. Multiplique: $\begin{array}{r} 432 \\ \times\ 57 \\ \hline \end{array}$

15. Divida: $79\overline{)4537}$.

16. Encuentre el perímetro y el área de un rectángulo que tiene 13 pies de ancho y 19 pies de largo.

17. Encuentre la factorización en números primos de 950.

Evalúe las expresiones.

18. $3 + 4 - 2$

19. $3 + 4 \cdot 25$

20. $\dfrac{(4^3 - 2) + 7}{5(2 + 4) - 7}$

21. $3 \cdot 7 - 2\,[10 - 3(5 - 2)]$

22. Julia obtuvo 95, 85, 73, 62 y 0 en cinco exámenes de matemáticas. Encuentre su media (promedio) de calificación de exámenes.

CAPÍTULO 1

Números cardinales

1.1 Introducción a los números cardinales

1.2 Suma de números cardinales

1.3 Resta de números cardinales

1.4 Multiplicación de números cardinales

1.5 División de números cardinales

Estimación

1.6 Factores primos y exponentes

1.7 Orden de las operaciones

Concepto clave: orden de las operaciones

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Getty Images

Los gerentes de oficina juegan un papel importante en muchos negocios. Supervisan las actividades día a día de una compañía asegurándose de que los negocios funcionen sin sobresaltos y eficientemente. Para ser un gerente de oficina efectivo se necesitan excelentes habilidades organizativas, de planeación y de comunicación. También se requieren fuertes habilidades matemáticas para desempeñar responsabilidades de trabajo tales como programar reuniones, administrar una nómina y presupuestos y diseñar distribuciones de espacios de trabajo de oficina.

Taller de habilidades para el estudio

¡ORGANÍCESE!

Los estudiantes que han tenido dificultad para aprender matemáticas en el pasado podrían pensar que su problema es que no nacieron con el talento para "hacer matemáticas". ¡Esto no es verdad! Aprender matemáticas es una habilidad, y es similar a aprender a tocar un instrumento musical, lo que requiere práctica diaria y organizada. También es un proceso secuencial; lo que aprenda un día será usado de nuevo como fundamento para un concepto nuevo. Por tanto, es especialmente importante estar preparado y tener voluntad para empezar a trabajar en su clase de matemáticas desde el primer día. Abajo hay algunas estrategias para un buen comienzo.

Asista a clases. Una de las cosas más importantes que puede hacer para tener éxito es asistir a clases todas las veces. Su instructor no sólo explica el material y da ejemplos para apoyar su texto, sino que también discute temas que no aparecen en su libro o puede hacer cambios en las tareas o fechas de exámenes. También es importante para tener éxito conocer al menos a algunos de sus compañeros de clase. Encuentre uno o dos compañeros de clase de quienes dependa para que le den información, que lo puedan ayudar con su tarea o con quien usted pueda formar un grupo de estudio.

Elabore un calendario. Como la práctica diaria es tan importante para aprender matemáticas es buena idea hacer un calendario que incluya todas las fechas de sus compromisos. Podría preguntarse cuánto tiempo es apropiado dedicar a sus clases. Una regla general es asignar 2 horas fuera de clase por cada hora de clase. Esto significa que si tiene clases tres horas a la semana, planee 6 horas por semana para hacer tareas y estudiar. Recuerde que esto es para cada clase. En su calendario escriba las horas para sus clases, el tiempo que necesita para hacer tareas y otros compromisos normales (como el trabajo, obligaciones sociales, actividades familiares, etcétera).

Reúna los materiales que vaya a necesitar. Todas las clases de matemáticas requieren libros de texto, cuadernos, lápices (¡con goma grande!) y usualmente todo el papel de reúso que pueda juntar. Una buena fuente de papel de reúso es a menudo un laboratorio de cómputo en su campus. Para asegurarse de que tiene todo lo que vaya a necesitar consulte con su instructor. Tenga sus materiales para la segunda clase y llévelos a cada clase de ahí en adelante.

¿Qué espera su profesor de usted? El programa de avances o temario del curso que maneja su profesor es un documento que contiene sus expectativas. A menudo el profesor detallará en el programa cómo se determina su calificación, a qué hora está en su oficina y cuándo puede obtener asesoría fuera de clase. Si algo no le queda claro, busque a su instructor tan pronto como sea posible.

TAREA

1. Realice su propio calendario, el cual debe indicar las horas de clase de cada curso que esté tomando así como las horas para el trabajo y otras actividades esenciales. Podría también programar tiempo adicional para estudiar una semana antes de un examen. Incluya también tiempo para ejercicio físico y descanso, esto es importante para disminuir los efectos del estrés que causan las actividades académicas.
2. Elabore una lista (es bueno que la tenga para cada uno de sus cursos) la cual debe contener:
   - **a.** El nombre de su profesor o asesor, la localización de su oficina, el horario de atención, número telefónico y correo electrónico.
   - **b.** Fechas de exámenes si ya están programadas.
   - **c.** Qué trabajos determinan su calificación del curso y cómo se calculan las calificaciones.
3. Escriba el nombre, número telefónico y correo electrónico de al menos dos compañeros de clase.
4. ¿Su universidad tiene servicios de asesoría, un laboratorio de matemáticas/centro de estudios? ¿Dónde se localizan? ¿Cuál es su horario de atención?

En este capítulo utilizaremos las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para resolver problemas que involucran números cardinales.

1.1 Introducción a los números cardinales

• Conjuntos de números • Valor posicional • Notación expandida • Localice puntos en la recta numérica • Orden de los números cardinales • Redondeo de números cardinales • Tablas y gráficas

En esta sección discutimos los números cardinales. Estos números se usan para responder a preguntas como: ¿cuántos?, ¿qué tan rápido?, ¿qué tan pesado? y ¿qué tan lejos?

- La película *Titanic* ganó 11 Óscares.
- La montaña rusa más rápida del mundo es la *Top Thrill Dragster* en Cedar Point, Sandusky, Ohio. Alcanza velocidades de hasta 120 mph.
- La Estatua de la Libertad pesa 225 toneladas.
- La distancia por carretera entre la ciudad de Nueva York y Los Ángeles es 2786 millas.

Conjuntos de números

Un **conjunto** es una colección de objetos. Un conjunto básico en matemáticas es el de los números naturales (los números con los que contamos). Cuando se escribe un conjunto usamos **llaves { }** para encerrar a sus miembros (o **elementos**).

El conjunto de los números naturales

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .}

El conjunto de los números cardinales

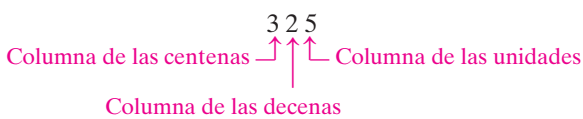
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .}

Los tres puntos al final de la lista arriba indican que estos conjuntos continúan en forma infinita. No existe el número cardinal más grande en los conjuntos.

Como cada número natural también es un número cardinal, decimos que el conjunto de números naturales es un **subconjunto** del conjunto de los números cardinales naturales o cardinales. Sin embargo, no todos los números cardinales son números naturales, ya que el cero es un número cardinal pero no es un número natural.

Valor posicional

Cuando expresamos un número cardinal con un *numeral* que contiene los *dígitos* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, decimos que el número está escrito en **notación estándar**. La posición de un dígito en un numeral determina su valor. En el numeral 325 el 5 está en la *columna de las unidades*, el 2 está en la *columna de las decenas* y el 3 en la *columna de las centenas*.



Para hacer fáciles de leer a los numerales usamos espacios para separar a los dígitos en grupos de tres, llamados **periodos**. Cada periodo tiene un nombre como *unidades, millares,*

millones, y así sucesivamente. La tabla siguiente muestra el valor posicional de cada dígito en el numeral 345 576 402 897 415 que se lee como

trescientos cuarenta y cinco trillones, quinientos setenta y seis billones, cuatrocientos dos millones, ochocientos noventa y siete mil, cuatrocientos quince

345 trillones			576 billones			402 millones			897 millares			4 cientos quince		
3	4	5	5	7	6	4	0	2	8	9	7	4	1	5
trillones			billones			millones			millares			unidades		
Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades

Conforme nos movemos a la izquierda en esta tabla el valor posicional de cada columna es 10 veces más grande que la columna a su derecha. Esta es la razón por la cual llamamos a nuestro sistema de numeración un *sistema de numeración de base 10*.

EJEMPLO 1 **Noticias en la TV.** En 2003 hubo 73 365 880 suscriptores de cable básico en Estados Unidos. ¿Qué dígito nos dice el número de centenas?

Solución En 73 365 **8**80, la columna de las centenas es la tercera columna desde la derecha. El dígito 8 nos dice el número de centenas.

Autoevaluación 1
En 2003 existían 158 722 000 suscriptores de teléfono celular en Estados Unidos. ¿Qué dígito en 158 722 000 nos dice el número de las decenas de millares?

Respuesta 2

Notación expandida

En el numeral 6352 el dígito 6 está en la columna de los millares, 3 está en la columna de las centenas, 5 está en la columna de las decenas y 2 en la de las unidades. El significado de 6352 se hace claro cuando lo escribimos en **notación expandida**.

6 millares + 3 centenas + 5 decenas + 2 unidades

Leemos el numeral 6352 como "seis mil trescientos cincuenta y dos".

EJEMPLO 2 Escriba los números en notación expandida. **a.** 63 427 y **b.** 1 251 609.

Solución

a. 6 decenas de millares + 3 unidades de millares + 4 centenas + 2 decenas + 7 unidades

Se lee este número como "sesenta y tres mil cuatrocientos veintisiete".

b. 1 millón + 2 centenas de millares + 5 decenas de millares + 1 unidad de millar + 6 centenas + 0 decenas + 9 unidades

Como 0 decenas es cero, la notación expandida se puede escribir como

1 millón + 2 centenas de millares + 5 decenas de millares + 1 unidad de millar + 6 centenas + 9 unidades

Se lee este número como "un millón doscientos cincuenta y un mil seiscientos nueve".

Autoevaluación 2
Escriba 808 413 en notación expandida.

Respuesta 8 centenas de millares + 8 unidades de millares + 4 centenas + 1 decena + 3 unidades. Léalo como "ochocientos ocho mil cuatrocientos trece".

EJEMPLO 3 Escriba veintitrés mil cuarenta en notación estándar.

Solución En notación expandida el número se escribe como

2 decenas de millares + 3 unidades de millares + 4 decenas Hay 0 centenas y 0 unidades.

En notación estándar esto se escribe como 23 040.

Autoevaluación 3
Escriba setenta y seis mil tres en notación estándar.

Respuesta 76 003

Localice puntos en la recta numérica

Los números cardinales se pueden ilustrar dibujando puntos sobre la **recta numérica**, recta que se usa para representar números gráficamente. Al igual que una regla, la recta numérica tiene marcas uniformes. (Véase la figura 1.1). Para construir la recta numérica empezamos a la izquierda con un punto sobre la recta que representa el número 0. A este punto se le llama **origen**. Luego avanzamos hacia la derecha dibujando marcas igualmente espaciadas y escribimos los números cardinales que aumentan progresivamente de tamaño. La punta de la flecha indica que la recta numérica continúa indefinidamente.

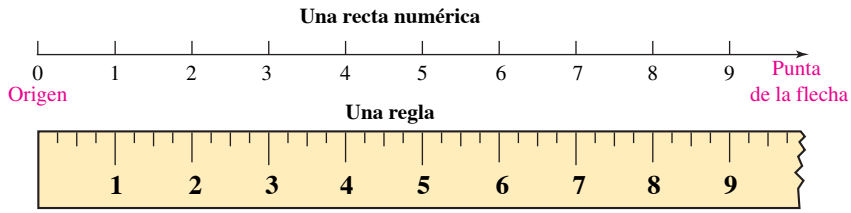


FIGURA 1.1

Se puede representar un solo número o un conjunto de números en una recta numérica usando un proceso conocido como trazar una gráfica. *La gráfica de un número* es el punto en la recta numérica que corresponde a ese número. *Trazar la gráfica de un número* significa localizar su posición en la recta numérica y remarcarlo con un punto grande. La figura 1.2 muestra las gráficas de 5 y de 8.

FIGURA 1.2

Orden de los números cardinales

Al movernos hacia la derecha en la recta numérica los números se hacen más grandes. Como 8 está a la derecha de 5 decimos que 8 es mayor que 5. Se puede usar el **símbolo de desigualdad** $>$ (“es mayor que”) para escribir este hecho.

$8 > 5$ Léase como “8 es mayor que 5”.

Como $8 > 5$ es también verdad que $5 < 8$. (Léase como “5 es menor que 8”.)

COMENTARIO Para distinguir entre estos dos símbolos de desigualdad recuerde que siempre apuntan al menor de los dos números involucrados.

$8 > 5$ $5 < 8$

Apunta al menor de los números

EJEMPLO 4 Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el espacio para que el enunciado sea verdadero:

a. 3 ☐ 7 y **b.** 18 ☐ 16.

Solución

a. Como 3 está a la izquierda de 7 en la recta numérica, $3 < 7$.

b. Como 18 está a la derecha de 16 en la recta numérica, $18 > 16$.

Autoevaluación 4

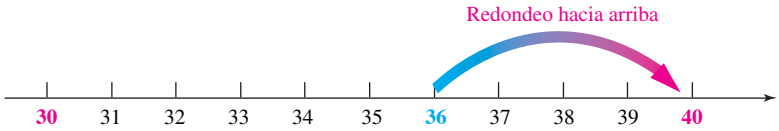
Coloque un símbolo $<$ o $>$ en el espacio para hacer que el enunciado sea verdadero:

a. 12 ☐ 4 **b.** 7 ☐ 10

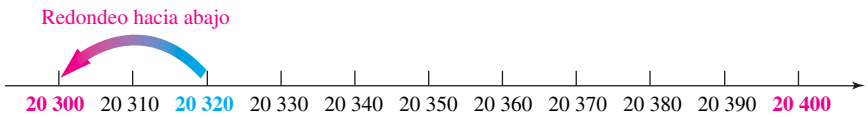
Respuestas **a.** $>$, **b.** $<$

Redondeo de números cardinales

Cuando no necesitamos resultados exactos a menudo redondeamos los números. Por ejemplo, cuando un maestro con 36 estudiantes ordena 40 libros de texto ha redondeado el número real *a la decena más cercana* porque 36 está más cerca de 40 que de 30.



Cuando un geólogo dice que la altura del monte McKinley en Alaska es de "alrededor de 20 300 pies" dice que lo ha redondeado a la *centena más cercana* porque su altura real de 20 320 pies está más cercana a 20 300 que a 20 400.

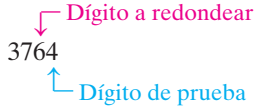


Para redondear un número natural seguimos un conjunto de reglas establecidas. Para redondear un número a la decena más cercana, por ejemplo, localizamos el **dígito a redondear** en la columna de las decenas. Si el **dígito de prueba** a la derecha de esa columna (el dígito en la columna de las unidades) es 5 o mayor, *redondeamos hacia arriba* incrementando el dígito de las decenas en 1 y colocando un 0 en la columna de las unidades. Si el dígito de prueba es menor que 5 *redondeamos hacia abajo* dejando el dígito de las decenas sin cambio y colocamos un 0 en la columna de las unidades.

EJEMPLO 5 Redondee los números a la decena más cercana: **a.** 3764 y **b.** 12 087.

Solución

a. Encontramos el dígito a redondear en la columna de las decenas que es 6.



Luego vemos el dígito de prueba a la derecha de 6, el 4 en la columna de las unidades. Como $4 < 5$, redondeamos hacia abajo dejando el 6 sin cambio y reemplazamos el dígito de prueba con 0. La respuesta redondeada es 3760.

Autoevaluación 5

Redondee los números a la decena más cercana:

a. 35 642

b. 3756

b. Encontramos el dígito a redondear en la columna de las decenas que es 8.

Dígito a redondear
12 087
Dígito de prueba

Luego vemos el dígito a la derecha de 8, el 7 en la columna de las unidades. Como $7 > 5$, redondeamos hacia arriba sumando 1 a 8 y reemplazando el dígito de prueba con 0. La respuesta redondeada es 12 090.

Respuestas **a.** 35 640, **b.** 3760

Un método similar se usa para redondear números a la centena más cercana, el millar más cercano, la decena de millar más cercana, y así sucesivamente.

Redondeo de un número cardinal

1. Para redondear un número hasta cierta cifra localice el dígito a redondear en esa cifra.
2. Vea el dígito de prueba a la derecha del dígito a redondear.
3. Si el dígito es 5 o mayor redondee hacia arriba sumando 1 al dígito a redondear y cambie todos los dígitos a la derecha del dígito a redondear por 0.

   Si el dígito de prueba es menor que 5 redondee hacia abajo conservando el dígito y cambiando todos los dígitos a la derecha del dígito a redondear por 0.

Autoevaluación 6
Redondee 365 283 a la centena más cercana.

EJEMPLO 6 Redondee 7960 a la centena más cercana.

Solución Primero encontramos el dígito a redondear en la columna de las centenas que es 9.

Dígito a redondear
7960
Dígito de prueba

Luego vemos el 6 a la derecha de 9. Como $6 > 5$ redondeamos hacia arriba e incrementamos en 1 el 9 en la columna de las centenas. Como 9 en la columna de las centenas representa 900, incrementar 9 en 1 representa incrementar 900 a 1000. Por tanto, reemplazamos 9 con 0 y sumamos 1 a 7 en la columna de los millares. Finalmente, reemplazamos los dos dígitos más a la derecha con 0. La respuesta redondeada es 8000.

Respuesta 365 300

Autoevaluación 7
Redondee la altura de Denver **a.** a la centena de pies más cercana y **b.** a los millares de pies más cercanos.

EJEMPLO 7 Ciudades de Estados Unidos.

En 2003 la 26ª ciudad más grande de la nación era Denver. Redondee la población de Denver dada en la figura 1.3 **a.** al millar más cercano y **b.** a la decena de millar más cercana.

FIGURA 1.3

Solución

a. El dígito a redondear en la columna de los millares es 7. El dígito de prueba, 4, es menor que 5, así que redondeamos hacia abajo. Hasta el millar más cercano la población de Denver en 2003 era 557 000.

b. El dígito a redondear en la columna de las decenas de millares es 5. El dígito de prueba, 7, es mayor que 5, así que redondeamos hacia arriba. Hasta la decena de millar más cercana la población de Denver en 2003 era 560 000.

Respuestas **a.** 5300 pies, **b.** 5000 pies

Estudiantes de reingreso

PARA PENSAR A DETALLE

"Se considera estudiante de reingreso a quien es de 25 años o más o aquellos estudiantes que han interrumpido su trabajo académico por 5 años o más. A nivel nacional este grupo de estudiantes está creciendo a un ritmo asombroso."

Departamento de vida estudiantil y liderazgo, Sindicato universitario, Cal Poly University, San Luis Obispo

Se listan abajo en la columna I algunas preocupaciones comunes expresadas por estudiantes adultos que consideran regresar a la escuela. Relacione cada preocupación con una respuesta de aliento en la columna II.

Columna I	Columna II
1. Soy demasiado viejo para aprender.	**a.** Muchos estudiantes califican para algún tipo de ayuda financiera.
2. No tengo tiempo.	**b.** Llevar una sola clase le acerca un paso más hacia sus metas educativas.
3. No me fue bien en la escuela la primera vez. No creo que me acepte una universidad.	**c.** No hay evidencia de que los estudiantes mayores no puedan aprender igual que los más jóvenes.
4. Me da miedo que no encaje.	**d.** Más de 41% de los estudiantes universitarios tienen más de 25 años.
5. No tengo dinero para pagar la universidad.	**e.** Típicamente las universidades comunitarias y las escuelas de carrera tienen una política de admisión abierta.

Adaptado de *Common Concerns for Adult Students*, Oficina de Servicios de Educación Superior

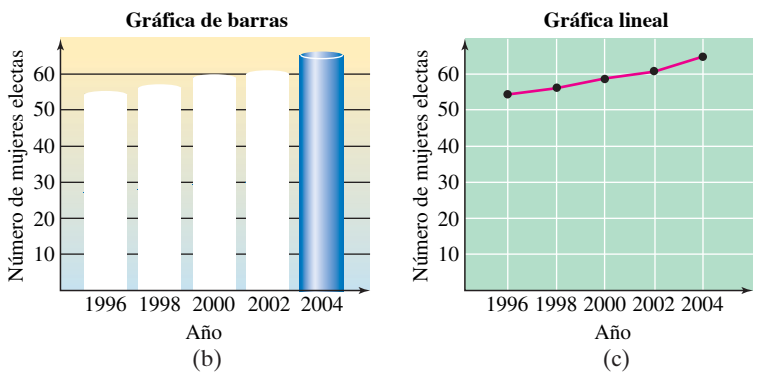
Tablas y gráficas

La tabla de la figura 1.4(a) es un ejemplo del uso de números cardinales. Muestra el número de mujeres electas para la Cámara de Representantes de Estados Unidos en las elecciones del Congreso sostenidas cada dos años de 1996 a 2004.

Año	Número de mujeres electas
1996	54
1998	56
2000	59
2002	60
2004	65

Fuente: Centro de mujeres americanas y política

(a)



(b) (c)

FIGURA 1.4

En la figura 1.4(b) de la página anterior, los resultados de la elección se presentan en una **gráfica de barras**. La escala horizontal se identifica como "Año" y las unidades son de 2 años. La escala vertical se identifica como "Número de mujeres electas" y las unidades son de 10. La barra justo arriba de cada año se extiende a una altura que indica el número de mujeres electas al Congreso ese año.

Otra forma de representar la información en la tabla es con una **gráfica lineal**. En lugar de usar una barra para denotar el número de mujeres electas, usamos un punto dibujado a la altura correcta. Después de dibujar puntos con los datos de 1996, 1998, 2000, 2002 y 2004, conectamos los puntos con segmentos de recta para crear la gráfica de la figura 1.4(c).

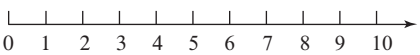
Sección 1.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

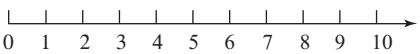
1. Un _____ es una colección de objetos.
2. El conjunto de los números _____ es {1, 2, 3, 4, 5, . . .}, y el conjunto de los números _____ es {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}.
3. Cuando 297 se escribe como 2 centenas + 9 decenas + 7 unidades está escrito en notación _____.
4. Si _____ 627 hasta la decena más cercana obtenemos 630.
5. Usando un proceso conocido como trazar la gráfica podemos representar a los números naturales como puntos en una recta _____.
6. Los símbolos $>$ y $<$ son símbolos de _____.

CONCEPTOS *Considere el numeral 57 634.*

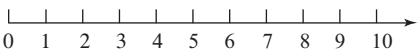
7. ¿Qué dígito está en la columna de las decenas?
8. ¿Qué dígito está en la columna de las unidades de millares?
9. ¿Qué dígito está en la columna de las centenas?
10. ¿Qué dígito está en la columna de las decenas de millares?
11. ¿Qué dígito está en la columna de la unidades?
12. Ordene de menor a mayor los números 25, 17, 37, 15, 45.
13. Grafique: 1, 3, 5, y 7.



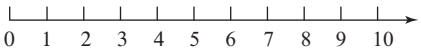
14. Grafique: 0, 2, 4, 6 y 8.



15. Grafique los números naturales menores que 6.



16. Grafique los números naturales entre 2 y 8.



Escriba uno de los símbolos $>$ o $<$ en el espacio para que el enunciado sea verdadero.

17. 47 ☐ 41
18. 53 ☐ 67
19. 309 ☐ 300
20. 841 ☐ 814
21. 2052 ☐ 2502
22. 999 ☐ 998
23. Como $4 < 7$, también es verdad que 7 ☐ 4.
24. Como $9 > 0$, también es verdad que 0 ☐ 9.

NOTACIÓN *Llene los espacios.*

25. Los símbolos { }, llamados _____, se usan cuando uno escribe un conjunto.
26. El símbolo $>$ significa ____ _____ _____, y el símbolo $<$ significa ____ _____ _____.

PRÁCTICA *Escriba los números en notación expandida y luego escríbalos en palabras.*

27. 245
28. 508
29. 3609
30. 3960
31. 32 500
32. 73 009
33. 104 401
34. 570 003

Escriba los números en notación estándar.

35. 4 centenas + 2 decenas + 5 unidades
36. 7 centenas + 7 decenas + 7 unidades
37. 2 millares + 7 centenas + 3 decenas + 6 unidades
38. 7 millares de millones + 3 centenas + 5 decenas
39. Cuatrocientos cincuenta y seis
40. Tres mil setecientos treinta y siete
41. Veintisiete mil quinientos noventa y ocho
42. Siete millones, cuatrocientos cincuenta y dos mil ochocientos sesenta.

43. Nueve mil ciento trece

44. Novecientos treinta

45. Diez millones, setecientos mil quinientos seis

46. Ochenta y seis mil cuatrocientos doce

Redondee 79 593 hasta . . .

47. la decena más cercana

48. la centena más cercana

49. el millar más cercano

50. la decena de millar más cercana

Redondee 5 925 830 hasta . . .

51. el millar más cercano

52. la decena de millar más cercana

53. la centena de millar más cercana

54. el millón más cercano

Redondee $419 161 hasta . . .

55. $10

56. $100

57. $1000

58. $10 000

APLICACIONES

59. PROGRAMAS DE JUEGOS En el programa de televisión *El precio es correcto* el concursante ganador es la persona que se acerque más a (sin sobrepasar) el precio del artículo en subasta. ¿Qué concursante de los mostrados abajo ganará si están concursando por juego de cuarto que tiene un precio sugerido retail de $4745?

Donna	Tyronne	Aisha	Coby
$4995	$4550	$4551	$4200

60. PRESIDENTES La lista siguiente muestra a los diez presidentes de EU más jóvenes y sus edades (en años/días) cuando tomaron el cargo. Construya una tabla a dos columnas que presente los datos en orden empezando con el presidente más joven.

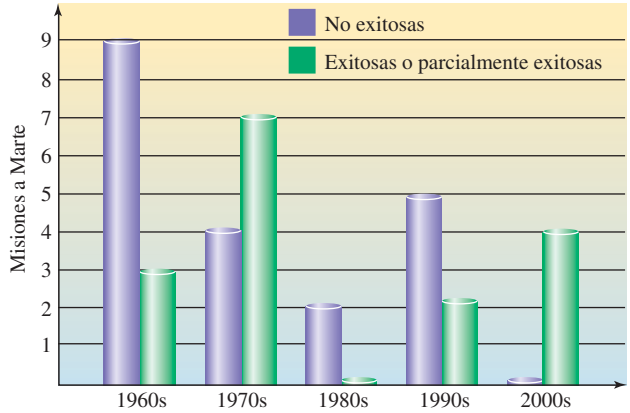
C. Arthur 50 años/350 días — U. Grant 46 años/236 días
G. Cleveland 47 años/351 días — J. Kennedy 43 años/236 días
W. Clinton 46 años/154 días — F. Pierce 48 años/101 días
M. Filmore 50 años/184 días — J. Polk 49 años/122 días
J. Garfield 49 años/105 días — T. Roosevelt 42 años/322 días

61. MISIONES A MARTE Estados Unidos, Rusia, Europa y Japón han lanzado exploradores espaciales a Marte. La gráfica de la columna siguiente muestra la tasa de éxitos de las misiones por década.

a. ¿En qué década hubo el mayor número de misiones exitosas o parcialmente exitosas? ¿Cuántas fueron?

b. ¿En qué década hubo el mayor número de misiones no exitosas? ¿Cuántas fueron?

c. ¿En qué década hubo el mayor número de misiones? ¿Cuántas fueron?

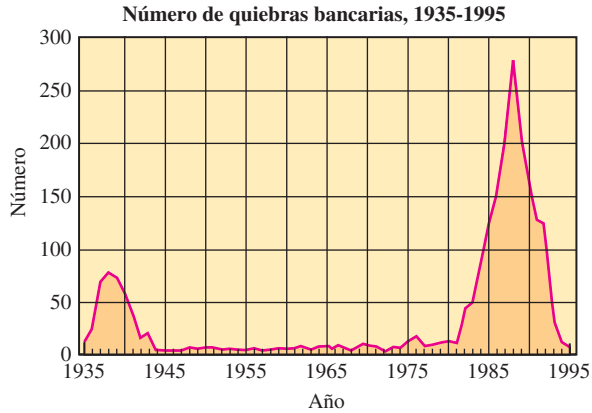


Fuente: La Sociedad Planetaria

62. BANCA La ilustración muestra el número de bancos que cerraron o que agencias federales tomaron su control de los años 1935-1995.

a. ¿Durante qué periodos de dos años hubo un recrudecimiento de quiebras bancarias?

b. ¿En qué año hubo el máximo de quiebras bancarias? Estime el número de bancos que quebraron ese año.

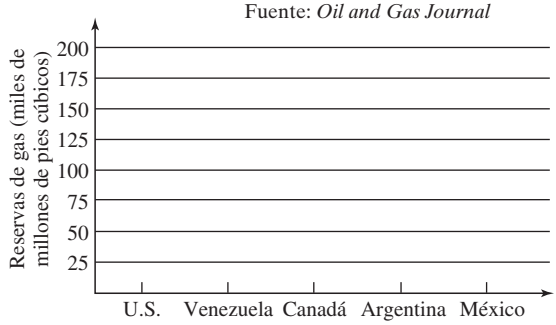


Fuente: FDIC División de investigación y estadística

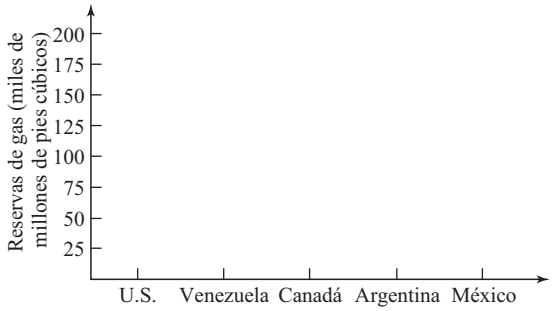
63. RESERVAS ENERGÉTICAS Construya una gráfica de barras que use los datos de la tabla.

RESERVAS DE GAS NATURAL, 2003 (EN MILES DE MILLONES DE PIES CÚBICOS)	
Estados Unidos	187
Venezuela	148
Canadá	60
Argentina	27
México	9

Fuente: *Oil and Gas Journal*



64. RESERVAS ENERGÉTICAS Refiérase al ejercicio 63 y construya una gráfica lineal que use los datos de la tabla en la página anterior.

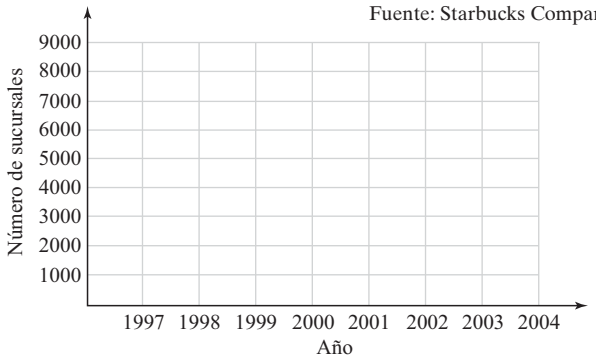


65. CAFÉ Construya una gráfica lineal que use los datos de la tabla.

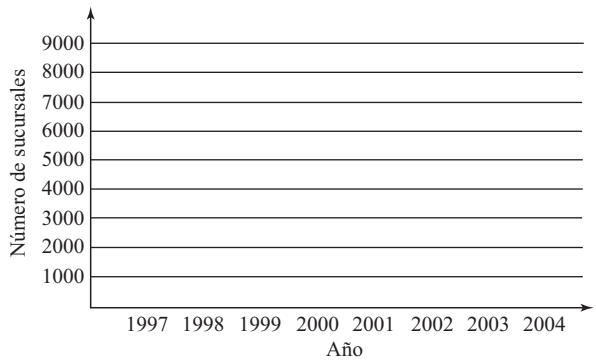
SUCURSALES DE STARBUCKS

Año	Número
1997	1412
1998	1886
1999	2135
2000	3501
2001	4709
2002	5886
2003	7225
2004	8337

Fuente: Starbucks Company



66. CAFÉ Construya una gráfica de barras que use los datos de la tabla de arriba.



67. Complete los cheques escribiendo la cantidad en palabras en la línea adecuada.

a.

No. 201 — 9 de marzo de 20 05

Páguese a Davis Chevrolet $ 15 601.00

_____ DÓLARES

Don Smith

45-365-02

b.

No. 7890 — 12 de agosto de 20 05

Páguese a Dr. Anderson $ 3433.00

_____ DÓLARES

Juan Decito

45-828-02

68. ANUNCIOS Un estilo que se usa cuando se imprimen invitaciones formales y anuncios es escribir todos los números en palabras. Use este estilo para escribir las frases siguientes.

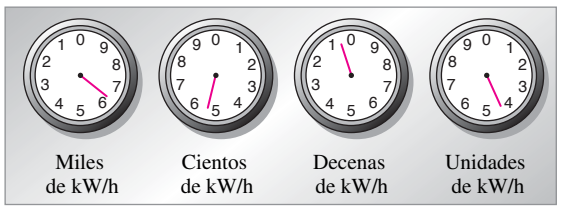
a. Este diploma se otorgó el 27 de junio de 2005.

b. La donación sugerida por quien solicita los fondos es $850 por plato, o una mesa completa se puede comprar por $5250.

69. EDICIÓN Edite este extracto de un texto de historia encerrando todos los números escritos en palabras y rescribiéndolos usando dígitos.

Abraham Lincoln fue electo con un total de un millón ochocientos sesenta y cinco mil quinientos noventa y tres votos — cuatrocientos ochenta y dos mil ochocientos ochenta más que Stephen Douglas quien quedó en segundo lugar. Fue asesinado tras haber estado en el cargo un total de mil quinientos tres días. El discurso de Lincoln en Gettysburg, de tan sólo doscientas sesenta y nueve palabras, lo dio en el campo de batalla donde hubo cuarenta y tres mil cuatrocientas cuarenta y nueve bajas.

70. LECTURA DE MEDIDORES La cantidad de electricidad que se usa en un hogar se mide en kilowatts-hora (kW/h). Determine la lectura del medidor mostrado abajo. (Cuando la aguja esté entre dos números lea el número menor.)



71. VELOCIDAD DE LA LUZ La velocidad de la luz en el vacío es 299 792 458 metros por segundo. Redondee este número

a. hasta la centena más cercana de miles de metros por segundo.

b. hasta el millón más cercano de metros por segundo.

72. NUBES Dibuje una recta numérica vertical con una escala de 0 a 40 000 pies en unidades de 5000 pies. Realice una gráfica de cada tipo de nube dado en la tabla de la columna siguiente a la altitud apropiada.

Tipo de nube	Altitud (pies)
Altocúmulos	21 000
Cirrocúmulos	37 000
Cirros	38 000
Cumulonimbos	15 000
Cúmulos	8000
Estratocúmulos	9000
Estratos	4000

POR ESCRITO

73. Explique por qué los números naturales se llaman números para contar.

74. Explique cómo redondearía 687 hasta la decena más cercana.

75. Las casas en una nueva subdivisión se les pone precio "en los 130 bajos". ¿Qué significa esto?

76. Un millón son mil millares. Explique por qué es así.

77. Muchos infomerciales de televisión ofrecen al espectador formas creativas de lograr un ingreso de seis cifras. ¿Qué es un ingreso de seis cifras? ¿Cuáles son el menor y el mayor de los ingresos de seis cifras?

78. ¿Qué número cardinal está asociado con las palabras siguientes?

dúo	década	grande	tanto de cuatro
docena	trío	siglo	un par

1.2 Suma de números cardinales

• Propiedades de la suma • Suma de números cardinales con más de un dígito • El perímetro de un rectángulo y un cuadrado • Suma de números cardinales usando una calculadora

Dominando la suma de números cardinales se pueden resolver muchos problemas. Por ejemplo, para encontrar la distancia alrededor de un rectángulo necesitamos sumar las longitudes de los cuatro lados del rectángulo. Para preparar un presupuesto anual necesitamos sumar los ítems en líneas distintas. Para encontrar el costo de una camisa y de un par de pantalones debemos sumar sus costos.

Propiedades de la suma

Sumar números cardinales corresponde a combinar conjuntos de objetos. Por ejemplo, si un conjunto de cuatro objetos se combina con un conjunto de 5 objetos, tenemos un conjunto de 9 objetos.

Conjunto de 4 objetos | Conjunto de 5 objetos | Conjunto de 9 objetos

★★★★ ★★★★★ ★★★★★★★★★

Combinamos estos dos conjuntos para obtener este conjunto

Esto corresponde a la suma

$4 + 5 = 9$ Léase "4 más 5 igual a 9".

En esta suma a 4 y a 5 se les llama **sumandos** o **términos** y a 9 se le llama **suma o total**. Esta suma a menudo se muestra en formato vertical.

$$\begin{array}{r} 4 \leftarrow \text{Sumando} \\ +5 \leftarrow \text{Sumando} \\ \hline 9 \leftarrow \text{Suma} \end{array}$$

Si combinamos los conjuntos en orden opuesto obtendremos el mismo resultado.

Conjunto de 5 objetos
Conjunto de 4 objetos
Conjunto de 9 objetos
Combinamos estos dos conjuntos
para obtener este conjunto

Esto corresponde a la suma

$$5 + 4 = 9 \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$$

Léase "5 más 4 igual a 9"

Estos ejemplos ilustran que dos números se pueden sumar en cualquier orden para dar la misma suma. Esta propiedad se llama **propiedad conmutativa de la suma**.

Propiedad conmutativa de la suma

El orden en que se suman los números cardinales no cambia la suma. Por ejemplo,

$$6 + 5 = 5 + 6$$

La tabla 1.1 resume las sumas básicas.

- Para encontrar la suma de 6 y 8 usando la tabla buscamos la intersección de la fila que empieza con **6** y la columna encabezada por **8**. La suma es 14.
- Para encontrar la suma de 8 y 6 buscamos la intersección de la fila que empieza con **8** y la columna encabezada por **6**. De nuevo, la suma es 14.

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	**0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	**12**	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	**16**	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	**18**

TABLA 1.1

Notamos que las respuestas en la tabla arriba de la diagonal en negritas son idénticas a las respuestas bajo la diagonal. Esto ilustra que la suma es conmutativa.

EJEMPLO 1

Encuentre las sumas: **a.** $3 + 6$, **b.** $5 + 7$, **c.** $8 + 9$, y **d.** $9 + 5$.

Solución

a. $3 + 6 = 9$ **b.** $5 + 7 = 12$

c. $8 + 9 = 17$ **d.** $9 + 5 = 14$

Autoevaluación 1

Encuentre las sumas: **a.** $6 + 7$ y **b.** $7 + 4$.

Respuestas **a.** 13, **b.** 11

Para encontrar la suma de tres números naturales sumamos dos de ellos y luego sumamos la suma al tercer número. En los ejemplos siguientes sumamos $3 + 4 + 7$ de dos maneras. Usaremos los símbolos de agrupación ( ), llamados **paréntesis** para mostrarlo. Es una práctica estándar hacer las operaciones dentro de los paréntesis primero.

Método 1: Agrupe 3 y 4

$(\mathbf{3 + 4}) + 7 = \mathbf{7} + 7$ Por los paréntesis sume 3 y 4 primero para obtener 7.

$= 14$ Luego sume 7 y 7 para obtener 14.

Método 2: Agrupe 4 y 7

$3 + (\mathbf{4 + 7}) = 3 + \mathbf{11}$ Por los paréntesis sume 4 y 7 para obtener 11.

$= 14$ Luego sume 3 y 11 para obtener 14.

De cualquier forma la suma es 14. No importa cómo agrupemos o asociemos los números en la suma. Esta propiedad se llama **propiedad asociativa de la suma**.

Propiedad asociativa de la suma

La forma en que se agrupen los números naturales no afecta su suma. Por ejemplo,

$$(2 + 5) + 4 = 2 + (5 + 4)$$

EJEMPLO 2

Encuentre las sumas: **a.** $(5 + 7) + 8$ y **b.** $5 + (7 + 8)$.

Solución

a. $(\mathbf{5 + 7}) + 8 = \mathbf{12} + 8$ Haga la suma dentro de los paréntesis primero: $5 + 7 = 12$.

$= 20$ Haga la suma.

b. $5 + (\mathbf{7 + 8}) = 5 + \mathbf{15}$ Haga la suma dentro de los paréntesis primero: $7 + 8 = 15$.

$= 20$ Haga la suma.

Autoevaluación 2

Encuentre las sumas: **a.** $4 + (6 + 3)$ y **b.** $(4 + 6) + 3$.

Respuestas **a.** 13, **b.** 13

Siempre que sumemos 0 a un número natural el número no cambia. Esta propiedad se llama **propiedad aditiva del 0.**

Propiedad aditiva del 0

La suma de cualquier número natural y 0 es ese número natural. Por ejemplo,

$$3 + 0 = 3, \quad 5 + 0 = 5, \quad \text{y} \quad 0 + 9 = 9$$

Autoevaluación 3
Encuentre las sumas: **a.** 7 + (3 + 0) y **b.** (8 + 5) + 0.

Respuestas **a.** 10, **b.** 13

EJEMPLO 3

Encuentre las sumas: **a.** (5 + 0) + 3 y **b.** 0 + (3 + 9).

Solución

a. (**5 + 0**) + 3 = **5** + 3 Haga la suma dentro de los paréntesis primero: 5 + 0 = 5.
= 8 Haga la suma.

b. 0 + (**3 + 9**) = 0 + **12** Haga la suma dentro de los paréntesis primero: 3 + 9 = 12.
= 12 Haga la suma.

Suma de números cardinales con más de un dígito

Podemos sumar números mayores que 10 usando un formato vertical. Simplemente sumamos los números en cada columna correspondiente. Si la suma de los números en cualquier columna excede de 9 tenemos que acarrear.

Autoevaluación 4
Sume: 131 + 232 + 221 + 312.

EJEMPLO 4

Sume: 421 + 123 + 245.

Solución Escribimos los dígitos en un formato vertical con los dígitos de las unidades en una columna, los dígitos de las decenas en otra columna y los dígitos de las centenas en otra columna. Empezamos a la derecha y sumamos los dígitos de las unidades, luego los dígitos de las decenas y finalmente los dígitos de las centenas.

Columna de las centenas
Columna de las decenas
Columna de las unidades

```
  4 2 1
  1 2 3
+ 2 4 5
  7 8 9
```

A esto se le llama formato vertical.

Suma de los dígitos de las unidades
Suma de los dígitos de las decenas
Suma de los dígitos de las centenas

Respuesta 896

La suma es 789.

Autoevaluación 5
Sume: 35 + 47.

EJEMPLO 5

Sume: 27 + 15.

Solución Escribimos los dígitos en formato vertical con los dígitos de las unidades en una columna y los dígitos de las decenas en otra columna. Empezamos por sumar los dígitos en la columna de las unidades: 7 + 5 = 12. Como 12 = 1 decena + 2 unidades escribimos 2 en la columna de las unidades de la respuesta y llevamos 1 a la columna de las decenas.

```
  ¹
  2 7
+ 1 5
  --
  2
```

Sume los dígitos en la columna de las unidades: 7 + 5 = 12. Lleve 1 a la columna de las decenas.

Luego sumamos los dígitos en la columna de las decenas

```
  ¹
  2 7
+ 1 5
  ---
  4 2
```

Sume los dígitos en la columna de las decenas: 1 + 2 + 1 = 4. Coloque el resultado 4 en la columna de las decenas en la respuesta.

Respuesta 82

La suma es 42.

EJEMPLO 6 Sume: 9835 + 692 + 7275.

Solución Escribimos los dígitos en formato vertical con sus dígitos correspondientes alineados. Luego sumamos los números una columna a la vez.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 9835 \\ 692 \\ +7275 \\ \hline 2 \end{array}$$

Sume los dígitos de la columna de las unidades: 5 + 2 + 5 = 12. Escriba 2 en la columna de las unidades de la respuesta y lleve 1 a la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,1} \\ 9835 \\ 692 \\ +7275 \\ \hline 02 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las decenas: 1 + 3 + 9 + 7 = 20. Escriba 0 en la columna de las decenas de la respuesta y lleve 2 a la columna de las centenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\,1} \\ 9835 \\ 692 \\ +7275 \\ \hline 802 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de las centenas: 2 + 8 + 6 + 2 = 18. Escriba 8 en la columna de las centenas de la respuesta y lleve 1 a la columna de los millares.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\,1} \\ 9835 \\ 692 \\ +7275 \\ \hline 17802 \end{array}$$

Sume los dígitos en la columna de los millares: 1 + 9 + 7 = 17. Escriba 7 en la columna de los millares de la respuesta y escriba 1 en la columna de las decenas de millares.

La suma es 17 802.

Para comprobar si el resultado en el ejemplo 6 es razonable, podemos redondear los sumandos y **estimar** la respuesta: 9835 es poco menos de 10 000. De la misma forma 692 es un poco menos que 700 y 7275 es un poco mayor que 7000. Podemos estimar que la respuesta sería cerca de 10 000 + 700 + 7000 = 17 700. Por tanto, el resultado 17 802 parece razonable. (Estudiaremos la estimación con más detalle más adelante en este capítulo.)

Autoevaluación 6
Sume: 675 + 1497 + 527.
Después compruebe el resultado usando estimación.

Respuesta 2699

Palabras como *incremento, ganancia, crédito, arriba, adelante, aumento, en el futuro* y *a la derecha de* se usan para indicar suma.

EJEMPLO 7 Cálculo de temperaturas. Al mediodía la temperatura en Helena, Montana era 31°. A la 1:00 PM la temperatura se había incrementado 5°, y a las 2:00 PM había subido otros 7°. Encuentre la temperatura a las 2:00 PM.

Solución A la temperatura del mediodía le sumamos los dos incrementos.

$$31 + 5 + 7$$

Las dos sumas se hacen trabajando de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} \mathbf{31 + 5} + 7 &= \mathbf{36} + 7 \\ &= 43 \end{aligned}$$

La temperatura a las 2:00 PM era 43°.

Autoevaluación 8
En 1700 las poblaciones de las cuatro colonias eran: New Hampshire 5000, New York 19 100, Massachusetts 55 900 y Virginia 58 600. Encuentre la población total.

Respuesta 138 600

EJEMPLO 8 **Historia.** La población de cuatro colonias norteamericanas en 1630 se muestra en la figura 1.5. Encuentre la población total.

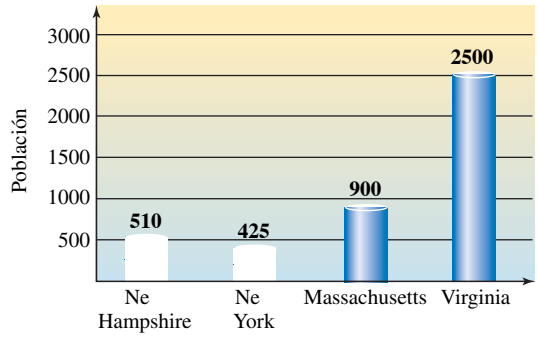


FIGURA 1.5

Solución La palabra *total* indica que debemos sumar las poblaciones de las colonias.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ 510 \\ 425 \\ 900 \\ +2500 \\ \hline 4335 \end{array}$$

Haga que coincidan los números en forma vertical. Sume los dígitos, una columna a la vez. Trabaje de derecha a izquierda.

La población total era 4335.

El perímetro de un rectángulo y un cuadrado

La figura 1.6(a) es un ejemplo de una figura de cuatro lados llamada **rectángulo**. Cualquiera de los lados más largos de un rectángulo se llama su **longitud** y cualquiera de sus lados más cortos se llama su **anchura**. Juntos, largo y ancho, se llaman **dimensiones** del rectángulo. Para cualquier rectángulo los lados opuestos miden lo mismo.

Cuando los cuatro lados de un rectángulo miden lo mismo le llamamos cuadrado al **rectángulo**. Un ejemplo de un cuadrado se muestra en la figura 1.6(b).

Un rectángulo **Un cuadrado**

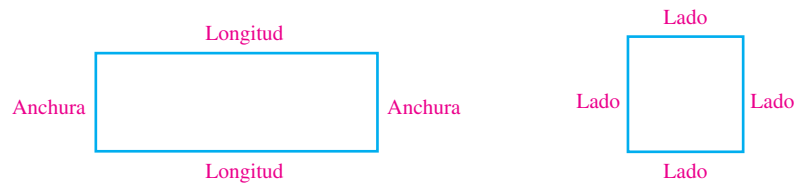


FIGURA 1.6

La distancia alrededor de un rectángulo o un cuadrado se llama **perímetro**. Para encontrar el perímetro de un rectángulo sumamos las longitudes de sus cuatro lados.

$$\text{Perímetro de un rectángulo} = \text{longitud} + \text{longitud} + \text{anchura} + \text{anchura}$$

Para encontrar el perímetro de un cuadrado sumamos las longitudes de sus cuatro lados.

$$\text{Perímetro de un cuadrado} = \text{lado} + \text{lado} + \text{lado} + \text{lado}$$

EJEMPLO 9 **Perímetros.** Encuentre el perímetro del billete de un dólar que se muestra en la figura 1.7.

Solución Para encontrar el perímetro del billete de forma rectangular sumamos las longitudes de sus cuatro lados.

mm significa milímetros

FIGURA 1.7

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 2} \\ 156 \\ 156 \\ 65 \\ +\ 65 \\ \hline 442 \end{array}$$

El perímetro es 442 mm.

Para ver si el resultado es razonable estimamos la respuesta. Como el rectángulo es más o menos 150 mm por 70 mm su perímetro es aproximadamente 150 + 150 + 70 + 70 = 440 mm. Una respuesta de 442 mm es razonable.

Autoevaluación 9
Un tablero del juego Monopolio es un cuadrado con lados de 19 pulgadas de largo. Encuentre el perímetro del tablero.

Respuesta 76 pulg

Suma de números cardinales usando una calculadora

Producción de vehículos — INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

En 2003 Japón produjo 8 487 065 automóviles de pasajeros y 1 665 612 camiones nuevos. Para encontrar el número total de automóviles y camiones que produjo Japón ese año debemos sumar 8 487 065 + 1 665 612. Podemos hacer la suma usando una calculadora introduciendo

8487065 [+] 1665612 [=] 10152677

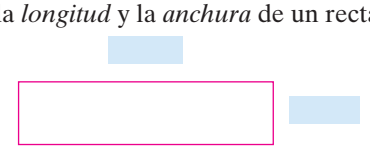
El número total de automóviles y camiones que produjo Japón en 2003 fue 10 152 677.

Sección 1.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Los números que se van a sumar se llaman _____.
2. Cuando dos números se suman el resultado se llama _____.
3. La figura de la izquierda es un ejemplo de un _____. La figura de la derecha es un ejemplo de un _____.

4. Señale la *longitud* y la *anchura* de un rectángulo.



5. Juntos, la longitud y la anchura de un rectángulo se llaman sus _____.
6. Cuando todos los lados de un rectángulo miden lo mismo le llamamos _____.
7. La propiedad que garantiza que podemos sumar dos números en cualquier orden se llama propiedad _____ de la suma.
8. La propiedad que nos permite agrupar números en una suma de la forma que queramos se llama propiedad _____ de la suma.
9. La distancia alrededor de un rectángulo se llama _____.
10. Para comprobar si el resultado de una suma es razonable podemos redondear los sumandos y _____ la respuesta.

CONCEPTOS *¿Qué propiedad de la suma es la que se muestra?*

11. $3 + 4 = 4 + 3$

12. $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$

13. $7 + (8 + 2) = (7 + 8) + 2$

14. $(8 + 5) + 1 = 1 + (8 + 5)$

15. $(3 + 5) + 2 = (5 + 3) + 2$

16. $(6 + 5) + 3 = 6 + (5 + 3)$

17. Llene el espacio: Cualquier número sumado a ____ permanece igual.

18. Al evaluar $(12 + 8) + 5$, ¿qué suma debe hacerse primero?

NOTACIÓN *Llene los espacios.*

19. Los símbolos ( ) se llaman _____.

20. El signo + significa _____.

Exprese los hechos siguientes en palabras.

21. $33 + 12 = 45$

22. $28 + 22 = 50$

Complete la solución.

23. $(36 + 11) + 5 = \square + 5$
$= 52$

24. $12 + (15 + 2) = 12 + \square$
$= 29$

PRÁCTICA *Haga las sumas.*

25. $25 + 13$

26. $47 + 12$

27. $156 + 305$

28. $647 + 38$

29. $(95 + 16) + 39$

30. $832 + (97 + 27)$

31. $25 + (321 + 17)$

32. $(4231 + 213) + 5234$

33. $\begin{array}{r} 76 \\ +45 \\ \hline \end{array}$

34. $\begin{array}{r} 87 \\ +56 \\ \hline \end{array}$

35. $\begin{array}{r} 93 \\ +47 \\ \hline \end{array}$

36. $\begin{array}{r} 59 \\ +65 \\ \hline \end{array}$

37. $\begin{array}{r} 632 \\ +347 \\ \hline \end{array}$

38. $\begin{array}{r} 423 \\ +570 \\ \hline \end{array}$

39. $\begin{array}{r} 1372 \\ +\ 613 \\ \hline \end{array}$

40. $\begin{array}{r} 2477 \\ +\ 693 \\ \hline \end{array}$

41. $\begin{array}{r} 6427 \\ +3573 \\ \hline \end{array}$

42. $\begin{array}{r} 3567 \\ +8778 \\ \hline \end{array}$

43. $\begin{array}{r} 8539 \\ +7368 \\ \hline \end{array}$

44. $\begin{array}{r} 5799 \\ +6879 \\ \hline \end{array}$

45. $\begin{array}{r} 1246 \\ 578 \\ +\ 37 \\ \hline \end{array}$

46. $\begin{array}{r} 4689 \\ 3422 \\ +\ 26 \\ \hline \end{array}$

47. $\begin{array}{r} 3156 \\ 1578 \\ +\ 578 \\ \hline \end{array}$

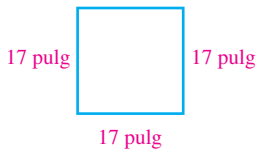
48. $\begin{array}{r} 2379 \\ 4779 \\ +2339 \\ \hline \end{array}$

Encuentre el perímetro de los rectángulos o cuadrados.

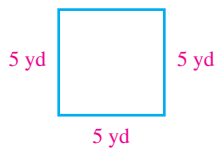
49.

50.

51.

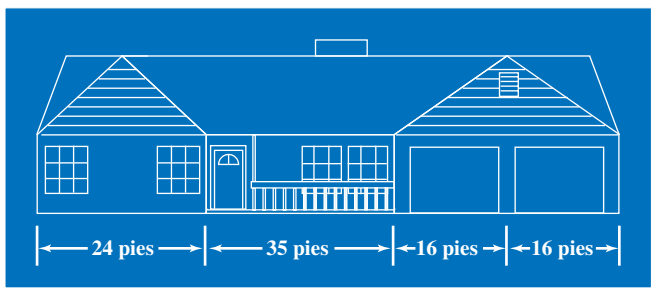


52.



APLICACIONES

53. DIMENSIONES DE UNA CASA Encuentre la longitud de la casa mostrada en el plano.



54. GRADUADOS Durante el primer año de este siglo se graduaron en preparatorias norteamericanas 18 549 muchachos y 25 182 muchachas. Encuentre el número total de graduados.

55. GALLETAS En 2002-2003 las dos marcas de galletas con mayores ventas fueron Oreos, con ventas por $449 772 768, y Chips Ahoy, con ventas de $317 724 064. ¿De cuánto fueron sus ventas combinadas?

56. VIAJE ESPACIAL El primer viaje del astronauta Walter Schirra orbitó la Tierra 6 veces y duró 9 horas. Su segundo viaje orbitó la Tierra 16 veces y duró 26 horas. ¿Cuánto tiempo estuvo Schirra en el espacio?

57. IMPORTACIONES La tabla de abajo muestra el número de automóviles nuevos de pasajeros importados a Estados Unidos desde varios países en 2003. Encuentre la cantidad total de automóviles que EU importaron de estos países.

País	Número de automóviles de pasajeros
Canadá	1 811 892
Alemania	561 482
Japón	1 770 355
México	680 214
Corea del Sur	692 863
Suecia	119 773
Reino Unido	207 158

Fuente: Oficina del Censo, División de Comercio Exterior

58. INVERSIONES Un estudiante poseía las siguientes acciones: Microsoft, 250; GE, 175 y Verizon, 312. ¿Cuántas acciones tenía el estudiante?

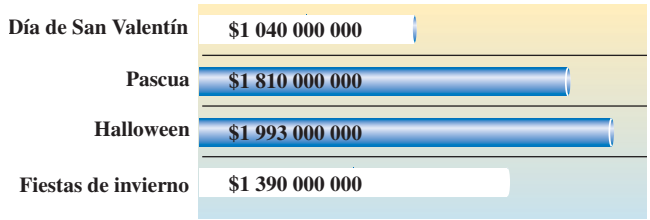
59. DEDUCCIONES DE IMPUESTOS Con fines de impuestos, una mujer anotó los registros de millaje mostrados en la tabla. Encuentre el número total de millas que manejó.

Mes	Millas manejadas
Enero	2345
Febrero	1712
Marzo	1778
Abril	445
Mayo	1003
Junio	2774

60. PRESUPUESTOS El jefe de un departamento en una compañía preparó un presupuesto anual con los gastos que se muestran. Encuentre el número de dólares proyectados para gastarse.

Gastos	Cantidad
Equipo	$17 242
Utilerías	5 443
Viajes	2 775
Suministros	10 553
Desarrollo	3 225
Mantenimiento	1 075

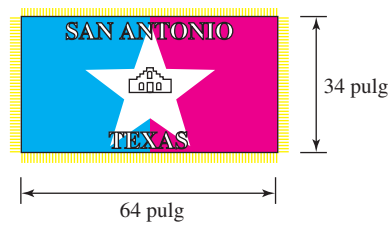
61. DULCES La gráfica de abajo muestra las ventas de dulces en EU en 2003 durante cuatro periodos festivos. Encuentre la suma de estas ventas estacionales de dulces.



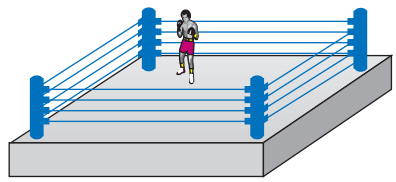
Fuente: Asociación Nacional de Reposteros

62. BANCOS Una cuenta de ahorros contiene $3712. ¿Cuánto habrá en la cuenta después de depositar $4673, $3237 y $7635?

63. BANDERAS Para decorar la bandera de una ciudad se le va a coser una franja amarilla como se muestra. La franja se vende por pulgadas. ¿Cuántas pulgadas de franja se deben comprar para completar el proyecto?



64. CUADRILÁTEROS DE BOXEO ¿Cuánta cuerda acolchada se necesita para hacer un cuadrilátero de boxeo de 24 pies por lado?



POR ESCRITO

65. Explique por qué la operación de suma es conmutativa.

66. Explique por qué la operación de suma es asociativa.

REPASO *Escriba cada numeral en notación expandida.*

67. 3125

68. 60 037

Redondee 6 354 784 a la cifra indicada.

69. Hasta la decena más cercana

70. Hasta la centena más cercana

71. Hasta la decena de millares más cercana

72. Hasta la centena de millares más cercana

1.3 Resta de números cardinales

- Resta de números cardinales
- Resta de números cardinales con más de un dígito
- Comprobación de restas
- Resta de números cardinales usando una calculadora
- Operaciones mixtas

Cuando hayamos dominado la resta de números cardinales podemos resolver más problemas de ciencia, negocios y de otros campos. Por ejemplo, para encontrar la diferencia entre dos temperaturas, las restamos. Para encontrar la ganancia de un negocio restamos los gastos de los ingresos. Para encontrar el precio de un automóvil restamos el descuento de su precio normal.

Resta de números cardinales

La resta de números cadinales determina cuántos objetos quedan después de que algunos objetos se han quitado de un conjunto. Por ejemplo, si empezamos con un conjunto de 9 objetos y le quitamos 4 objetos nos quedamos con un conjunto de 5 objetos.

Esto corresponde a la siguiente resta

$9 - 4 = 5$ Léase como: "9 menos 4 es igual a 5".

En esta resta a 9 se le llama "**minuendo**", a 4 se le llama "**sustraendo**" y a 5 se le llama "**diferencia**". La resta a menudo se muestra en un formato vertical.

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\,4 \\ \hline 5 \end{array}$$

← Minuendo
← Sustraendo
← Diferencia

Con números cardinales no podemos restar en el orden opuesto y encontrar la diferencia $4 - 9$ porque no podemos quitarle 9 objetos a 4 objetos. Como la resta de números cardinales no se puede hacer en cualquier orden, la operación de resta no es conmutativa.

La resta tampoco es asociativa porque si agrupamos números en formas distintas obtenemos resultados distintos. Por ejemplo,

$(\mathbf{9 - 5}) - 1 = \mathbf{4} - 1 = 3$ pero $9 - (\mathbf{5 - 1}) = 9 - \mathbf{4} = 5$

Autoevaluación 1
Encuentre las diferencias:
a. $7 - 3$ **b.** $9 - 2$
c. $8 - (5 - 2)$ **d.** $(8 - 5) - 2$

Respuestas **a.** 4, **b.** 7, **c.** 5, **d.** 1

EJEMPLO 1 Encuentre las diferencias: **a.** $9 - 3$, **b.** $8 - 5$, **c.** $9 - (6 - 3)$, y **d.** $(9 - 6) - 3$.

Solución

a. $9 - 3 = 6$

b. $8 - 5 = 3$

c. $9 - (\mathbf{6 - 3}) = 9 - \mathbf{3}$ Haga la resta dentro de los paréntesis primero: $6 - 3 = 3$.
$= 6$ Haga la resta.

d. $(\mathbf{9 - 6}) - 3 = \mathbf{3} - 3$ Haga la resta dentro de los paréntesis primero: $9 - 6 = 3$.
$= 0$ Haga la resta.

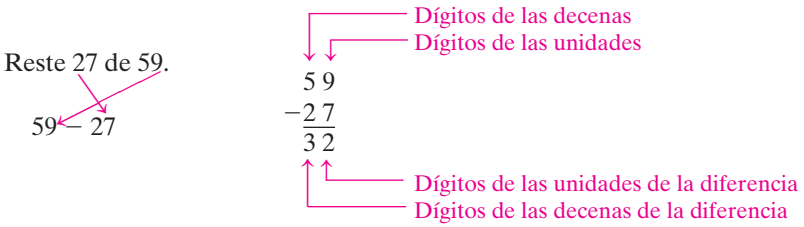
Resta de números cardinales con más de un dígito

Podemos restar números mayores que 10 usando un formato vertical. Simplemente restamos los números en las columnas correspondientes. Cuando debamos restar un dígito mayor de uno menor, necesitamos *pedir*.

EJEMPLO 2 Reste 27 de 59.

Solución El número a ser restado es 27. Cuando lo traducimos en símbolos matemáticos debemos invertir el orden en que aparecen 27 y 59 en la oración.

Para hacer la resta podemos escribir los dígitos en un formato vertical con los dígitos de las unidades en una columna y los dígitos de las decenas en una columna. Luego restamos los dígitos de las unidades y restamos los dígitos de las decenas.



La diferencia es 32.

Autoevaluación 2
Reste 32 de 68.

Respuesta 36

EJEMPLO 3 Reste 15 de 32.

Solución Esta oración se traduce como: 32 − 15. Escribimos los dígitos en un formato vertical con los dígitos alineados en sus columnas correspondientes.

$$\begin{array}{r} 3\,2 \\ -1\,5 \\ \hline \end{array}$$

Como 5 no se puede restar de 2 pedimos 1 decena de la columna de las decenas que llevamos reagrupadas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\;{\scriptstyle 12} \\ \not{3}\;\not{2} \\ -1\;\;5 \\ \hline \mathbf{7} \end{array}$$

Para restar en la columna de las unidades, reagrupamos 1 decena a la columna de las decenas y sumamos el 10 a la columna de las unidades del minuendo, dando 12. Luego restamos 12 − 5 = 7.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\;{\scriptstyle 12} \\ \not{3}\;\not{2} \\ -\mathbf{1}\;\;5 \\ \hline \mathbf{1}\;\;7 \end{array}$$

Reste en la columna de las decenas.

Por tanto, 32 − 15 = 17.

Autoevaluación 3
Reste 36 de 63.

Respuesta 27

EJEMPLO 4 Encuentre: 2021 − 576.

Solución Escribimos los dígitos en un formato vertical con sus dígitos correspondientes alineados.

$$\begin{array}{r} 2\,0\,2\,1 \\ -\;\;5\,7\,6 \\ \hline \end{array}$$

Autoevaluación 4
Encuentre 2021 − 1445.

Para restar en la columna de las unidades reagrupamos 1 decena de la columna de las decenas y la sumamos a la columna de las unidades para tener 11 en la columna de las unidades. Luego restamos: $11 - 6 = 5$.

$$\begin{array}{r} 2\,0\,\overset{1}{\not 2}\,\overset{11}{\not 1} \\ -\;\;5\;7\;\;6 \\ \hline \qquad\quad 5 \end{array}$$

Como no se puede restar 7 de 1 en la columna de las decenas, tenemos que reagrupar. Como hay un 0 en la columna de las centenas del minuendo, tenemos que pedir de la columna de los millares.

$$\begin{array}{r} 1\;\overset{9}{\not 1}\overset{11}{\not 0}\,\not 1\;11 \\ \not 2\;\not 0\;\not 2\;\not 1 \\ -\;\;5\;7\;6 \\ \hline \qquad 4\;5 \end{array}$$

Para restar en la columna de las decenas reagrupamos 1 millar de la columna de los millares y la escribimos como 10 centenas en la columna de las centenas. Pida 1 centena de la columna de las centenas y piénsela como 10 decenas. Sume estas 10 decenas a la decena que está a la izquierda en la columna de las decenas para tener 11 decenas. Luego reste: $11 - 7 = 4$.

$$\begin{array}{r} 1\;\overset{9}{\not 1}\overset{11}{\not 0}\,\not 1\;11 \\ \not 2\;\not 0\;\not 2\;\not 1 \\ -\;\;5\;7\;6 \\ \hline \quad 4\;4\;5 \end{array}$$

Reste en la columna de las centenas: $9 - 5 = 4$.

$$\begin{array}{r} 1\;\overset{9}{\not 1}\overset{11}{\not 0}\,\not 1\;11 \\ \not 2\;\not 0\;\not 2\;\not 1 \\ -\;\;5\;7\;6 \\ \hline 1\;4\;4\;5 \end{array}$$

Reste en la columna de los millares: $1 - 0 = 1$.

La diferencia es 1445.

Para ver que el resultado en el ejemplo 4 es razonable, podemos redondear el minuendo y el sustraendo y estimar la respuesta: 2021 es un poco más que 2000, y 576 es un poco menos que 600. Podemos estimar la respuesta que sería cerca de $2000 - 600 = 1400$. Por tanto, el resultado parece razonable.

Respuesta 576

Comprobación de restas

Hemos introducido la operación de resta como un proceso de quitar.

$9 - 4 = 5$ o $\begin{array}{r} 9 \\ -\,4 \\ \hline 5 \end{array}$ significa "a 9 quítale 4 igual a 5".

También podemos pensar en la resta como lo opuesto a la suma.

$9 - 4 = 5$ o $\begin{array}{r} 9 \\ -\,4 \\ \hline 5 \end{array}$ significa "¿Qué le tengo que sumar a 4 para que me dé 9?" La respuesta es 5.

Esto nos da una forma de comprobar las restas. Si una resta se hace correctamente, la suma de la diferencia y del sustraendo siempre será igual al minuendo. Por ejemplo, para comprobar la resta del ejemplo 4 sumamos la diferencia (1445) al sustraendo (576) y vemos que la suma es el minuendo (2021).

$$\begin{array}{rl} 2021 & \leftarrow \text{Minuendo} \\ -\;\underline{576} & \leftarrow \text{Sustraendo} \\ 1445 & \leftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} \overset{1\,1\,1}{1445} \\ +\;\;576 \\ \hline 2021 \end{array}$$

EJEMPLO 5 Compruebe la resta:

$$\begin{array}{r} 3682 \\ -1954 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Solución Verificamos que 1728 + 1954 = 3682.

$$\begin{array}{r} 1728 \\ +1954 \\ \hline 3682 \end{array}$$

La respuesta es correcta.

Autoevaluación 5
Determine si la resta es correcta mediante una suma:

$$\begin{array}{r} 9784 \\ -4792 \\ \hline 4892 \end{array}$$

Respuesta incorrecta

Palabras como *menos, decrecer, pérdida, débito, abajo, hacia atrás, caída, reducción*, *en el pasado* y *a la izquierda* indican resta.

EJEMPLO 6 **Colisiones de vehículos.** En 2000 el número de colisiones de tráfico de vehículos de motor en Estados Unidos fue 6 394 000. Ese número disminuyó en 2001 hasta 71 000. En 2002 cayó otros 7000 adicionales. ¿Cuántas colisiones de tráfico de vehículos de motor hubo en 2002?

Solución Las palabras *bajando* y *cayó* indican resta. Podemos mostrar los cálculos necesarios para resolver este ejemplo en una sola expresión como se muestra abajo. Las dos restas se hacen trabajando de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} \textbf{6 394 000} - 71\,000 - 7000 &= \textbf{6 323 000} - 7000 \\ &= 6\,316\,000 \end{aligned}$$

En 2002 hubo 6 316 000 colisiones de tráfico de vehículos de motor en Estados Unidos.

Autoevaluación 6
De acuerdo con la Asociación de la Industria de la Grabación de Norteamérica en 2001 los fabricantes enviaron al mercado 881 900 000 CDs. Ese número declinó en 2002 bajando 78 600 000. En 2003 cayó en 57 400 000 adicionales. ¿Cuántos CDs se produjeron en 2003?

Respuesta 745 900 000

Resta de números cardinales usando una calculadora

Para responder a preguntas sobre *cuánto más* o *cuántos más* se puede usar la resta.

Deportes de preparatoria

INSTANTÁNEA DE USO DE LA CALCULADORA

En 2004 el número de muchachos que participaron en los deportes de escuela superior fue 4 038 253 y el número de muchachas que participaron fue 2 865 299. Para determinar cuántos muchachos más que muchachas participaron debemos restar 4 038 253 − 2 865 299. Podemos hacer esta resta usando una calculadora introduciendo

4038253 [−] 2865299 [=]

1172954

En 2004 vemos que 1 172 954 más muchachos que muchachas de escuela superior participaron en los deportes.

Operaciones mixtas

A menudo aparecen en el mismo problema sumas y restas. Es importante leer el problema cuidadosamente, localizar la información útil y organizarla correctamente.

Autoevaluación 7
Una acción de la corporación ABC cuesta $75. El precio cayó $7 por acción. Sin embargo, se recuperó y aumentó $13 por acción. ¿Cuál es su precio actual?

Respuesta $81

EJEMPLO 7 **Pasajeros de autobús.** Veintisiete personas viajaban en un autobús en la ruta 47. En la parada de la Calle Siete, 16 pasajeros bajaron y 5 subieron. ¿Cuántos pasajeros quedaron en el autobús?

Solución La ruta y el número de la calle no tienen importancia. La frase *se bajaron del autobús* indica resta y la frase *subieron* indica suma. El número de pasajeros en el autobús se puede encontrar calculando $27 - 16 + 5$.

$$\begin{aligned} \mathbf{27 - 16} + 5 &= \mathbf{11} + 5 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Quedaron 16 pasajeros en el autobús.

COMENTARIO Cuando se hace el cálculo en el ejemplo 7 debemos hacer la resta primero. Si la suma se hace primero, obtenemos la respuesta incorrecta, 6. Para expresiones que contienen suma y resta las hacemos en el orden que aparecen *de izquierda a derecha*.

$$\begin{aligned} 27 - 16 + 5 &= 27 - 21 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Sección 1.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Al resultado de una resta se le llama _____.
2. En una resta siempre se resta al _____ del minuendo.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

3. La resta es lo opuesto de la _____.
4. La resta $7 - 3 = 4$ se relaciona con la suma $\square + \square = \square$.
5. Cuando una expresión contiene tanto sumas como restas hacemos las operaciones como aparezcan de _____ a _____.
6. La operación de _____ se puede usar para comprobar el resultado de una resta.

NOTACIÓN *Llene los espacios.*

7. El símbolo menos $(-)$ significa _____. El símbolo más $(+)$ significa _____.
8. Exprese el hecho en palabras:

$$28 - 22 = 6$$

9. Traduzca la oración siguiente en símbolos matemáticos: Reste 30 de 83.
10. Complete la solución:

$$\begin{aligned} 36 - 11 + 5 &= \square + 5 \\ &= \square \end{aligned}$$

PRÁCTICA *Compruebe las restas con una suma.*

11. $\begin{array}{r} 29 \\ -17 \\ \hline 12 \end{array}$

12. $\begin{array}{r} 325 \\ -237 \\ \hline 78 \end{array}$

13. $\begin{array}{r} 453 \\ -327 \\ \hline 136 \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 2698 \\ -1569 \\ \hline 1129 \end{array}$

Haga las restas.

15. $17 - 14$
16. $42 - 31$
17. $39 - 14$
18. $45 - 32$
19. $174 - 71$
20. $257 - 155$
21. $416 - 357$
22. $787 - 696$
23. $\begin{array}{r} 367 \\ -343 \\ \hline \end{array}$
24. $\begin{array}{r} 224 \\ -122 \\ \hline \end{array}$
25. $\begin{array}{r} 423 \\ -305 \\ \hline \end{array}$
26. $\begin{array}{r} 330 \\ -270 \\ \hline \end{array}$

27. 1537 − 579

28. 2470 − 863

29. 4267 − 2578

30. 7356 − 3578

31. 17 246 − 6 789

32. 34 510 − 27 593

33. 15 700 − 15 397

34. 35 021 − 23 999

35. 67 305 − 23 746

36. 93 001 − 35 002

37. 29 307 − 10 008

38. 40 012 − 19 045

39. Reste 199 de 301.

40. Reste78 de 2047.

41. Reste 249 de 50 009.

42. Reste 198 de 20 020.

Haga las operaciones.

43. 633 − 598 − 30

44. 600 − 497 − 60

45. 852 − 695 + 40

46. 397 − 348 + 65

47. 120 + 30 − 40

48. 600 + 99 − 54

APLICACIONES

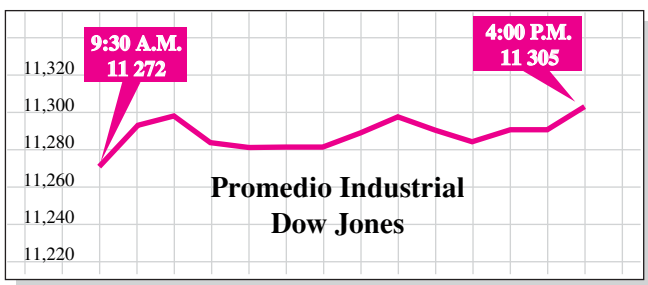
49. JARDINERÍA Beverly plantó 27 semillas pero sólo 21 de ellas sobrevivieron. ¿Cuántas semillas murieron?

50. VENTAS AL RETAIL Phil vendió 42 tostadoras el viernes, 7 más de las que vendió el lunes. ¿Cuántas vendió el lunes?

51. TRANSPORTES Por un viaje de 17 millas Wanda pagó al chofer del taxi $23. Si fueron $5 de propina, ¿cuánto pagó por la tarifa?

52. REVISTAS *MTV Guía* tuvo una circulación anual reciente de 16 929 260. ¿En cuánto excedió a la circulación de *Reader's Digest* que tuvo 16 566 650 lectores?

53. PROMEDIO DEL DOW JONES ¿Cuánto aumentó el Dow en el día descrito en la gráfica?



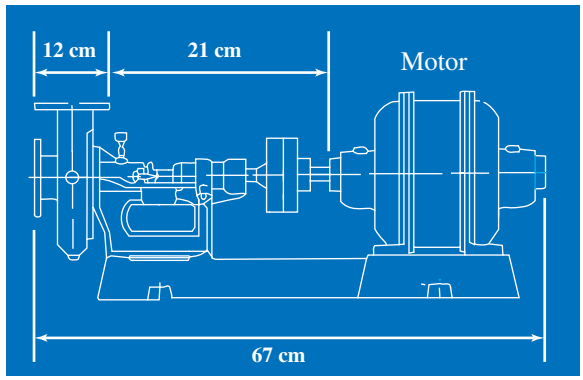
54. ORFEBRERÍA El oro se funde a cerca de 1947° F. El punto de fusión de la plata es 183° F menor. ¿Cuál es el punto de fusión de la plata?

55. BANCOS Una cuenta de ahorros tenía $370. Después de un depósito de $40 y de un retiro de $197, ¿cuánto quedó en la cuenta?

56. VIAJES Una estudiante quiere hacer un viaje de 2221 millas en tres días. Si maneja 751 millas el primer día y 875 millas el segundo día, ¿cuánto debe manejar el tercer día?

57. REVISTAS La circulación mensual de la revista *Motor Trend* en el año 2001 fue de 1 272 053. En el 2002, la circulación mensual creció 11 207. En 2003 la circulación mensual disminuyó por 20 230. ¿Cuál fue la circulación mensual de la revista en el año 2003?

58. LONGITUD DE UN MOTOR Encuentre la longitud de un motor en la máquina que se muestra en el plano.



Refiérase a la tabla siguiente. Para usar esta escala salarial note que un maestro con tres años de experiencia y con 15 unidades de cursos más que el grado de bachillerato gana $30 887 anuales (Paso 3/Columna 2).

59. ¿Cuánto más ganará anualmente una maestra que ahora está en Paso 2/Columna 2 cuando haya ganado un año de experiencia?

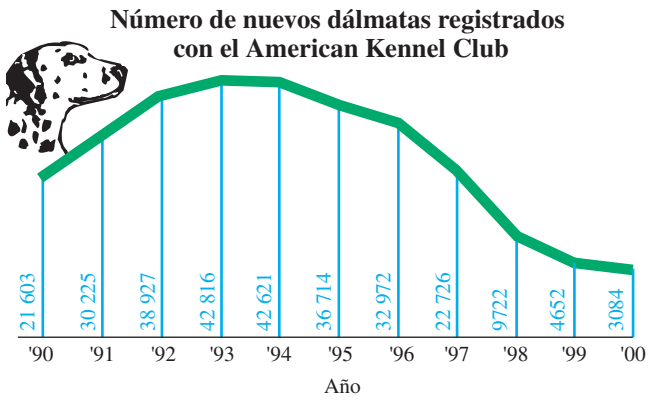
60. ¿Cuánto más ganará anualmente un maestro que actualmente está en Paso 4/Columna 2 si lleva suficientes cursos para moverse a la Columna 3?

ESCALA SALARIAL PARA MAESTROS
DISTRITO ESCOLAR UNIFICADO ABC

Años de experiencia	Columna 1: (bach)	Columna 2: (bach + 15)	Columna 3: (bach + 30)
Paso 1	$26 785	$28 243	$29 701
Paso 2	$28 107	$29 565	$31 023
Paso 3	$29 429	$30 887	$32 345
Paso 4	$30 751	$32 209	$33 667
Paso 5	$32 073	$33 531	$34 989

61. DÁLMATAS Véase la gráfica en la página siguiente. ¿Cuántos dálmatas menos se registraron en 2000 comparados con el año en el que estuvieron al máximo de su popularidad?

62. DÁLMATAS Véase la gráfica de abajo. ¿Entre qué par de años hubo la mayor caída de registros? ¿De cuánto fue la caída?



POR ESCRITO

63. Explique por qué la operación de resta no es conmutativa.

64. Elabore una lista de cinco palabras que indiquen resta.

65. Explique cómo se puede usar una suma para comprobar una resta.

66. El símbolo $\neq$ significa no es igual a. Muestre que

$$(20 - 8) - 5 \neq 20 - (8 - 5)$$

Explique por qué hemos acordado hacer siempre las restas de izquierda a derecha.

REPASO *Redondee 5 370 645 hasta la cifra indicada.*

67. La decena más cercana

68. La centena más cercana

69. El millar más cercano

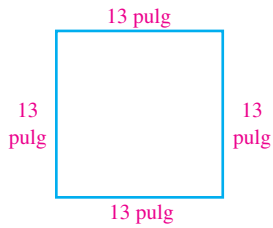
70. La decena de millar más cercana

71. La centena de millar más cercana

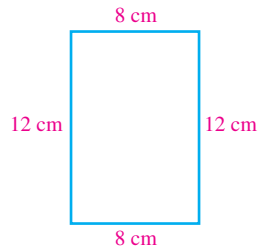
72. El millón más cercano

Encuentre el perímetro del cuadrado y del rectángulo.

73.



74.



cm significa centímetros

Haga las sumas.

75.
$$\begin{array}{r} 345 \\ 672 \\ +513 \\ \hline \end{array}$$

76.
$$\begin{array}{r} 813 \\ 487 \\ +654 \\ \hline \end{array}$$

1.4 Multiplicación de números cardinales

• Propiedades de la multiplicación • Multiplicación de números cardinales por números de un dígito • Multiplicación por potencias de 10 • Multiplicación de números cardinales por números con más de un dígito • Cómo encontrar el área de un rectángulo • Multiplicación de números cardinales usando una calculadora

Nuestras herramientas para resolver problemas se vuelven más efectivas cuando aprendemos a multiplicar números cardinales. Esta operación nos permite encontrar áreas de figuras geométricas y resolver problemas de negocios. Por ejemplo, para encontrar el área de un rectángulo necesitamos multiplicar su longitud por su anchura. Para llenar una nómina necesitamos multiplicar el número de horas trabajadas por la paga por hora.

Propiedades de la multiplicación

Podemos usar tres símbolos para indicar multiplicación.

Símbolos usados para la multiplicación

Símbolo		Ejemplo
$\times$	símbolo por	4×5 o 12×234
$\cdot$	punto elevado	$4 \cdot 5$ o $117 \cdot 225$
( )	paréntesis	$(4)(5)$ o $4(5)$ o $(4)5$

La multiplicación es una suma repetida. Por ejemplo, 4×5, $4 \cdot 5$, y $4(5)$ todos significan la suma de cuatro 5's.

$$4 \times 5 = 4 \cdot 5 = 4(5) = \overbrace{5 + 5 + 5 + 5}^{\text{Suma de cuatro 5's}} = 20$$

En la multiplicación de arriba el resultado 20 se llama **producto**. Los números que se multiplican (4 y 5) se llaman **factores**.

$$\begin{array}{cccc} \text{Factor} & \text{Factor} & & \text{Producto} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 4 & \cdot\ 5 & = & 20 \end{array}$$

La multiplicación a menudo se muestra en formato vertical.

$$\begin{array}{rl} 5 & \leftarrow \text{Factor} \\ \times\ 4 & \leftarrow \text{Factor} \\ \hline 20 & \leftarrow \text{Producto} \end{array}$$

Las multiplicaciones 5×4, $5 \cdot 4$, y $5(4)$ todas significan la suma de cinco 4's.

$$5 \times 4 = 5 \cdot 4 = 5(4) = \overbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}^{\text{Suma de cinco 4's}} = 20$$

Hemos visto que $4 \cdot 5 = 20$ y $5 \cdot 4 = 20$. Los resultados son iguales. Este ejemplo ilustra que el orden en el que multipliquemos dos números no afecta el resultado. Esta propiedad se llama **propiedad conmutativa de la multiplicación**.

Propiedad conmutativa de la multiplicación

El orden en el que se multipliquen números cardinales no afecta su producto. Por ejemplo,

$$4 \times 6 = 6 \times 4, \qquad 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7, \qquad \text{y} \qquad 7(8) = 8(7)$$

La tabla 1.2 en la página siguiente resume las multiplicaciones principales.

- Para encontrar el producto de 6 y 8 usando la tabla, buscamos la intersección de la fila que empieza con 6 y la columna encabezada por 8. El producto es 48.
- Para encontrar el producto de 8 y 6 usando la tabla, buscamos la intersección de la fila que empieza con 8 y la columna encabezada por 6. El producto es 48.

Sería bueno que memorizara esta tabla si todavía no lo hace.

De la tabla vemos que siempre que multipliquemos un número por 0 el producto es 0. Por ejemplo,

$$0 \cdot 5 = 0, \qquad 0 \cdot 8 = 0, \qquad \text{y} \qquad 9 \cdot 0 = 0$$

Vemos también que siempre que multipliquemos un número por 1 el número no cambia. Por ejemplo,

$$3 \cdot 1 = 3, \qquad 7 \cdot 1 = 7, \qquad \text{y} \qquad 1 \cdot 9 = 9$$

Estos ejemplos sugieren las propiedades de multiplicación de 0 y de 1.

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**

TABLA 1.2

Notamos que las respuestas en la tabla de arriba de la diagonal en negritas son idénticas a las respuestas bajo la diagonal. Esto ilustra que la multiplicación es conmutativa.

Propiedades de multiplicación de 0 y de 1

El producto de cualquier número cardinal y 0 es 0.

El producto de cualquier número cardinal y 1 es ese número cardinal.

Los problemas que involucran suma repetida a menudo se resuelven más fácilmente usando multiplicación.

Autoevaluación 1
Con un salario por hora de $8, ¿cuánto ganará un chofer de autobús escolar si trabaja de 8:00 AM al mediodía?

Respuesta $32

EJEMPLO 1 **Cálculo de salario.** Raúl trabajó una jornada de 8 horas con un salario por hora de $9. ¿Cuánto dinero ganó?

Solución Por cada una de las 8 horas Raúl ganó $9. Su paga total del día es la suma de ocho 9's: $9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9$. Esta suma repetida se puede calcular con multiplicación.

$$\begin{aligned} \text{Salario total} &= 8 \cdot 9 \\ &= 72 \end{aligned}$$ Vea la tabla de multiplicación.

Raúl ganó $72.

Para multiplicar tres números primero multiplicamos dos de ellos y luego multiplicamos el resultado por el tercer número. En los ejemplos siguientes multiplicamos $3 \cdot 2 \cdot 4$ de dos maneras. Los paréntesis nos muestran cuál multiplicación hacer primero.

Método 1: Agrupe 3 · 2

$(\mathbf{3 \cdot 2}) \cdot 4 = \mathbf{6} \cdot 4$ Multiplique 3 y 2 para obtener 6.

$= 24$ Luego multiplique 6 y 4 para obtener 24.

Método 2: Agrupe 2 · 4

$3 \cdot (\mathbf{2 \cdot 4}) = 3 \cdot \mathbf{8}$ Multiplique 2 y 4 para obtener 8.

$= 24$ Luego multiplique 3 y 8 para obtener 24.

Las respuestas son las mismas. Esto ilustra que cambiar la agrupación cuando se multiplican números no afecta el resultado. Esta propiedad se llama **propiedad asociativa de la multiplicación**.

Propiedad asociativa de la multiplicación

La forma en que se agrupen los números naturales no afecta su producto. Por ejemplo,

$$(4 \cdot 3) \cdot 2 = 4 \cdot (3 \cdot 2)$$

Multiplicación de números cardinales por números de un dígito

Para encontrar el producto $8 \cdot 47$ es inconveniente sumar ocho 47's. En su lugar encontramos el producto usando un proceso de multiplicación.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

Escriba los factores en una columna con los dígitos correspondientes alineados verticalmente.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ \ } \\ 4\,\mathbf{7} \\ \times\ \ \mathbf{8} \\ \hline \mathbf{6}\ \ \end{array}$$

Multiplique 7 por 8. El producto es 56. Coloque un 6 en la columna de las unidades de la respuesta y lleve 5 a la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ \ } \\ \mathbf{4}\,7 \\ \times\ \ \mathbf{8} \\ \hline \mathbf{3\,7}\,6 \end{array}$$

Multiplique 4 por 8. el producto es 32. A los 32 súmeles los 5 que llevó para obtener 37. Coloque el 7 en la columna de las decenas de la respuesta y el 3 en la columna de las centenas.

El producto es 376.

EJEMPLO 2 Un automóvil puede viajar 32 millas con un galón de gasolina. ¿Cuántas millas puede viajar el automóvil con 3 galones de gasolina?

Solución Cada uno de los tres galones de gasolina permite viajar al automóvil 32 millas. La distancia total que puede viajar el automóvil es la suma de tres 32's: $32 + 32 + 32$. Esto se puede calcular multiplicando.

$$3 \cdot 32 = 96$$

Con 3 galones de gasolina el automóvil puede viajar 96 millas.

Autoevaluación 2
¿Cuánto puede viajar el automóvil con 8 galones de gasolina?

Respuesta 256 millas

Multiplicación por potencias de 10

Los números 1, 10, 100, 1000, 10 000, y así sucesivamente, se llaman **potencias de 10** porque cada uno es diez veces el previo. La tabla 1.3 muestra varios productos que involucran 10, 100, 1000 y 10 000.

$1 \cdot 10 = \mathbf{10}$	$1 \cdot 100 = \mathbf{100}$	$1 \cdot 1000 = \mathbf{1000}$	$1 \cdot 10\,000 = \mathbf{10\,000}$
$2 \cdot 10 = \mathbf{20}$	$2 \cdot 100 = \mathbf{200}$	$2 \cdot 1000 = \mathbf{2000}$	$2 \cdot 10\,000 = \mathbf{20\,000}$
$3 \cdot 10 = \mathbf{30}$	$3 \cdot 100 = \mathbf{300}$	$3 \cdot 1000 = \mathbf{3000}$	$3 \cdot 10\,000 = \mathbf{30\,000}$
$4 \cdot 10 = \mathbf{40}$	$4 \cdot 100 = \mathbf{400}$	$4 \cdot 1000 = \mathbf{4000}$	$4 \cdot 10\,000 = \mathbf{40\,000}$
$5 \cdot 10 = \mathbf{50}$	$5 \cdot 100 = \mathbf{500}$	$5 \cdot 1000 = \mathbf{5000}$	$5 \cdot 10\,000 = \mathbf{50\,000}$

TABLA 1.3

Los resultados en la tabla muestran que cada producto es un número natural que termina con uno o más ceros. Este hecho hace fácil multiplicar un número por una potencia de 10. Por ejemplo,

Para multiplicar 14 por 1**0**, simplemente agregamos un cero a la derecha de 14: $14 \cdot 10 = 14\mathbf{0}$.

Para multiplicar 14 por 1**00**, simplemente agregamos dos ceros a la derecha de 14: $14 \cdot 100 = 14\mathbf{00}$.

Para multiplicar 14 por 1**000**, simplemente agregamos tres ceros a la derecha de 14: $14 \cdot 1000 = 14\,\mathbf{000}$.

Para multiplicar 14 por 10 **000**, simplemente agregamos cuatro ceros a la derecha de 14: $14 \cdot 10\,000 = 140\,\mathbf{000}$.

Estos ejemplos sugieren la regla siguiente.

Multiplicación por potencias de 10

Para encontrar el producto de un número natural por una potencia de 10:

1. Determine cuántos ceros hay en la potencia de 10.
2. Agregue ese número de ceros al lado derecho del número natural.

Autoevaluación 3

Encuentre los productos:

a. $25 \cdot 100$

b. $875(1000)$

Respuestas **a.** 2500, **b.** 875 000

EJEMPLO 3

Encuentre los productos: **a.** $63 \cdot 10$, **b.** $45 \cdot 100$, y **c.** $912(10\,000)$.

Solución

a. $63 \cdot 10 = 630$ Como 10 tiene un cero agregue un 0 después de 63.

b. $45 \cdot 100 = 4500$ Como 100 tiene dos ceros agregue dos ceros después de 45.

c. $912(10\,000) = 9\,120\,000$ Como 10 000 tiene cuatro ceros agregue cuatro ceros después de 912.

Podemos manejar ceros de manera semejante en multiplicaciones que no involucren potencias de 10. Por ejemplo, para encontrar el producto de 43 y 500 podemos escribir 500 como $5 \cdot 100$ y encontrar el producto $43 \cdot 5 \cdot 100$.

$43 \cdot 5 \cdot 100 = 215 \cdot 100$ Encuentre el producto de 43 y 5.

$= 21\,500$ Como 100 tiene dos ceros, agregue dos ceros después de 215.

Autoevaluación 4

Encuentre los productos:

a. $15 \cdot 300$

b. $315 \cdot 2000$

Respuestas **a.** 4500, **b.** 630 000

EJEMPLO 4

Encuentre los productos: **a.** $67 \cdot 20$ y **b.** $45 \cdot 40\,000$.

Solución

a. $67 \cdot \mathbf{20} = 67 \cdot \mathbf{2 \cdot 10}$ Escriba 20 como $2 \cdot 10$.

$= 134 \cdot 10$ Multiplique: $67 \cdot 2 = 134$.

$= 1340$ Como 10 tiene un cero agregue un cero después de 134.

b. $45 \cdot \mathbf{40\,000} = 45 \cdot \mathbf{4 \cdot 10\,000}$ Escriba 40 000 como $4 \cdot 10\,000$.

$= 180 \cdot 10\,000$ Multiplique: $45 \cdot 4 = 180$.

$= 1\,800\,000$ Como 10 000 tiene cuatro ceros agregue cuatro ceros después de 180.

Multiplicación de números cardinales por números con más de un dígito

Para encontrar el producto 23 · 435 usamos el proceso de multiplicación. Como 23 = 20 + 3, multiplicamos 435 por 20 y por 3 y sumamos los productos.

$$\begin{array}{r} 435 \\ \times\ 23 \\ \hline \end{array}$$

Escriba los factores en una columna con los dígitos correspondientes alineados verticalmente.

Empezamos multiplicando 435 por 3.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ } \\ 43\mathbf{5} \\ \times\ 2\mathbf{3} \\ \hline \mathbf{5} \end{array}$$

Multiplique 5 por 3. El producto es 15. Coloque 5 en la columna de las unidades y lleve 1 a la columna de las decenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ 4\mathbf{3}5 \\ \times\ 2\mathbf{3} \\ \hline 05 \end{array}$$

Multiplique 3 por 3. El producto es 9. Al 9 súmele 1 llevado para obtener 10. Coloque el 0 en la columna de las decenas y lleve 1 a la columna de las centenas.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ \mathbf{4}35 \\ \times\ 2\mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1}\mathbf{3}05 \end{array}$$

Multiplique 4 por 3. El producto es 12. Sume 12 con el 1 llevado para obtener 13. Escriba 13.

Continuamos multiplicando 435 por 2 decenas o sea 20.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ } \\ 43\mathbf{5} \\ \times\ \mathbf{2}3 \\ \hline 1305 \\ \mathbf{0} \end{array}$$

Multiplique 5 por 2. El producto es 10. Escriba 0 en la columna de las decenas y lleve 1.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ } \\ 4\mathbf{3}5 \\ \times\ \mathbf{2}3 \\ \hline 1305 \\ \mathbf{7}0 \end{array}$$

Multiplique 3 por 2. El producto es 6. Sume 6 con el 1 llevado para obtener 7. Escriba 7. No hay nada qué llevar.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ } \\ \mathbf{4}35 \\ \times\ \mathbf{2}3 \\ \hline 1305 \\ \mathbf{8}70 \end{array}$$

Multiplique 4 por 2. El producto es 8. No hay nada que haya llevado para sumar. Escriba 8.

$$\begin{array}{r} 435 \\ \times\ 23 \\ \hline 1305 \\ 870 \\ \hline 10005 \end{array}$$

Dibuje otra línea bajo las dos filas completas. Sume los números en las dos filas. Esta suma da el producto de 435 y 23.

Por tanto, 23 · 435 = 10 005.

Para comprobar que el resultado en el ejemplo previo es razonable podemos redondear y estimar la respuesta: 435 es un poco menos que 450 y 23 es un poco más que 20. Podemos estimar la respuesta como aproximadamente 450 · 20 = 900. Una respuesta de 10 005 es razonable.

Autoevaluación 5
Encuentre el producto: 706 (350).

Respuesta 247 100

EJEMPLO 5

Encuentre los productos: **a.** 253 · 406 y **b.** 2007(1006).

Solución

a.
$$\begin{array}{r} 253 \\ \times 406 \\ \hline 1518 \\ 000 \\ 1012 \\ \hline 102718 \end{array}$$

Multiplique: 6 · 253 = 1518. Haga que coincida el 8 en la columna de las unidades.
Multiplique: 0 · 253 = 0. Haga que coincida el cero que está en el extremo derecho en la columna de las decenas.
Multiplique: 4 · 253 = 1012. Haga que coincida el 2 en la columna de las centenas.
Sume columna por columna.

El producto es 102 718

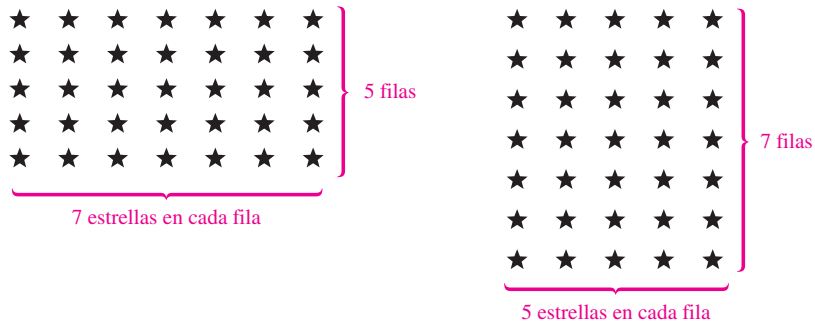
b.
$$\begin{array}{r} 2007 \\ \times 1006 \\ \hline 12042 \\ 0000 \\ 0000 \\ 2007 \\ \hline 2019042 \end{array}$$

Multiplique: 6 · 2007 = 12 042. Haga que coincida el 2 en la columna de las unidades.
Multiplique : 0 · 2007 = 0. Haga que conicida el cero que está en el extremo derecho en la columna de las decenas.
Multiplique : 0 · 2007 = 0. Haga que coincida el cero más a la derecha en la columna de las centenas.
Multiplique : 1 · 2007 = 2007. Haga que coincida el 7 en la columna de los millares.
Sume columna por columna.

El producto es 2 019 042.

Podemos usar la multiplicación para contar objetos arreglados en patrones rectangulares. Por ejemplo, la ilustración siguiente en la izquierda muestra un arreglo rectangular que consiste de 5 filas de 7 estrellas. El producto 5 · 7 o 35 indica el número total de estrellas.

Como la multiplicación es conmutativa el arreglo de la derecha que consiste de 7 filas de 5 estrellas contiene el mismo número de estrellas.



Autoevaluación 6
En un monitor de color cada pixel puede ser rojo, verde o azul. ¿Cuántos pixeles de color controla la computadora?

Respuesta 1 440 000

EJEMPLO 6 Ciencia de la computación.

Para dibujar gráficos en una pantalla de computadora, una computadora controla cada *pixel* (punto en la pantalla). Vea la figura 1.8. Si una imagen gráfica de computadora es de 800 pixeles de ancho y 600 pixeles de alto, ¿cuántos pixeles controla la computadora?

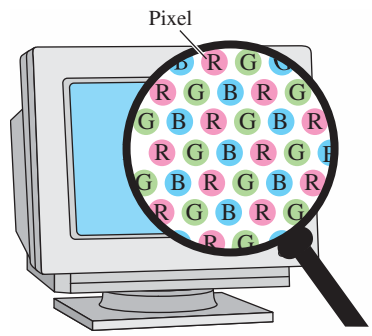


FIGURA 1.8

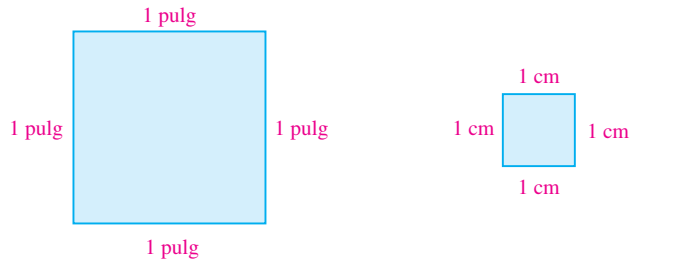
Solución La imagen gráfica es un arreglo rectangular de pixeles. Cada una de sus 600 filas consiste de 800 pixeles. El número total de pixeles es el producto de 600 y 800.

600 · 800 = 480 000 Esto se puede escribir también como 600(800).

La computadora controla 480 000 pixeles.

Cómo encontrar el área de un rectángulo

Una aplicación importante de la multiplicación es encontrar el área de un rectángulo. El **área de un rectángulo** es la medida de la cantidad de superficie que encierra. El área se mide en unidades cuadradas tales como pulgadas cuadradas (denotadas como pulg^2) o centímetros cuadrados (denotados como cm^2). Vea la figura 1.9.



Una pulgada cuadrada (1 pulg^2) Un centímetro cuadrado (1 cm^2)

FIGURA 1.9

El rectángulo en la figura 1.10 tiene una longitud de 5 centímetros y una anchura de 3 centímetros. Como cada cuadrado pequeño cubre un área de un centímetro cuadrado cada cuadrado pequeño mide 1 cm^2. Los cuadrados pequeños forman un patrón rectangular con 3 filas de 5 cuadrados.

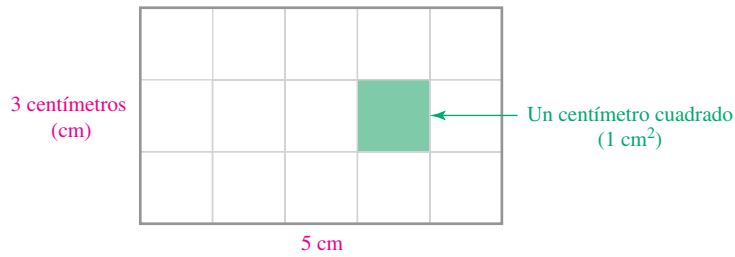


FIGURA 1.10

Como hay $5 \cdot 3$ o 15 cuadrados pequeños el área del rectángulo es 15 cm^2. Esto sugiere que el área de cualquier rectángulo es el producto de su longitud por su anchura.

$$\text{Área de un rectángulo} = \text{longitud} \cdot \text{anchura}$$

Podemos escribir esta fórmula de manera más simple usando la letra l para representar la longitud y la letra a para representar la anchura.

Área de un rectángulo

El área A de un rectángulo es el producto de la longitud del rectángulo, l, y de su anchura, a.

$$\text{Área} = (\text{longitud})(\text{anchura}) \quad \text{o} \quad A = l \cdot a$$

La fórmula $A = l \cdot a$ puede escribirse simplemente como $A = la$.

EJEMPLO 7 **Envoltura para regalo.** Cuando está completamente desenrollada una hoja de papel para envolver regalos tiene las dimensiones mostradas en la figura 1.11. ¿Cuántos pies cuadrados de envoltura para regalo hay en el rollo?

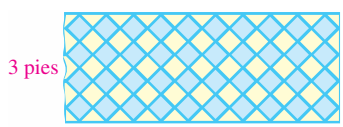


FIGURA 1.11

Autoevaluación 7
Encuentre el área de una hoja de papel de 9 pulgadas por 12 pulgadas.

Solución Para encontrar el número de pies cuadrados de papel necesitamos encontrar el área del rectángulo mostrado en la figura.

$A = l \cdot a$ Esta es la fórmula del área de un rectángulo.

$A = 12 \cdot 3$ Reemplace l con 12 y a con 3.

$= 36$ Haga la multiplicación.

Respuesta 108 pulg^2

Hay 36 pies cuadrados (pie^2) de papel para envolver en el rollo.

COMENTARIO Recuerde que el perímetro de un rectángulo es la distancia alrededor de él. El área de un rectángulo es la medida de la superficie que encierra.

Multiplicación de números cardinales usando una calculadora

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Cálculo de producción

La fuerza laboral de una empresa electrónica trabaja dos turnos de 8 horas diarias y fabrica 53 televisiones por hora. Para encontrar cuántos aparatos se fabricarán en 5 días debemos hallar el producto siguiente:

2 turnos por día, 8 horas por turno

$2 \cdot 8 \cdot 53 \cdot 5$

53 aparatos por hora, 5 días

Podemos usar una calculadora para evaluar $2 \cdot 8 \cdot 53 \cdot 5$ introduciendo estos números y oprimiendo estas teclas.

2 [×] 8 [×] 53 [×] 5 [=]

4240

Se fabricarán 4240 aparatos de televisión.

Sección 1.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. La multiplicación es una _____ repetida.
2. A los números que se van a multiplicar se les llama _____.
3. Al resultado de un problema de multiplicación se le llama _____.
4. La afirmación $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$ ilustra la propiedad _____ de la multiplicación.
5. La afirmación $(5 \cdot 4) \cdot 7 = 5 \cdot (4 \cdot 7)$ ilustra la propiedad _____ de la multiplicación.
6. Si un cuadrado mide 1 pulgada por lado su área es 1 _____ _____.
7. El _____ de un rectángulo es la medida de la cantidad de superficie que encierra.
8. Los números 1, 10, 100, 1000 y 10 000 se llaman _____ de 10.

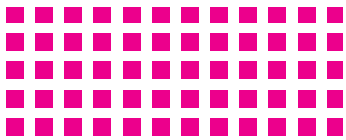
CONCEPTOS

9. Escriba las sumas repetidas como multiplicaciones.
   a. $8 + 8 + 8 + 8$
   b. $15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15$
10. Usando los números 2, 3 y 4 escriba un enunciado que ilustre la propiedad asociativa de la multiplicación.
11. Usando los números 5 y 8 escriba un enunciado que ilustre la propiedad conmutativa de la multiplicación.

12. ¿Cómo encontramos la cantidad de superficie encerrada por un rectángulo?

13. ¿Cuántos ceros se agregan a la derecha de 25 si multiplica 25 por 1000?

14. Encuentre un enunciado de multiplicación que encuentre el número de cuadrados rojos.



15. Determine si el concepto de *perímetro* o el de *área* debieran aplicarse para encontrar cada uno de los siguientes.

a. La cantidad de espacio en el piso para alfombrar.

b. La cantidad de vidrio transparente para ser entintado.

c. La cantidad de encaje necesario para ribetear un pañuelo.

16. Haga las multiplicaciones.

a. $1 \cdot 25$ **b.** $62(1)$

c. $10 \cdot 0$ **d.** $0(4)$

NOTACIÓN

17. Escriba tres símbolos que se usen para la multiplicación.

18. ¿Qué significa pie^2?

PRÁCTICA *Haga las multiplicaciones.*

19. $4 \cdot 7$ **20.** $7 \cdot 9$

21. $8 \cdot 7$ **22.** $9 \cdot 6$

23. $12 \cdot 7$ **24.** $15 \cdot 8$

25. 14×7 **26.** $19 \cdot 9$

27. $\begin{array}{r} 213 \\ \times\ 7 \end{array}$ **28.** $\begin{array}{r} 863 \\ \times\ 9 \end{array}$

29. $\begin{array}{r} 779 \\ \times\ 8 \end{array}$ **30.** $\begin{array}{r} 596 \\ \times\ 6 \end{array}$

Haga las multiplicaciones sin usar lápiz y papel ni calculadora.

31. $37 \cdot 100$ **32.** $63 \cdot 1000$

33. $75 \cdot 10$ **34.** $88 \cdot 10\,000$

35. $107(10\,000)$ **36.** $323(100)$

37. $512 \cdot 1000$ **38.** $673 \cdot 10$

39. $56 \cdot 200$ **40.** $83 \cdot 3000$

41. $315 \cdot 20$ **42.** $222 \cdot 5000$

43. $275(30)$ **44.** $110(3000)$

45. $202 \cdot 500$ **46.** $304 \cdot 300$

Haga las multiplicaciones.

47. $27 \cdot 12$ **48.** $35 \cdot 17$

49. $67(87)$ **50.** $58(86)$

51. $\begin{array}{r} 99 \\ \times 77 \end{array}$ **52.** $\begin{array}{r} 73 \\ \times 59 \end{array}$

53. $\begin{array}{r} 20 \\ \times 53 \end{array}$ **54.** $\begin{array}{r} 78 \\ \times 20 \end{array}$

55. $\begin{array}{r} 112 \\ \times\ 23 \end{array}$ **56.** $\begin{array}{r} 232 \\ \times\ 53 \end{array}$

57. $\begin{array}{r} 207 \\ \times\ 97 \end{array}$ **58.** $\begin{array}{r} 768 \\ \times\ 70 \end{array}$

59. $\begin{array}{r} 516 \\ \times 302 \end{array}$ **60.** $\begin{array}{r} 357 \\ \times 205 \end{array}$

61. $\begin{array}{r} 679 \\ \times 602 \end{array}$ **62.** $\begin{array}{r} 889 \\ \times 507 \end{array}$

63. $\begin{array}{r} 5619 \\ \times 3020 \end{array}$ **64.** $\begin{array}{r} 1376 \\ \times 2003 \end{array}$

65. $\begin{array}{r} 2978 \\ \times 3004 \end{array}$ **66.** $\begin{array}{r} 2003 \\ \times 5030 \end{array}$

67. $25 \cdot 32 \cdot 3$ **68.** $37 \cdot 45 \cdot 7$

69. $42 \cdot 64 \cdot 17$ **70.** $17 \cdot 49 \cdot 63$

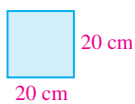
Encuentre el área de los rectángulos o cuadrados.

71.

72.

73.

74.



APLICACIONES

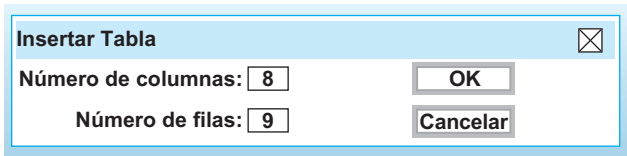
75. CÁLCULO DE SALARIOS Jennifer trabajó 12 horas a \$11 por hora. ¿Cuánto ganó?

76. CÁLCULO DE SALARIOS Manuel trabajó 23 horas a \$9 por hora. ¿Cuánto ganó?

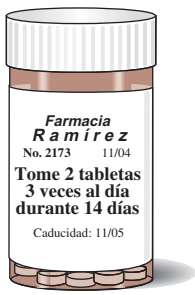
77. NUTRICIÓN Una dona rellena de natilla cubierta con chocolate Krispy Kreme tiene 17 gramos de grasa. ¿Cuántos gramos de grasa hay en total en una docena de estas donas?

78. RENTA DE APARTAMENTOS Mia tiene un edificio de apartamentos con 18 unidades. Cada unidad genera mensualmente un ingreso de $450. Encuentre su ingreso total mensual.

79. PROCESADOR DE TEXTO Un estudiante usó las opciones de *Insertar Tabla* que se muestran cuando escribía un informe. ¿Cuántos cuadros tendrá la tabla?



80. PREPARACIÓN DE RECETAS ¿Cuántas tabletas debiera poner el farmacéutico en el recipiente mostrado en la ilustración?



81. ASISTENCIA A CONCIERTOS Un cuarteto de jazz dio dos conciertos en cada una de 37 ciudades. Aproximadamente 1700 fanáticos asistieron a cada concierto. ¿Cuántas personas escucharon al grupo?

82. CEREAL Un fabricante de cereal anuncia que "hay dos tazas de pasitas en cada paquete". Encuentre el número de tazas de pasitas en una caja con 36 paquetes de cereal.

83. JUGO DE CHINA Se necesitan 13 chinas para llenar una lata de jugo de china. Encuentre el número de chinas usadas para hacer una caja de 24 latas.

84. CAPACIDAD DE SALA Un salón de conferencias de una universidad tiene 17 filas de 33 asientos. Un letrero en la pared dice: "Se prohíbe una ocupación de más de 570 personas". Si todos los asientos están ocupados y hay un instructor, ¿se están rompiendo las reglas de la universidad?

85. ELEVADORES Hay 14 personas en un elevador con capacidad de 2000 libras. Si el peso promedio de una persona en el elevador es 150 libras, ¿está sobrecargado el elevador?

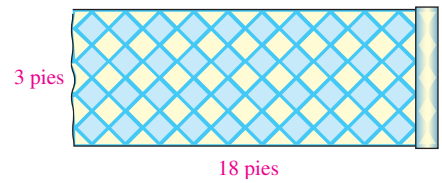
86. CAMBIO DE UNIDADES Hay 12 pulgadas en un pie. ¿Cuántas pulgadas hay en 80 pies?

87. MUSTANGS Las cifras de millaje de un Ford Mustang GT 2005 se muestran en la tabla. Si se maneja en la ciudad, ¿qué tanta distancia se puede recorrer con un tanque de gasolina?

Capacidad del tanque de combustible	16 galones
Consumo de combustible (millas por galón)	18 ciudad/ 23 autopista

88. MUSTANGS ¿Qué tan lejos puede llegar el Ford Mustang GT 2005 del ejercicio 87 con un tanque de gasolina cuando se maneja en autopista?

89. ENVOLTURA DE REGALOS Cuando se desenrolla por completo una hoja larga de papel de envoltura tiene las dimensiones que se muestran. ¿Cuántos pies cuadrados de envoltura de regalos hay en el rollo?



90. AVES ¿Cuántas veces por minuto bate las alas un colibrí?

91. ÁREA DE WYOMING El estado de Wyoming tiene una forma aproximadamente rectangular con dimensiones de 360 millas de largo y 270 millas de ancho. Encuentre su perímetro y su área.

92. COMPARACIÓN DE CUARTOS ¿Qué cuarto tiene mayor área, un cuarto rectangular de 14 por 17 pies o un cuarto cuadrado de 16 pies por lado? ¿Cuál tiene mayor perímetro?

93. TABLEROS DE AJEDREZ Un tablero de ajedrez consiste de 8 filas con 8 cuadrados cada una. ¿Cuántos cuadros hay en un tablero de ajedrez?

94. COMPARACIÓN DE COLCHONES Un colchón tamaño "queen size" mide 60 pulgadas por 80 pulgadas y un colchón tamaño "full size" mide 54 pulgadas por 75 pulgadas. ¿Qué tanta más superficie hay en un colchón "queen size"?

95. JARDINERÍA Un jardín rectangular tiene 27 pies de largo y 19 pies de ancho. Un camino en el jardín usa 125 pies cuadrados de espacio. ¿Cuántos pies cuadrados quedan para las plantas?

96. BASES PARA CARTELES Una base rectangular para carteles tiene dimensiones de 24 pulgadas por 36 pulgadas. Encuentre su área.

POR ESCRITO

97. Explique la diferencia entre 1 pie y 1 pie cuadrado.

98. Cuando se multiplican dos números el resultado es 0. ¿Qué podemos decir de los números?

REPASO

99. Considere el número 372 856. ¿Qué dígito está en la columna de las centenas?

100. Redondee 45 995 hasta el millar más cercano.

101. Sume: 357, 39 y 476.

102. DESCUENTOS Un radio que originalmente se vendía en $97 se ha rebajado a $75. ¿Cuántos dólares se han descontado?

1.5 División de números cardinales

- Propiedades de la división • División y cero • División corta • División larga
- Pruebas de divisibilidad • División de números cardinales que terminan con ceros
- División de números cardinales usando una calculadora

Podemos resolver más problemas una vez que hayamos aprendido a dividir números cardinales. El dominio de la división nos permitirá calcular cuántas millas puede recorrer un automóvil con un galón de gasolina o calcular el costo promedio de hacer negocios.

Propiedades de la división

Si $12 se distribuyen equitativamente entre 4 personas podemos dividir para ver que cada persona reciba $3.

$$4\overline{)12}\,\overline{3}$$

Se pueden usar tres símbolos para indicar división.

Símbolos usados para la división

Símbolo		Ejemplo		
$\div$	símbolo de división	$12 \div 4$	o	$1242 \div 23$
$\overline{\quad)}$	división larga	$4\overline{)12}$	o	$23\overline{)1242}$
——	barra de fracción	$\frac{12}{4}$	o	$\frac{1242}{23}$

En una división el número que se divide se llama **dividendo** y el número entre el cual dividimos se llama **divisor**. La respuesta se llama **cociente**.

$$\text{Dividendo} \div \text{divisor} = \text{cociente} \qquad \text{divisor}\overline{)\text{dividendo}}\,\overline{\text{cociente}} \qquad \frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

EJEMPLO 1 En cada parte identifique el dividendo, el divisor y el cociente:

a. $12 \div 4 = 3$, **b.** $6\overline{)54}\,\overline{9}$, y **c.** $\frac{72}{8} = 9$.

Solución

a. Dividendo → $12 \div 4 = 3$ ← Cociente
↑
Divisor

Autoevaluación 1
Identifique el dividendo, el divisor y el cociente en el enunciado: “36 dividido entre 9 es igual a 4”.

b. $\begin{array}{l} 9 \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 6\overline{)54} \leftarrow \text{Dividendo} \end{array}$

Respuesta El dividendo es 36, el divisor es 9 y el cociente es 4.

c. $\begin{array}{l} \text{Dividendo} \rightarrow \dfrac{72}{8} = 9 \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow \end{array}$

La división se puede pensar como una resta repetida. Para dividir 12 entre 4 preguntamos "¿cuántos 4's se pueden restar de 12?" Como se pueden restar exactamente tres 4's de 12 para obtener 0 sabemos que $12 \div 4 = 3$.

$$12 - \overbrace{4 - 4 - 4}^{\text{Tres 4's}} = 0$$

La división también está relacionada con la multiplicación. Por ejemplo, la división $\frac{12}{3}$ responde a la pregunta "¿por cuánto debo multiplicar 3 para obtener 12? Como la respuesta es 4

$\dfrac{12}{\mathbf{3}} = 4$ tiene las multiplicaciones relacionadas: $\mathbf{3} \cdot 4 = 12$ o $4 \cdot \mathbf{3} = 12$

De manera semejante,

$\dfrac{20}{\mathbf{5}} = 4$ tiene las multiplicaciones relacionadas: $\mathbf{5} \cdot 4 = 20$ o $4 \cdot \mathbf{5} = 20$

Autoevaluación 2

Escriba una multiplicación relacionada con $\dfrac{48}{6} = 8$.

Respuesta $6 \cdot 8 = 48$ u $8 \cdot 6 = 48$

EJEMPLO 2

Para cada división escriba una multiplicación relacionada:

a. $16 \div 8 = 2$ y **b.** $6\overline{)24}$.

Solución

a. $16 \div \mathbf{8} = 2$ tiene las multiplicaciones relacionadas $\mathbf{8} \cdot 2 = 16$ o $2 \cdot \mathbf{8} = 16$.

b. $\begin{array}{l} 4 \\ \mathbf{6}\overline{)24} \end{array}$ tiene las multiplicaciones relacionadas $\mathbf{6} \cdot 4 = 24$ o $4 \cdot \mathbf{6} = 24$.

División y cero

Consideramos ahora tres tipos de división que involucran al cero. En el primer caso examinamos una división de cero; en el segundo, una división entre cero y en el tercero, una división de cero entre cero.

Enunciado de la división	Enunciado de la multiplicación relacionada	Resultado
$\dfrac{0}{2} = \mathbf{?}$	$2 \cdot \mathbf{?} = 0$ ↑ Esto debe ser 0 si el producto es 0.	$\dfrac{0}{2} = \mathbf{0}$
$\dfrac{2}{0} = \mathbf{?}$	$0 \cdot \mathbf{?} = 2$ ↑ No hay número que dé 2 cuando se multiplique por 0	No hay cociente
$\dfrac{0}{0} = \mathbf{?}$	$0 \cdot \mathbf{?} = 0$ ↑ Cualquier número multiplicado por 0 da 0.	Cualquier número puede ser cociente

Vemos que $\frac{0}{2} = 0$. Como $\frac{2}{0}$ no tiene cociente decimos que la división de 2 entre 0 no está *definida*. Como $\frac{0}{0}$ puede ser cualquier número decimos que $\frac{0}{0}$ está *indeterminado*.

División con cero

1. El cociente de 0 dividido por cualquier número distinto de cero es 0. Por ejemplo, $\frac{0}{17} = 0$.
2. La división de cualquier número entre 0 no está definida. Por ejemplo, $\frac{17}{0}$ no está definida.
3. $\frac{0}{0}$ está indeterminada.

El ejemplo $\frac{12}{1} = 12$ ilustra que *cualquier número dividido entre 1 es el número mismo*. El ejemplo. $\frac{12}{12} = 1$ ilustra que *cualquier número distinto de cero dividido entre sí mismo es 1.*

Propiedades de la división

Cualquier número dividido entre 1 es ese número. Por ejemplo, $\frac{14}{1} = 14$.

Cualquier número distinto de cero dividido entre sí mismo es igual a 1. Por ejemplo, $\frac{14}{14} = 1$.

División corta

Podemos usar un proceso llamado **división corta** para dividir un número entre un divisor de un dígito.

EJEMPLO 3 Divida 246 entre 6.

Solución Primero escriba la división en la forma $6\overline{)246}$ y proceda como sigue: Como 6 no divide a 2 dividimos 24 entre 6.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 6\overline{)246} \end{array} \quad \frac{24}{6} = 4.$$ Escribimos el 4 en la columna de las decenas arriba del símbolo de división.

Luego dividimos 6 entre 6.

$$\begin{array}{r} 41 \\ 6\overline{)246} \end{array} \quad \frac{6}{6} = 1.$$ Escriba 1 en la columna de las unidades sobre el símbolo de división.

Podemos comprobar verificando que $6 \cdot 41 = 246$.

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times \quad 6 \\ \hline 246 \end{array}$$

Autoevaluación 3
Divida: $4\overline{)328}$.

Respuesta 82

Cuando una división no es exacta decimos que queda un **residuo**. Por ejemplo, $\frac{15}{5} = 3$, porque $5 \cdot 3 = 15$. Sin embargo, $\frac{16}{5} = 3$ y queda 1 porque $5 \cdot 3 + 1 = 16$. En el ejemplo siguiente queda un residuo.

EJEMPLO 4 Divida 168 entre 5.

Solución Primero escribimos la división en la forma $5\overline{)168}$ y procedemos como sigue: Como 5 no divide a 1 dividimos 16 entre 5.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5\overline{)16^{1}8} \end{array} \quad \frac{16}{5} = 3$$ y nos sobra 1. Ponemos ese uno enfrente del 8.

Autoevaluación 4
Divida: $7\overline{)169}$.

Luego dividimos 18 entre 5.

$$5\overline{)16^{1}8}\quad \frac{18}{5} = 3 \text{ y nos quedan 3. A este 3 se le llama residuo.}$$

Escribimos una R (de residuo) y el residuo 3 a la derecha del cociente.

$$5\overline{)16^{1}8}\ \text{R } 3$$

El resultado es un cociente de 33 con un residuo de 3. Podemos comprobar los cálculos verificando que $5 \cdot 33 + 3 = 168$.

Respuesta 24 R 1

División larga

Podemos usar la **división larga** para hacer divisiones cuando el divisor tiene más de un dígito. Por ejemplo, para dividir 832 entre 23 procedemos como sigue:

Cociente →
Divisor → $23\overline{)832}$ Coloque el divisor y el dividendo como se indica. El cociente aparecerá sobre el símbolo de división.
↑
Dividendo

Encontramos el cociente usando el proceso de división siguiente:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 23\overline{)832} \end{array}$$
Pregunte: "¿Cuántas veces 23 dividirá a 83?" Como una estimación es 4 ponga 4 en la columna de las decenas del cociente.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 23\overline{)832} \\ 92 \end{array}$$
Multiplique $23 \cdot 4$ y ponga la respuesta, 92, bajo el 83. Como 92 es *mayor* que 83 nuestra estimación de 4 para el cociente en la columna de las decenas fue muy grande.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 23\overline{)832} \\ 69\downarrow \\ \hline 142 \end{array}$$
Cambie la estimación del cociente por 3. Multiplique $23 \cdot 3$ para obtener 69, coloque 69 bajo el 83, dibuje una línea y reste.

Baje el 2 en la columna de las unidades.

$$\begin{array}{r} 37 \\ 23\overline{)832} \\ 69 \\ \hline 142 \\ 161 \\ \hline \end{array}$$
Pregunte: "¿Cuántas veces 23 divide a 142?" La respuesta es aproximadamente 7. Ponga 7 en la columna de las unidades del cociente. Multiplique $23 \cdot 7$ para obtener 161. Coloque161 bajo 142. Como 161 es *mayor* que 142 la estimación de 7 es grande.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 23\overline{)832} \\ 69 \\ \hline 142 \\ 138 \\ \hline 4 \end{array}$$
Cambie la estimación del cociente por 6. Multiplique $23 \cdot 6 = 138$.

Coloque 138 bajo 142 y reste.

El cociente es 36 y el residuo es 4. Podemos escribir este resultado como 36 R 4.

Para comprobar el resultado de una división multiplicamos el divisor por el cociente y luego le sumamos el residuo. El resultado debe ser el dividendo.

Comprobación: Cociente · divisor + residuo = dividendo

$$36 \cdot 23 + 4 = 832$$
$$828 + 4 = 832$$
$$832 = 832$$

Los problemas de aplicación que involucran formar grupos de igual tamaño a menudo se pueden resolver usando división.

EJEMPLO 5 **Administración de un comedor de beneficencia.** Un comedor de beneficencia planea dar de comer a 1990 personas. Por limitaciones de espacio, sólo se puede servir a 165 personas a la vez. ¿Cuántos turnos serán necesarios para servir a todos? ¿Cuántos platos se servirán en el último turno?

Solución A las 1990 personas se les puede servir 165 a la vez. Para encontrar el número de turnos debemos dividir.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 165\overline{)1990} \\ \underline{1\,65\downarrow} \\ 340 \\ \underline{330} \\ 10 \end{array}$$

El cociente es 12 y el residuo es 10. Se van a necesitar 13 turnos: 12 a plena capacidad y un turno a capacidad parcial para servir a los 10 restantes.

Autoevaluación 5
Cada gramo de grasa da 9 calorías en una comida. Una comida rápida tiene 243 calorías provenientes de grasas. ¿Cuántos gramos de grasa contiene la comida?

Respuesta 27

Pruebas de divisibilidad

Un número es *divisible* entre otro número si cuando se le divide el residuo es 0. Hay pruebas de divisibilidad que nos ayudan a saber si un número es divisible entre otro.

Pruebas de divisibilidad

Un número es divisible entre
2 si su último dígito es divisible entre 2.
3 si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.
4 si el número formado por sus últimos dos dígitos es divisible entre 4.
5 si su último dígito es 0 o 5.
6 si es divisible entre 2 y entre 3.
9 si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.
10 si su último dígito es 0.

Las pruebas de divisibilidad para otros números son más complicadas. Para ver si un número específico es divisible entre otros números distintos de 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10 haga una división larga. Si la división no deja residuo el número es divisible entre el otro número.

EJEMPLO 6 ¿534 840 es divisible entre **a.** 2, **b.** 3, **c.** 4 **d.** 5, **e.** 6, **f.** 9, y **g.** 10?

Solución

a. Es divisible entre 2 porque su último dígito, 0, es divisible entre 2.

b. Es divisible entre 3 porque la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

$$5 + 3 + 4 + 8 + 4 + 0 = 24 \quad \text{y} \quad \frac{24}{3} = 8$$

c. Es divisible entre 4 porque el número formado por sus dos últimos dígitos es divisible entre 4.

$$\frac{40}{4} = 10$$

d. Es divisible entre 5 porque su último dígito es 0 o 5.

e. Es divisible entre 6 porque es divisible entre 2 y entre 3.

Autoevaluación 6
¿73 311 435 es divisible entre
a. 2, **b.** 3, **c.** 5, **d.** 6, **e.** 9, y **f.** 10?

Respuestas **a.** no, **b.** sí, **c.** sí, **d.** no, **e.** sí, **f.** no

f. No es divisible entre 9 porque la suma de sus dígitos no es divisible entre 9.

$$\frac{24}{9} = 2 \text{ y quedan } 6$$

g. Es divisible entre 10 porque su último dígito es 0.

División de números cardinales que terminan con ceros

Hay un atajo para dividir un dividendo y un divisor cuando ambos terminan con ceros. Simplemente quitamos los ceros en los que termine el divisor y quitamos el mismo número de ceros en el dividendo.

Autoevaluación 7
Divida: 12 000 ÷ 1500.

EJEMPLO 7 Haga las divisiones: **a.** 80 ÷ 10, **b.** 47 000 ÷ 100, y **c.** $350\overline{)9800}$.

Solución

Hay un cero en el divisor.

a. $80 \div 10 = 8 \div 1 = 8$

Quite un cero del dividendo y uno del divisor.

Hay dos ceros en el divisor.

b. $47\,000 \div 100 = 470 \div 1 = 470$

Quite dos ceros del dividendo y dos del divisor.

c. Para hacer la división

$$350\overline{)9800}$$

Quitamos un cero del divisor y otro del dividendo y hacemos la división $35\overline{)980}$.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 35\overline{)980} \\ \underline{70} \\ 280 \\ \underline{280} \\ 0 \end{array}$$

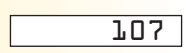
Respuesta 8

División de números cardinales usando una calculadora

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA **Venta al retail**

Una vendedora vendió cierto número de calculadoras a $17 cada una y sus ventas totales fueron $1819. Para encontrar el número de calculadoras que vendió debemos dividir el total de ventas entre el costo de cada calculadora. Podemos usar una calculadora para evaluar 1819 ÷ 17 introduciendo esos números y oprimiendo esas teclas.

1819 [÷] 17 [=]



La vendedora vendió 107 calculadoras.

Sección 1.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. La respuesta a un problema de división se llama _____. En un problema de división el _____ es dividido entre el divisor.
2. Si una división no es exacta la parte que queda se llama _____.
3. Un número es _____ entre otro si al dividirlos el residuo es 0.
4. Para hacer una división cuando el divisor tiene más de un dígito usamos el proceso de división _____.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

5. Cero dividido entre cualquier número distinto de cero es ☐.
6. Cualquier número dividido entre 0 es _____.
7. Un número distinto de cero no se puede dividir entre ☐.
8. Un número es divisible entre ☐ si su último dígito es divisible entre 2.
9. Un número es divisible entre 3 si la _____ de sus dígitos es divisible entre 3.
10. Un número es divisible entre 4 si el número formado por sus _____ últimos dígitos es divisible entre 4.
11. Un número es divisible entre 5 si sus dos últimos dígitos son ☐ o ☐.
12. Un número es divisible entre 6 si es divisible entre ☐ y entre ☐.
13. Un número es divisible entre 9 si la _____ de sus dígitos es divisible entre 9.
14. Un número es divisible entre ☐ si su último dígito es 0.
15. $\frac{25}{25} =$ ☐
16. $\frac{25}{1} =$ ☐
17. $\frac{8}{0}$ es _____.
18. $\frac{0}{0}$ es _____.
19. En la división $3800 \div 100$, se deben quitar _____ ceros del dividendo y del divisor.
20. La división $63\,000 \div 300$ es equivalente a la división ☐ $\div 3$.

NOTACIÓN

21. Escriba tres símbolos que se usen para la división.
22. En una división 35 R 4 significa "un cociente de 35 y un _____ de 4".

PRÁCTICA *Haga las divisiones.*

23. $40 \div 5$
24. $40 \div 8$
25. $54 \div 9$
26. $72 \div 8$
27. $63 \div 7$
28. $48 \div 8$
29. $\frac{56}{8}$
30. $\frac{81}{9}$

Escriba una multiplicación relacionada para cada división.

31. $24 \div 3 = 8$
32. $32 \div 4 = 8$
33. $7\overline{)56}$
34. $9\overline{)72}$

Haga las divisiones.

35. $6\overline{)432}$
36. $8\overline{)368}$
37. $7\overline{)245}$
38. $9\overline{)513}$
39. $5\overline{)1185}$
40. $7\overline{)2415}$
41. $\frac{4936}{8}$
42. $\frac{25\,950}{6}$
43. $75 \div 15$
44. $315 \div 35$
45. $42 \div 14$
46. $65 \div 13$
47. $132 \div 11$
48. $132 \div 12$
49. $\frac{221}{17}$
50. $\frac{221}{13}$
51. $13\overline{)949}$
52. $73\overline{)949}$
53. $33\overline{)1353}$
54. $41\overline{)1353}$
55. $39\overline{)7995}$
56. $71\overline{)7313}$
57. $\frac{6090}{29}$
58. $\frac{7410}{13}$
59. $31\overline{)273}$
60. $25\overline{)290}$
61. $37\overline{)743}$
62. $79\overline{)931}$
63. $42\overline{)1273}$
64. $83\overline{)3280}$
65. $57\overline{)1795}$
66. $99\overline{)9876}$

Determine si 149 850 es divisible para cada número dado.

67. 2
68. 3
69. 4
70. 5
71. 6
72. 9
73. 10
74. 8

Haga las divisiones.

75. $35\,000 \div 100$
76. $4700 \div 100$
77. $89\,000 \div 1000$
78. $930\,000 \div 1000$
79. $2480 \div 20$
80. $3120 \div 30$
81. $\frac{64\,000}{400}$
82. $\frac{125\,000}{5000}$

APLICACIONES

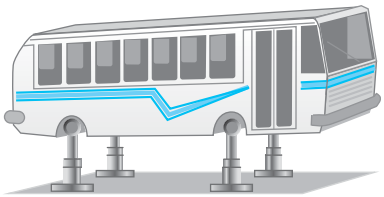
83. REPARTO DE LECHE La clase de primer grado de Juan recibió 73 envases de media pinta para distribuir equitativamente a sus 23 estudiantes. ¿Cuántos envases sobraron?

84. MESAS DE RESTAURANTE Una camarera ganó $96 en propinas. Si cada cliente le dio $3, ¿a cuántos clientes atendió?

85. VACIADO DE PISCINAS Una piscina de 950 000 galones se vacía en 16 horas. ¿Cuántos galones salen por hora?

86. CORRER Brian corre 7 millas diarias. ¿En cuántos días correrá Brian 371 millas?

87. SISTEMAS DE ELEVACIÓN Si el autobús pesa 58 000 libras ¿cuánto peso hay en cada soporte?



88. RENDIMIENTO DE GASOLINA Un grupo de rock en una gira viaja en un autobús que tiene un alcance de 700 millas con su tanque de combustible (140 galones). ¿Qué tan lejos puede llegar con un galón de combustible?

89. DONAS ¿Cuántas docenas de donas se deben pedir para una reunión a la que se espera que lleguen 156 personas y a cada una se le dé una dona?

90. ACARREO DE TIERRA Un camión de volteo de 15 yardas cúbicas tiene que acarrear 405 yardas cúbicas de tierra a un sitio de construcción. ¿Cuántos viajes debe hacer el camión?

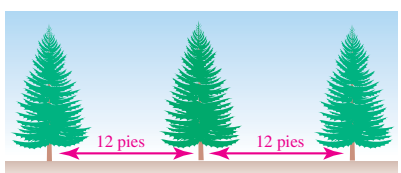
91. VOLEIBOL Un total de 216 muchachas acudieron para formar una liga de voleibol de una ciudad. ¿Cuántas muchachas se tienen que apuntar en la lista de cada equipo si deben llenarse los requisitos siguientes?

Todos los equipos deben tener el mismo número de jugadoras.

Un número razonable de jugadoras en cada equipo es de 7 a 10.

Para la programación de los juegos tiene que haber un número par de equipos (2, 4, 6, 8 …).

92. ROMPEVIENTOS Una granjera quiere plantar pinos a 12 pies de distancia para formar un rompevientos para sus cultivos. ¿Cuántos árboles debe comprar si la longitud de su campo es 744 pies?



93. PRECIO DE UN LIBRO DE TEXTO Una tienda recibió $17 520 por la venta de 240 libros de texto de álgebra. ¿Cuánto costó cada libro?

94. DESCARGA DE AGUAS El río Susquehanna descarga 1 719 000 pies cúbicos de agua en la bahia de Chesapeake en 45 segundos. ¿Cuántos pies cúbicos de agua descarga por segundo?

95. ESTADOS DE LA UNIÓN AMERICANA Para encontrar la **densidad de población** de un estado, podemos dividir la población entre su área (en millas cuadradas). El resultado es el número de personas por milla cuadrada. Use los datos de la tabla para aproximar la densidad de población de cada estado.

Estado	Población en 2003*	Área* (millas cuadradas)
Arizona	5 500 000	110 000
Indiana	6 120 000	36 000
Rhode Island	1 100 000	1000
Carolina del Sur	4 200 000	30 000

*aproximadamente
Fuente: Oficina del Censo

96. CIENCIA La luz viaja aproximadamente 11 160 000 millas en un minuto. ¿Cuánto viaja en un segundo?

POR ESCRITO

97. Explique por qué la división de dos números no es conmutativa.

98. Explique por qué la división de 0 es posible pero no la división entre 0.

REPASO

99. ¿Qué dígito está en la columna de la unidad de millares en el número 372 856?

100. Redondee 45 995 hasta la centena más cercana.

101. Reste 987 de 1010.

102. DESCUENTOS EN AUTOMÓVILES Un automóvil, vendido originalmente en $17 550, se vende en $13 970. ¿En cuántos dólares disminuyó el precio?

Estimación

Hemos usado la **estimación** como un medio para comprobar si es razonable una respuesta. Ahora echaremos una mirada más en profundidad al proceso de estimación.

La estimación se usa para encontrar una respuesta *aproximada* a un problema. Las estimaciones pueden ser útiles de dos maneras. Primero, sirven como una comprobación de la exactitud que permite detectar errores de cálculo grandes. Si la respuesta no parece razonable cuando se compara con la estimación se debe repetir el problema. Segundo, algunas situaciones requieren sólo de una respuesta aproximada más que de una respuesta exacta.

Hay varias formas de estimar, pero hay algo común a todos los métodos: Los números en el problema se simplifican de tal forma que los cálculos se puedan hacer fácil y rápidamente. El primer método que discutimos se llama **redondeo principio-fin**. Cada número se redondea a su cifra decimal mayor de forma que todos sus dígitos excepto el primero sean cero.

EJEMPLO 1 Estimación de sumas, diferencias y productos.

a. Estime la suma: $3714 + 2489 + 781 + 5500 + 303$.

Solución Use redondeo principio-fin.

$$\begin{array}{rcr} 3714 & \longrightarrow & 4000 \\ 2489 & \longrightarrow & 2000 \\ 781 & \longrightarrow & 800 \\ 5500 & \longrightarrow & 6000 \\ \underline{+\ 303} & \longrightarrow & \underline{+\ 300} \\ & & 13\,100 \end{array}$$

Cada número se redondea a su mayor cifra decimal. Todos los dígitos excepto el primero son cero

La estimación es 13 100.

Si calculamos $3714 + 2489 + 781 + 5500 + 303$, la suma es 12 787. Podemos ver que nuestra estimación está cerca; sólo son 313 más que 12 787. Este ejemplo ilustra el compromiso que se hace cuando se usan estimaciones: Los cálculos son más fáciles de hacer y toman menos tiempo pero las respuestas no son exactas.

b. Estime la diferencia: $46\,721 - 13\,208$.

Solución Use redondeo principio-fin.

$$\begin{array}{rcr} 46\,721 & \longrightarrow & 50\,000 \\ \underline{-13\,208} & \longrightarrow & \underline{-10\,000} \\ & & 40\,000 \end{array}$$

Sólo el primer dígito no es cero.

La estimación es 40 000

c. Estime el producto: $334 \cdot 59$.

Solución Use redondeo principio-fin.

$$\begin{array}{rcr} 334 & \longrightarrow & 300 \\ \underline{\times\ 59} & \longrightarrow & \underline{\times\ 60} \\ & & 18\,000 \end{array}$$

334 se redondea a 300 y 59 a 60.

La estimación es 18 000.

Autoevaluación 1

a. Estime la suma:

$$\begin{array}{r} 6780 \\ 3278 \\ 566 \\ 4230 \\ \underline{+1923} \end{array}$$

b. Estime la diferencia:

$$\begin{array}{r} 89\,070 \\ \underline{-15\,331} \end{array}$$

c. Estime el producto:

$$\begin{array}{r} 707 \\ \underline{\times 251} \end{array}$$

Respuestas **a.** 16 600, **b.** 70 000, **c.** 210 000

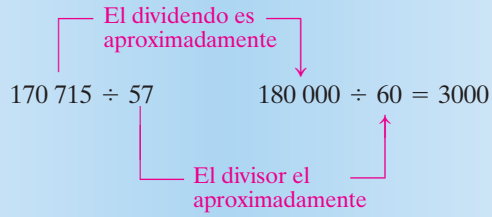
Para estimar cocientes usamos un método que aproxima tanto el dividendo como el divisor de forma que se dividan fácilmente. Con este método se requieren cierta visión e intuición. Hay una regla para este método: Si es posible, redondee ambos números hacia arriba o hacia abajo.

Autoevaluación 2
Estime: 33 642 ÷ 42.

Respuesta 800

EJEMPLO 2 **Estimación de cocientes.** Estime el cociente 170 715 ÷ 57.

Solución Ambos números se redondean hacia arriba. La división puede hacerse entonces mentalmente.



La estimación es 3000.

EJERCICIOS DE ESTUDIO

Use redondeo principio-fin para encontrar una estimación y verificar lo razonable de cada respuesta. Escriba sí si parece razonable y no si no lo es.

1.
$$\begin{array}{r} 25\,405 \\ 11\,222 \\ 8\,909 \\ 1\,076 \\ 14\,595 \\ +33\,999 \\ \hline 73\,206 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 568\,334 \\ -\ 31\,225 \\ \hline 497\,109 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 451 \\ \times\ 73 \\ \hline 39\,923 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 616 \\ \times\ 98 \\ \hline 60\,368 \end{array}$$

Use estimación para comprobar lo razonable de la respuesta.

5. 57 238 ÷ 28 = 200

6. $322\overline{)13\,202}$ = 41

Use el procedimiento de estimación para responder cada uno de los siguientes problemas.

7. CAMPAÑAS El número de millas que vuela diariamente un político en campaña se muestran abajo. Estime el número de millas que voló durante este tiempo.

Día 1	3546 millas
Día 2	567
Día 3	1203
Día 4	342
Día 5	2699

8. CENTROS COMERCIALES Las ventas totales de un centro comercial en sus primeros tres años de operación se muestran aquí.

2001	$5 234 301
2002	$2 898 655
2003	$6 343 433

Estime la diferencia de ingresos de 2002 y 2003 comparados con el primer año, 2001.

9. CAMPOS DE GOLF Estime el número de sacos de semilla de pasto que se necesitan para plantar un campo cuyo área es de 86 625 pies cuadrados si cada saco de semillas cubre 2850 pies cuadrados.

10. CENSOS Estime la población total de los diez condados más grandes de Estados Unidos en 2003.

CONDADOS MÁS GRANDES POR POBLACIÓN	
1. Los Ángeles, CA	9 871 506
2. Cook, IL	5 351 552
3. Harris, TX	3 596 086
4. Maricopa, AZ	3 389 260
5. Orange, CA	2 957 766
6. San Diego, CA	2 930 886
7. Kings, NY	2 472 523
8. Miami-Dade, FL	2 341 167
9. Dallas, TX	2 284 096
10. Queens, NY	2 225 486

Fuente: Oficina del Censo

11. MONEDA Estime el número de billetes de $5 en circulación hasta el 30 de junio de 2004 si el valor total del papel moneda era $9 373 288 075.

12. CORPORACIONES En 2003 General Motors Corporation tuvo ventas por $185 524 000 000. ¿Aproximadamente cuántas veces más fue esto que las ventas de 2003 de IBM que fueron por $89 000 000 000?

1.6 Factores primos y exponentes

- Factorización de números cardinales
- Números cardinales pares e impares
- Números primos
- Números compuestos
- Factorización en primos con el método del árbol
- Exponentes
- Factorización en primos con el método de la división

En esta sección aprenderemos cómo representar a los números cardinales en formas alternativas. Los procedimientos que se utilizan para desarrollar estas formas involucran tanto la multiplicación como la división. Luego analizaremos los exponentes, que son una forma de representar multiplicaciones repetidas.

Factorización de números cardinales

La afirmación $3 \cdot 2 = 6$ tiene dos partes: los números que se multiplican y la respuesta. Los números que se multiplican son *factores* y la respuesta es el *producto*. Decimos que 3 y 2 son factores de 6.

Factores

Los números que se multiplican entre sí se llaman **factores**.

EJEMPLO 1 Encuentre los factores de 12.

Solución Necesitamos encontrar las formas posibles en que podemos multiplicar dos números naturales para obtener un producto de 12.

$$1 \cdot 12 = 12, \qquad 2 \cdot 6 = 12, \qquad \text{y} \qquad 3 \cdot 4 = 12$$

En orden de menor a mayor los factores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Autoevaluación 1
Encuentre los factores de 20.

Respuesta 1, 2, 4, 5, 10 y 20

El ejemplo 1 muestra que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son los factores de 12. Esta observación se estableció utilizando multiplicaciones. Cada uno de estos factores se relaciona también con 12 mediante división. Cada uno de ellos divide a 12 dejando residuo 0. Por este hecho decimos que 12 es divisible entre cada uno de sus factores. Cuando una división termina con un residuo de 0 decimos que la división sale exacta o que uno de los números divide al otro *exactamente*.

Divisibilidad

Un número es divisible entre otro si, cuando se realiza la división, se obtiene el residuo 0.

Cuando decimos que 3 es factor de 6 usamos la palabra *factor* como sustantivo. La palabra *factorizar* también se usa como verbo.

Factorización de un número cardinal

Factorizar un número cardinal significa expresarlo como el producto de otros números cardinales.

Autoevaluación 2
Factorice 18 usando **a.** dos factores y **b.** tres factores.

Respuestas **a.** $1 \cdot 18, 2 \cdot 9, 3 \cdot 6$, **b.** $2 \cdot 3 \cdot 3$

EJEMPLO 2 Factorice 40 usando **a.** dos factores y **b.** tres factores.

Solución

a. Hay varias posibilidades.

$$40 = 1 \cdot 40, \quad 40 = 2 \cdot 20, \quad 40 = 4 \cdot 10, \quad \text{y} \quad 40 = 5 \cdot 8$$

b. De nuevo, hay varias posibilidades. Dos de ellas son

$$40 = 5 \cdot 4 \cdot 2 \quad \text{y} \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 10$$

Números cardinales pares e impares

Números cardinales pares e impares

Si un número cardinal es divisible entre 2 se llama número **par**.

Si un número cardinal no es divisible entre 2 se llama número **impar**.

Los números cardinales pares son los números

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, . . .

Los números cardinales impares son los números

Hay infinitos números pares e infinitos números impares.

Números primos

Autoevaluación 3
Encuentre los factores de 23.

Respuesta 1 y 23

EJEMPLO 3 Encuentre los factores de 17.

Solución

$$1 \cdot 17 = 17$$

Los únicos factores de 17 son 1 y 17.

En el ejemplo 3 y su autoevaluación vimos que los únicos factores de 17 son 1 y 17, y los únicos factores de 23 son 1 y 23. Los números que tienen sólo dos factores, 1 y el número mismo, se llaman **números primos**.

Números primos

Un **número primo** es un número cardinal mayor que 1 que tiene sólo a 1 y a sí mismo como factores.

Los números primos son los números

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . .

Los puntos suspensivos al final de la lista indican que hay infinitos números primos.

Nótese que el único número primo par es 2. Cualquier otro número cardinal par es divisible entre 2 y por tanto tiene a 2 como factor además de 1 y sí mismo. También nótese que no todos los números impares son primos. Por ejemplo, como 15 tiene como factores 1, 3, 5 y 15, no es un número primo.

Números compuestos

El conjunto de números cardinales contiene muchos números primos. También contiene muchos números que no son primos.

Números compuestos

Los **números compuestos** son números cardinales mayores que 1 que no son primos.

Los números compuestos son los números

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, . . .

Los tres números al final de la lista indican que hay infinitos números compuestos.

EJEMPLO 4

a. ¿37 es un número primo? **b.** ¿45 es un número primo?

Solución

a. Como 37 es un número cardinal mayor que 1 y sus únicos factores son 1 y 37, es primo.

b. Los factores de 45 son 1, 3, 5, 9, 15 y 45. Como hay más factores que 1 y 45, 45 no es primo. Es un número compuesto.

Autoevaluación 4

a. ¿39 es un número primo?

b. ¿57 es un número primo?

Respuestas **a.** no, **b.** no

COMENTARIO Los números 0 y 1 no son ni primos ni compuestos porque ninguno de ellos es un número cardinal mayor que 1.

Factorización en primos con el método del árbol

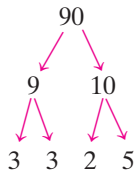
Todo número compuesto se puede formar multiplicando una combinación específica de números primos. El proceso de encontrar esa combinación se llama **factorización en primos**.

Factorización en primos

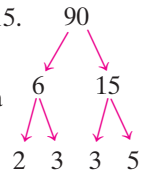
Encontrar la **factorización en primos** de un número natural significa escribirlo como el producto de números primos solamente.

Un método para encontrar la factorización en primos de un número se llama **método del árbol**. Usamos el método del árbol en los diagramas de abajo para encontrar la factorización en primos de 90 de dos formas.

1. Factorice 90 como 9 · 10.
2. Factorice 9 y 10.
3. El proceso se completa cuando aparezcan sólo números primos.



1. Factorice 90 como 6 · 15.
2. Factorice 6 y 15.
3. El proceso se completa cuando aparezcan sólo números primos.



En cualquier caso los factores primos son 2 · 3 · 3 · 5. Así, la forma factorizada en primos de 90 es 2 · 3 · 3 · 5. Como hemos visto, no importa cómo factorizamos 90. Siempre

obtendremos el mismo conjunto de números primos. Ninguna otra combinación de factores primos nos dará 90. Este ejemplo ilustra un hecho importante sobre los números compuestos.

Teorema fundamental de la aritmética

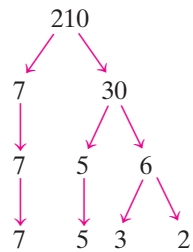
Cualquier número compuesto tiene exactamente un conjunto de factores primos.

Autoevaluación 5
Use un árbol de factorización para encontrar la factorización en primos de 120.

Respuesta $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

EJEMPLO 5 Use un árbol de factorización para encontrar la factorización en primos de 210.

Solución



Factorice 210 como $7 \cdot 30$.

Baje el 7. Factorice 30 como $5 \cdot 6$.

Baje el 7 y el 5. Factorice 6 como $3 \cdot 2$.

La factorización en primos de 210 es $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$. Escribiendo la factorización en primos en orden, de mayor a menor, tenemos $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Exponentes

En la autoevaluación del ejemplo 5 vimos que la factorización en primos de 120 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Como esta factorización tiene tres factores de 2, decimos que 2 es un *factor repetido*. Para expresar un factor repetido podemos usar un **exponente**.

Exponente y base

Un **exponente** se usa para indicar multiplicación repetida. Nos dice cuántas veces la **base** se usa como factor.

El exponente es 3.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

Factores repetidos — La base es 2.

Léase 2^3 como "2 a la tercera potencia" o "2 al cubo".

La factorización en primos de 120 se puede escribir de forma más compacta usando exponentes: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

En la **expresión exponencial** 2^3, el número 2 es la base y 3 es el exponente. La expresión se llama **potencia de 2**.

Autoevaluación 6
Use exponentes para escribir las factorizaciones en primos:

a. $3 \cdot 3 \cdot 7$ **b.** $5(5)(7)(7)$

c. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

Respuestas **a.** $3^2 \cdot 7$, **b.** $5^2(7^2)$, **c.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

EJEMPLO 6 Use exponentes para escribir cada factorización en primos: **a.** $5 \cdot 5 \cdot 5$, **b.** $7 \cdot 7 \cdot 11$, y **c.** $2(2)(2)(2)(3)(3)(3)$.

Solución

a. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ — 5 se usa como factor 3 veces.

b. $7 \cdot 7 \cdot 11 = 7^2 \cdot 11$ — 7 se usa como factor 2 veces.

c. $2(2)(2)(2)(3)(3)(3) = 2^4(3^3)$ — 2 se usa como factor 4 veces y 3 se usa como factor 3 veces.

EJEMPLO 7 Encuentre el valor de las expresiones.

Solución

a. $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ Léase 7^2 como "7 a la segunda potencia" o "7 al cuadrado". Escriba la base 7 como factor dos veces.

b. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Léase 2^5 como "2 a la quinta potencia". Escriba la base 2 como factor cinco veces.

c. $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ Léase 10^4 como "10 a la cuarta potencia". Escriba la base 10 como factor cuatro veces.

d. $6^1 = 6$ Léase 6^1 como "6 a la primera potencia". Escriba la base 6 una vez.

Autoevaluación 7
¿Cuál de los números 3^5, 4^4 y 5^3 es mayor?

Respuesta $4^4 = 256$

COMENTARIO Nótese que 2^5 significa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. No significa $2 \cdot 5$. Esto es, $2^5 = 32$ y $2 \cdot 5 = 10$.

EJEMPLO 8 La factorización en primos de un número es $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. ¿Cuál es el número?

Solución Para encontrar el número encontramos el valor de cada potencia y luego los multiplicamos.

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 = 8 \cdot 81 \cdot 5 \qquad 2^3 = 8 \text{ y } 3^4 = 81.$$
$$= 648 \cdot 5 \qquad \text{Haga las multiplicaciones, trabajando de izquierda a derecha.}$$
$$= 3240$$

El número es 3240.

Autoevaluación 8
La factorización en primos de un número es $3 \cdot 5^2 \cdot 7$. ¿Cuál es el número?

Respuesta 525

Crecimiento bacteriano

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Después de una hora un cultivo contiene dos bacterias. Suponga que el número de bacterias se duplica cada hora después de eso. Use exponentes para determinar cuántas bacterias tendrá el cultivo después de 24 horas.

Podemos usar la tabla 1.4 para ayudarnos a modelar la situación. En la tabla se aprecia un patrón de desarrollo: el número de bacterias en el cultivo después de 24 horas será 2^{24}. Podemos evaluar esta expresión exponencial usando la tecla exponencial $\boxed{y^x}$ en una calculadora científica ($\boxed{x^y}$ en otros modelos).

Tiempo	Número de bacterias
1 h	$2 = 2^1$
2 h	$4 = 2^2$
3 h	$8 = 2^3$
4 h	$16 = 2^4$
24 h	$? = 2^{24}$

TABLA 1.4

Para encontrar el valor de 2^{24}, introducimos estos números y oprimimos estas teclas.

$2\ \boxed{y^x}\ 24\ \boxed{=}$

16777216

Como $2^{24} = 16\ 777\ 216$ habrá 16 777 216 bacterias después de 24 horas.

Factorización en primos con el método de la división

Podemos encontrar también la factorización en primos de un número natural con división. Por ejemplo, para encontrar la factorización en primos de 363 empezamos el método de la división escogiendo el *menor* primo que divida al número dado exactamente. Continuamos este proceso de "división invertida" hasta que el resultado sea un número primo.

Paso 1. El número primo 2 no divide a 363 exactamente pero 3 sí. El resultado es 121, que no es primo. Continuamos el proceso de división.

$3|\overline{363}$
121

Paso 2. A continuación, escogemos el menor primo que divida a 121. Los primos 2, 3, 5 y 7 no dividen a 121 exactamente pero 11 sí. El resultado es 11 que es primo y hemos terminado.

$\mathbf{3}|\overline{363}$
$\mathbf{11}|\overline{121}$
$\mathbf{11}$
$363 = \mathbf{3 \cdot 11 \cdot 11}$

Usando exponentes podemos escribir la factorización en primos de 363 como $3 \cdot 11^2$.

Autoevaluación 9
Use el método de la división para encontrar la factorización en primos de 108. Use exponentes para expresar el resultado.

Respuesta $2^2 \cdot 3^3$

EJEMPLO 9 Use el método de la división para encontrar la factorización en primos de 100. Use exponentes para expresar el resultado.

Solución

2 divide a 100 exactamente. El resultado es 50 que no es primo. $\longrightarrow \mathbf{2}|\overline{100}$
2 divide a 50 exactamente. El resultado es 25 que no es primo. $\longrightarrow \mathbf{2}|\overline{50}$
5 divide a 50 exactamente. El resultado es 5 que es primo. Terminamos. $\longrightarrow \mathbf{5}|\overline{25}$
$\mathbf{5}$

La factorización en primos de 100 es $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ o $2^2 \cdot 5^2$.

COMENTARIO En el ejemplo 9 habría sido incorrecto empezar el proceso de división con $10|\overline{100}$

Porque 10 no es número primo.

Sección 1.6 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Los números que se multiplican entre sí se llaman _____.
2. Un número es _____ de otro si el residuo es 0 cuando se dividen. Cuando termina una división con residuo 0 decimos que uno de los números divide a otro _____.
3. _____ un número cardinal significa expresarlo como producto de otros números cardinales.
4. Un número _____ es un número cardinal mayor que 1 que tiene sólo a 1 y a sí mismo como factores.
5. Los números cardinales mayores que 1 que no son números primos se llaman números _____.
6. Un número cardinal _____ es un número que es divisible exactamente entre 2. Un número cardinal _____ es un número que no es divisible exactamente entre 2.
7. Factorizar un número en primos significa escribirlo como el producto de números _____ solamente.
8. Un _____ se usa para representar multiplicación repetida.
9. En la expresión exponencial 6^4, 6 se le llama _____, y a 4 _____.

10. Otra forma de decir "5 a la segunda potencia" es 5 _____. Otra forma de decir "7 a la tercera potencia" es 7 _____.

CONCEPTOS

11. Escriba 27 como producto de dos factores.

12. Escriba 30 como producto de tres factores.

13. A continuación se muestra la lista completa de los factores de un número cardinal. ¿Cuál es el número?

a. 2, 4, 22, 44, 11, 1

b. 20, 1, 25, 100, 2, 4, 5, 50, 10

14. a. Encuentre los factores de 24.

b. Encuentre la factorización en primos de 24.

15. Encuentre los factores de cada número.

a. 11

b. 23

c. 37

d. De los resultados obtenidos en los incisos a-c, ¿qué se puede decir de los números 11, 23 y 37?

16. Suponga que un número es divisible entre 10. ¿10 es un factor del número?

17. Si 4 es un factor de un número cardinal, ¿4 dividirá el número exactamente?

18. Dé ejemplos de números cardinales que tengan 11 como factor.

Se da la factorización en primos de un número cardinal. Encuentre el número.

19. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ **20.** $3^3 \cdot 2$

21. $11^2 \cdot 5$ **22.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

23. ¿Se puede cambiar el orden de la base y el exponente en una expresión exponencial y que dé el mismo resultado? En otras palabras, $3^2 = 2^3$?

24. Encuentre los factores primos de 20 y de 35. ¿Qué factores primos tienen en común?

25. Encuentre los factores primos de 20 y 50. ¿Qué factores primos tienen en común?

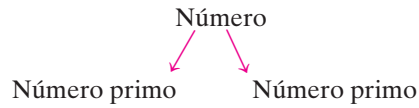
26. Encuentre los factores primos de 30 y 165. ¿Qué factores primos tienen en común?

27. Encuentre los factores primos de 30 y 242. ¿Qué factores primos tienen en común?

28. Encuentre 1^2, 1^3 y 1^4. De los resultados, ¿qué se puede decir de cualquier potencia de 1?

29. Termine el proceso de factorización en primos de 150. Compare los resultados.

30. Encuentre tres números cardinales menores que 10 que encajen en la parte superior de este diagrama en árbol.



31. Complete la tabla.

Producto de los factores de 12	Suma de los factores de 12
$1 \cdot 12$	
$2 \cdot 6$	
$3 \cdot 4$	

32. Considere 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. De los números listados, ¿cuál es el factor más *grande* de **a.** 18? **b.** 24? **c.** 50?

33. Cuando se aplica el método de la división para encontrar la factorización en primos de un número par, ¿cuál es la elección obvia para iniciar el proceso de división?

34. Cuando se usa el método de la división para encontrar la factorización en primos de un número que termina en 5, ¿cuál es la elección obvia para iniciar el proceso de división?

NOTACIÓN *Escriba la multiplicación repetida representada por cada expresión.*

35. 7^3 **36.** 8^4

37. 3^5 **38.** 4^6

39. $5^2(11)$ **40.** $2^3 \cdot 3^2$

Simplifique las expresiones.

41. 10^1 **42.** 2^1

Use exponentes para escribir las expresiones de forma más simple.

43. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **44.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

45. $5(5)(5)(5)$ **46.** $9(9)(9)$

47. $4(4)(5)(5)$ **48.** $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16$

PRÁCTICA *Encuentre los factores de cada número cardinal.*

49. 10 **50.** 6

51. 40 **52.** 75

53. 18 **54.** 32
55. 44 **56.** 65
57. 77 **58.** 81
59. 100 **60.** 441

Encuentre la factorización en primos de los números.

61. 39 **62.** 20
63. 99 **64.** 105
65. 162 **66.** 400
67. 220 **68.** 126
69. 64 **70.** 243
71. 147 **72.** 98

Evalúe las expresiones exponenciales.

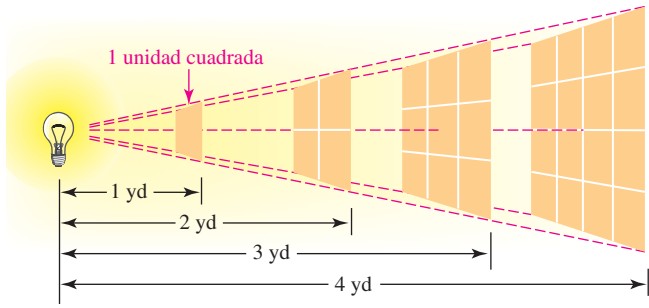
73. 3^4 **74.** 5^3
75. 2^5 **76.** 10^5
77. 12^2 **78.** 7^3
79. 8^4 **80.** 9^5
81. $3^2(2^3)$ **82.** $3^3(4^2)$
83. $2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^2$ **84.** $3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^2$
85. 234^3 **86.** 51^4
87. $23^2 \cdot 13^3$ **88.** $12^3 \cdot 15^2$

APLICACIONES

89. NÚMEROS PERFECTOS Se llama **número perfecto** a un número cardinal cuando la suma de los factores que son menores que el número es igual al número. Por ejemplo, 6 es un número perfecto porque $1 + 2 + 3 = 6$. Encuentre los factores de 28. Después use la suma para mostrar que 28 es también un número perfecto.

90. CRIPTOGRAFÍA La información a menudo se transmite en clave. Muchas claves tienen que ver con escribir productos de números primos grandes porque son difíciles de factorizar. Para que se vea qué tan difícil es trate de encontrar dos factores primos de 7663. (*Sugerencia*: ambos primos son mayores que 70.)

91. LUZ La ilustración muestra que la energía eléctrica que pasa a través de la primera unidad de área a 1 yarda del foco se extiende conforme se aleja de la fuente. ¿Qué área cubre la energía a 2 yardas, 3 yardas y 4 yardas del foco? Exprese cada respuesta usando exponentes.



92. DIVISIÓN CELULAR Después de una hora una célula se ha dividido para formar otra célula. En otra hora más estas dos células se dividen para dar lugar a cuatro. En una hora más se vuelven a dividir y existen 8 células.

a. ¿Cuántas células existirán al terminar la cuarta hora?

b. El número de células que existen tras cada división se puede encontrar usando una expresión exponencial. ¿Cuál es la base?

c. Use una calculadora para encontrar el número de células después de 12 horas.

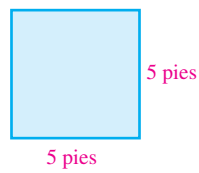
POR ESCRITO

93. Explique qué hacer con un número para saber si es primo.

94. Explique qué hacer con un número para saber si es par.

95. Explique la diferencia entre los *factores* de un número y la *factorización en primos* del número.

96. Explique por qué sería incorrecto decir que el área del cuadrado mostrado en la ilustración es 25^2 pies. ¿Cómo se debe expresar el área?



REPASO

97. Redondee 230 999 al millar más cercano.

98. Escriba el conjunto de los números cardinales.

99. ¿Cuánto es $0 \div 15$?

100. Multiplique $15 \cdot (6 \cdot 9)$.

101. ¿Cuál es la fórmula para el área de un rectángulo?

102. BANDAS DE DESFILE Cuando se forma una banda universitaria en ocho hileras de 15 músicos sobran 5 músicos. ¿Cuántos miembros de la banda hay?

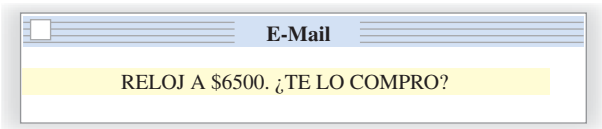
1.7 Orden de las operaciones

- Orden de las operaciones
- Evaluación de expresiones sin símbolos de agrupación
- Evaluación de expresiones con símbolos de agrupación
- La media aritmética (promedio)

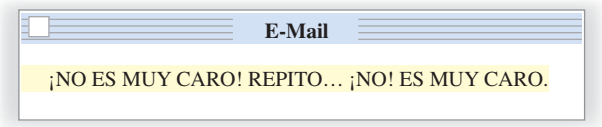
Los signos de puntuación como las comas, comillas y puntos sirven para redactar. Determinan la forma en que se van a leer e interpretar las oraciones. Para leer e interpretar correctamente las expresiones matemáticas debemos usar un conjunto de reglas de prioridad para el *orden de las operaciones* previamente acordadas.

Orden de las operaciones

Suponga que se le pide contactar a un amigo si ve cierto tipo de reloj a la venta cuando viaja por Europa. En Suiza usted ve el reloj y manda el mensaje de correo electrónico siguiente:



El siguiente día su amigo responde con esta respuesta.



Algo anda mal. Una oración sugiere comprarlo porque es barato. La otra dice que no porque es muy caro. La colocación del signo de exclamación nos hace leer estas frases de forma diferente, dando resultados distintos.

Cuando leemos un enunciado matemático es posible el mismo tipo de confusión. Por ejemplo, considere

$$3 + 2 \cdot 5$$

La expresión de arriba contiene dos operaciones: suma y multiplicación. Podemos *evaluarla* (encontrar su valor) de dos maneras. Podemos hacer la suma primero y luego la multiplicación. O podemos hacer la multiplicación primero y luego la suma. Sin embargo, se obtienen distintos resultados.

$$\begin{aligned} \mathbf{3 + 2} \cdot 5 &= \mathbf{5} \cdot 5 && \text{Sume primero: } 3 + 2 = 5. \\ &= 25 && \text{Multiplique 5 con 5.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 + \mathbf{2 \cdot 5} &= 3 + \mathbf{10} && \text{Multiplique primero } 2 \cdot 5 = 10 \\ &= 13 && \text{Sume 3 con 10.} \end{aligned}$$

Resultados diferentes

Si no establecemos un orden de las operaciones, la expresión $3 + 2 \cdot 5$ tendrá respuestas diferentes. Para evitar esta posibilidad evaluamos las expresiones en el orden siguiente:

Orden de las operaciones

Haga todos los cálculos dentro de paréntesis y otros símbolos de agrupación en el siguiente orden, procediendo del par más adentro hacia el par más afuera.

1. Evalúe todas las potencias. Esto es, evalúe toda expresión con exponentes.
2. Haga todas las multiplicaciones y divisiones conforme aparezcan de izquierda a derecha.
3. Realice todas las sumas y restas conforme aparezcan de izquierda a derecha.

Cuando se quiten todos los símbolos de agrupación repita los pasos del 1 al 3 para completar los cálculos.

Si hay una barra de fracción presente evalúe la expresión sobre la barra (llamada **numerador**) y la expresión bajo la barra (llamada **denominador**) por separado. Luego haga la división indicada por la barra, si es posible.

Para evaluar $3 + 2 \cdot 5$ correctamente debemos aplicar las reglas del orden de las operaciones. Como no hay paréntesis y no hay exponentes hacemos la multiplicación primero y luego la suma.

Ignore la suma por el momento ↘ ↙ y haga la multiplicación primero.

$$3 + \mathbf{2 \cdot 5} = 3 + \mathbf{10}$$

$$= 13$$ Ahora haga la suma.

Usando las reglas del orden de las operaciones vemos que la respuesta correcta es 13.

Evaluación de expresiones sin símbolos de agrupación

Autoevaluación 1
Evalúe: $4 \cdot 3^3 - 6$.

Respuesta 102

EJEMPLO 1 Evalúe: $2 \cdot 4^2 - 8$.

Solución Como la expresión no contiene símbolos de agrupación empezamos con el paso 2 de las reglas del orden de las operaciones.

$2 \cdot \mathbf{4^2} - 8 = 2 \cdot \mathbf{16} - 8$ Evalúe la potencia: $4^2 = 16$.

$= 32 - 8$ Haga la multiplicación: $2 \cdot 16 = 32$.

$= 24$ Realice la resta.

Autoevaluación 2
Evalúe: $10 - 2 \cdot 3 + 24$.

Respuesta 28

EJEMPLO 2 Evalúe: $8 - 3 \cdot 2 + 16$.

Solución Como la expresión no contiene símbolos de agrupación y como no hay potencias que calcular, buscamos multiplicaciones o divisiones pendientes por hacer.

$8 - \mathbf{3 \cdot 2} + 16 = 8 - \mathbf{6} + 16$ Efectúe la multiplicación: $3 \cdot 2 = 6$.

$= 2 + 16$ Procediendo de izquierda a derecha, haga la resta: $8 - 6 = 2$.

$= 18$ Haga la suma.

COMENTARIO Algunos estudiantes piensan incorrectamente que las sumas se hacen siempre antes que las restas. Como muestra el ejemplo 2 esto no es verdad. Procediendo de izquierda a derecha hacemos las sumas y restas *en el orden en que aparezcan*. Lo mismo se aplica para las multiplicaciones y divisiones.

EJEMPLO 3

Evalúe: $192 \div 6 - 5(3)2$.

Solución Aunque esta expresión contiene paréntesis no hay cálculos qué hacer dentro de ellos. Como no hay potencias hacemos las multiplicaciones y divisiones conforme las encontremos de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} \mathbf{192 \div 6} - 5(3)2 &= \mathbf{32} - 5(3)2 && \text{Procediendo de izquierda a derecha, realice la división: } 192 \div 6 = 32. \\ &= 32 - 15(2) && \text{Procediendo de izquierda a derecha haga la multiplicación: } 5(3) = 15. \\ &= 32 - 30 && \text{Haga la multiplicación: } 15(2) = 30. \\ &= 2 && \text{Efectúe la resta.} \end{aligned}$$

Autoevaluación 3
Evalúe: $36 \div 9 + 4(2)3$.

Respuesta 28

EJEMPLO 4 Recibo de servicio telefónico.

La figura 1.12 muestra las tarifas para llamadas internacionales que cobra una compañía de larga distancia. Una mujer de negocios llama a Alemania por 20 minutos, a Corea del Sur por 5 minutos, y a la ciudad de México por 35 minutos. ¿Cuál es el costo total de las llamadas?

Todas las tarifas por minuto	
Canadá	10¢
Alemania	23¢
Jamaica	68¢
Ciudad de México	42¢
Corea del Sur	29¢

FIGURA 1.12

Solución Podemos encontrar el costo de una llamada (en centavos) multiplicando la tarifa cobrada por minuto por la duración de la llamada (en minutos). Para encontrar el costo total sumamos los costos de las tres llamadas.

$$\underset{\text{Costo de la llamada a Alemania}}{\underset{\downarrow}{23(20)}} + \underset{\text{Costo de la llamada a Corea del Sur}}{\underset{\downarrow}{29(5)}} + \underset{\text{Costo de la llamada a la ciudad de México}}{\underset{\downarrow}{42(35)}}$$

Para evaluar esta expresión aplicamos las reglas para el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} 23(20) + 29(5) + 42(35) &= 460 + 145 + 1470 && \text{Haga las multiplicaciones.} \\ &= 2075 && \text{Realice las sumas.} \end{aligned}$$

El costo total de las llamadas es 2075 centavos o \$20.75

Evaluación de expresiones con símbolos de agrupación

Los **símbolos de agrupación** determinan el orden en que ha de evaluarse una expresión. Como ejemplos de símbolos de agrupación están los paréntesis ( ), los corchetes [ ], y la barra de fracción ——.

En el ejemplo siguiente tenemos dos expresiones parecidas. Sin embargo, debido a los paréntesis las evaluamos en distinto orden.

EJEMPLO 5

Evalúe las expresiones: **a.** $12 - 3 + 5$ y **b.** $12 - (3 + 5)$.

Solución

a. Realizamos las sumas y restas conforme aparezcan de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} \mathbf{12 - 3} + 5 &= \mathbf{9} + 5 && \text{Haga la resta: } 12 - 3 = 9. \\ &= 14 && \text{Haga la suma.} \end{aligned}$$

Autoevaluación 5
Evalúe las expresiones:
a. $20 - 7 + 6$
b. $20 - (7 + 6)$

b. Esta expresión contiene paréntesis. Tenemos que hacer los cálculos dentro de los paréntesis primero.

$$12 - (\mathbf{3 + 5}) = 12 - \mathbf{8}$$ Haga la suma: $3 + 5 = 8$.

$$= 4$$ Realice la resta.

Respuestas **a.** 19, **b.** 7

Autoevaluación 6
Evalúe: $(1 + 3)^4$.

EJEMPLO 6 Evalúe: $(2 + 6)^3$.

Solución Empezamos haciendo los cálculos entre paréntesis.

$$(\mathbf{2 + 6})^3 = \mathbf{8}^3$$ Haga la suma.

$$= 512$$ Evalúe la expresión exponencial: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

Respuesta 256

Autoevaluación 7
Evalúe: $50 - 4(12 - 5 \cdot 2)$.

EJEMPLO 7 Evalúe: $5 + 2(13 - 5 \cdot 2)$.

Solución Esta expresión contiene símbolos de agrupación. Aplicamos las reglas para el orden de las operaciones dentro de los paréntesis primero para evaluar $13 - 5 \cdot 2$.

$$5 + 2(13 - \mathbf{5 \cdot 2}) = 5 + 2(13 - \mathbf{10})$$ Realice la multiplicación dentro de los paréntesis.

$$= 5 + 2(3)$$ Efectúe la resta dentro de los paréntesis.

$$= 5 + 6$$ Haga la multiplicación: $2(3) = 6$.

$$= 11$$ Realice la suma.

Respuesta 42

Algunas veces una expresión contiene dos o más conjuntos de símbolos de agrupación. Como puede ser confuso leer una expresión tal como $16 + 2(14 - 3(5 - 2))$, a menudo usamos corchetes en lugar de un segundo par de paréntesis.

$$16 + 2[14 - 3(5 - 2)]$$

Si una expresión contiene más de un par de símbolos de agrupación siempre empezamos trabajando en el par más interior y luego trabajamos con el par más exterior.

Paréntesis más interior

$$16 + 2[14 - 3(5 - 2)]$$

Paréntesis cuadrados más exteriores

Autoevaluación 8
Evalúe:
$140 - 7[4 + 3(6 - 2)]$.

EJEMPLO 8 Evalúe: $16 + 6[14 - 3(5 - 2)]$.

Solución

$$16 + 6[14 - 3(\mathbf{5 - 2})] = 16 + 6[14 - 3(\mathbf{3})]$$ Efectúe la resta que está dentro de los paréntesis.

$$= 16 + 6(14 - 9)$$ Realice la multiplicación dentro de los paréntesis cuadrados. Como sólo se necesita un par de símbolos de agrupación escriba $14 - 9$ entre paréntesis.

$= 16 + 6(5)$ Efectúe la resta dentro de los paréntesis.

$= 16 + 30$ Haga la multiplicación: $6(5) = 30$.

$= 46$ Realice la suma.

Respuesta 28

EJEMPLO 9

Evalúe: $\dfrac{2(13) - 2}{3(2^3)}$.

Solución Una barra de fracción es un símbolo de agrupación. Evaluamos el numerador y el denominador por separado y luego hacemos la división indicada.

$\dfrac{\mathbf{2(13)} - 2}{3(\mathbf{2^3})} = \dfrac{\mathbf{26} - 2}{3(\mathbf{8})}$ En el numerador, haga la multiplicación. En el denominador, efectúe el cálculo dentro de los paréntesis.

$= \dfrac{24}{24}$ En el numerador, haga la resta. En el denominador, realice la multiplicación.

$= 1$ Haga la división.

Respuesta 2

Autoevaluación 9

Evalúe: $\dfrac{3(14) - 6}{2(3^2)}$.

La media aritmética (promedio)

La **media aritmética**, o **promedio**, de varios números es un valor alrededor del cual se agrupan los números. La media aritmética brinda una indicación del "centro" de un conjunto de números. Cuando se determina la media de un conjunto de números usualmente aplicamos las reglas para el orden de las operaciones.

Determinación de la media aritmética

Para encontrar la media de un conjunto de puntuaciones, divida la suma de las puntuaciones por el número de puntuaciones.

EJEMPLO 10 Baloncesto.

En 1998 el equipo Lady Vols de la Universidad de Tennessee ganó el campeonato femenil de baloncesto femenil con una temporada perfecta 39-0. Encuentre el margen de victoria promedio en sus últimos cuatro juegos del torneo mostrados abajo.

Regional	Final regional	Semifinal	Campeonato
Gana a Rutgers por 32 puntos	Gana a Carolina del Norte por 6 puntos	Gana a Arkansas por 28 puntos	Gana al Tech de Louisiana por 18 puntos

Solución Para encontrar el margen de victoria promedio, sume los márgenes de victoria y divida entre 4.

$$\text{Promedio} = \frac{32 + 6 + 28 + 18}{4}$$

$$= \frac{84}{4}$$

$$= 21$$

Su margen de victoria promedio fue de 21 puntos.

Respuesta 9 puntos

Autoevaluación 10

La Universidad de Siracusa ganó el campeonato varonil de baloncesto de la NCAA en 2003. Encuentre su margen de victoria promedio en sus seis juegos del torneo que ganó por 11, 12, 1, 16, 11 y 3 puntos.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Orden de las operaciones y uso de los paréntesis

Las calculadoras tienen reglas para el orden de las operaciones predefinidas. Aun así algunas evaluaciones requieren el uso de una tecla de paréntesis izquierdo [( ] y una tecla de paréntesis derecho [ )]. Por ejemplo, para evaluar $\frac{240}{20 - 15}$, introducimos estos números y oprimimos estas teclas.

240 [÷] [(] 20 [−] 15 [)] [=]

48

PARA PENSAR A DETALLE

Preparación para una clase

"Sólo 13% de los estudiantes de tiempo completo pasan más de 25 horas a la semana preparándose para las clases, número que dicen los miembros de las facultades que se necesita para que le vaya a uno bien en la universidad."

Reporte Anual 2003 de la Encuesta Nacional sobre Compromiso Estudiantil

El Comité del Informe Anual 2003 de la Encuesta Nacional sobre Compromiso Estudiantil interrogó a miles de estudiantes universitarios de tiempo completo, aplicó encuestas relacionadas con sus actividades semanales. Use las pistas dadas para determinar los resultados de la encuesta mostrada abajo.

Uso del tiempo por semana para estudiantes de tiempo completo

Actividad	Tiempo a la semana
Preparación para la clase	14 horas
Trabajo en el campus o fuera del campus	Cuatro horas menos que el tiempo empleado para prepararse para clase
Participación en actividades curriculares	La mitad de las horas que emplean trabajando en el campus o fuera de él
Descanso y socialización	Dos horas más que el doble del tiempo empleado participando en actividades curriculares
Cuidados a quienes dependen de ellos	Tres horas menos que la mitad del tiempo de descanso y socialización
Transporte hacia las clases	Una hora más que el tiempo brindando cuidados a sus dependientes

Sección 1.7 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Los símbolos de agrupación ( ) se llaman _____, y los símbolos [ ] se llaman _____.
2. La expresión sobre una barra de fracción se llama _____. La expresión bajo una barra de fracción se llama _____.
3. _____ la expresión $2 + 5 \cdot 4$ significa encontrar su valor.
4. Para encontrar el _____ de varios valores sumamos los valores y dividimos entre el número de valores.

CONCEPTOS

5. Considere $5(2)^2 - 1$. ¿Cuántas operaciones se tienen que hacer para evaluar la expresión? Indíquelas en el orden en que debieran hacerse.

6. Considere $15 - 3 + (5 \cdot 2)^3$. ¿Cuántas operaciones tienen que hacerse para evaluar esta expresión? Indíquelas en el orden en que debieran hacerse.

7. Considere $\dfrac{5 + 5(7)}{2 + (8 - 4)}$. ¿Qué operación debiera hacerse primero en el numerador?, ¿qué operación debe hacerse primero en el denominador?

8. En la expresión $\dfrac{3 - 5(2)}{5(2) + 4}$, la barra es un símbolo de agrupación. ¿Qué es lo que separa?

9. Explique la diferencia entre $2 \cdot 3^2$ y $(2 \cdot 3)^2$.

10. Use corchetes para escribir $2(12 - (5 + 4))$ de forma más clara.

NOTACIÓN *Complete cada solución para evaluar la expresión.*

11. $28 - 5(2)^2 = 28 - 5(\square)$
$= 28 - \square$
$= \square$

12. $2 + (5 + 6 \cdot 2) = 2 + (5 + \square)$
$= 2 + \square$
$= \square$

13. $[4(2 + 7)] - 6 = [4(\square)] - 6$
$= \square - 6$
$= \square$

14. $\dfrac{5(3) + 12}{9 - 6} = \dfrac{\square + 12}{\square}$
$= \dfrac{\square}{3}$
$= \square$

PRÁCTICA *Evalúe las expresiones.*

15. $7 + 4 \cdot 5$

16. $10 - 2 \cdot 2$

17. $2 + 3(0)$

18. $5(0) + 8$

19. $20 - 10 + 5$

20. $80 - 5 + 4$

21. $25 \div 5 \cdot 5$

22. $6 \div 2 \cdot 3$

23. $7(5) - 5(6)$

24. $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4$

25. $4^2 + 3^2$

26. $12^2 - 5^2$

27. $2 \cdot 3^2$

28. $3^3 \cdot 5$

29. $3 + 2 \cdot 3^4 \cdot 5$

30. $3 \cdot 2^3 \cdot 4 - 12$

31. $5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9$

32. $8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4$

33. $3(2)^2 - 4(2) + 12$

34. $5(1)^3 + (1)^2 + 2(1) - 6$

35. $(8 - 6)^2 + (4 - 3)^2$

36. $(2 + 1)^2 + (3 + 2)^2$

37. $60 - \left(6 + \dfrac{40}{8}\right)$

38. $7 + \left(5^3 - \dfrac{200}{2}\right)$

39. $6 + 2(5 + 4)$

40. $3(5 + 1) + 7$

41. $3 + 5(6 - 4)$

42. $7(9 - 2) - 1$

43. $(7 - 4)^2 + 1$

44. $(9 - 5)^3 + 8$

45. $6^3 - (10 + 8)$

46. $5^2 - (9 + 3)$

47. $50 - 2(4)^2$

48. $30 + 2(3)^3$

49. $16^2 - 4(2)(5)$

50. $8^2 - 4(3)(1)$

51. $39 - 5(6) + 9 - 1$

52. $15 - 3(2) - 4 + 3$

53. $(18 - 12)^3 - 5^2$

54. $(9 - 2)^2 - 3^3$

55. $2(10 - 3^2) + 1$

56. $1 + 3(18 - 4^2)$

57. $6 + \dfrac{25}{5} + 6(3)$

58. $15 - \dfrac{24}{6} + 8 \cdot 2$

59. $3\left(\dfrac{18}{3}\right) - 2(2)$

60. $2\left(\dfrac{12}{3}\right) + 3(5)$

61. $(2 \cdot 6 - 4)^2$

62. $2(6 - 4)^2$

63. $4[50 - (3^3 - 5^2)]$

64. $6[15 + (5 \cdot 2^2)]$

65. $80 - 2[12 - (5 + 4)]$

66. $15 + 5[12 - (2^2 + 4)]$

67. $2[100 - (5 + 4)] - 45$

68. $8[6(6) - 6^2] + 4(5)$

69. $\dfrac{10 + 5}{6 - 1}$

70. $\dfrac{18 + 12}{2(3)}$

71. $\dfrac{5^2 + 17}{6 - 2^2}$

72. $\dfrac{3^2 - 2^2}{(3 - 2)^2}$

73. $\dfrac{(3 + 5)^2 + 2}{2(8 - 5)}$

74. $\dfrac{25 - (2 \cdot 3 - 1)}{2 \cdot 9 - 8}$

75. $\dfrac{(5 - 3)^2 + 2}{4^2 - (8 + 2)}$

76. $\dfrac{(4^3 - 2) + 7}{5(2 + 4) - 7}$

77. $12\,985 - (1800 + 689)$

78. $\dfrac{897 - 655}{88 - 77}$

79. $3245 - 25(16 - 12)^2$

80. $\dfrac{24^2 - 4^2}{22 + 58}$

APLICACIONES *Escriba una expresión para resolver cada problema y evalúela.*

81. COMPRA DE ABARROTES Carlos tiene dos cajas de refrescos, 4 bolsas de papas fritas y dos latas de salsa en su carrito del supermercado. Cada caja de refrescos cuesta $6, cada bolsa de papas $2 y cada lata de salsa cuesta $1. Encuentre el costo total.

82. PUNTUACIONES Las puntuaciones recibidas por un clavadista novato son las siguientes:

5	2	4	6	3	4

La fórmula para calcular la puntuación global del clavado es como sigue.

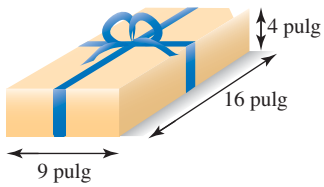
1. Elimine la puntuación más baja.
2. Elimine la puntuación más alta.
3. Divida la suma de las puntuaciones restantes entre 4.

Encuentre la puntuación del clavadista.

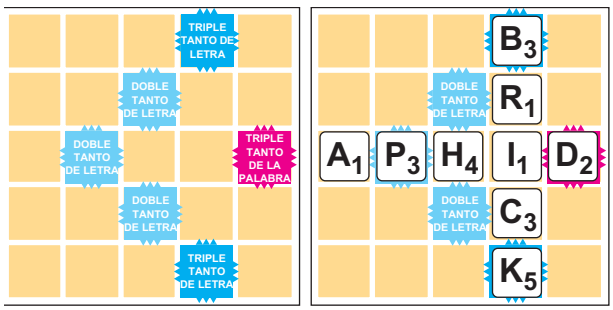
83. BANCOS Cuando un cliente deposita efectivo un cajero tiene que completar una cuenta de moneda en el reverso de la boleta de depósito. En la ilustración, ¿qué cantidad es el total del depósito?

Cuenta de moneda, para uso financiero solamente			
24	x 1's		
—	x 2's		
6	x 5's		
10	x 10's		
12	x 20's		
2	x 50's		
1	x 100's		
	TOTAL $		

84. ENVOLTURA DE REGALOS ¿Cuánta cinta se necesita para envolver el paquete mostrado si se necesitan 15 pulgadas para hacer el moño?



85. JUEGO DE MESA "SCRABBLE" La ilustración (a) muestra parte del tablero de juego antes y la ilustración (b) lo muestra después de que se colocaron las palabras *brick* y *aphid*. Determine la puntuación de cada palabra. (El número en cada ficha da el valor en puntos de la letra.)



(a) (b)

86. EL DISCURSO DE GETTYSBURG He aquí un extracto del discurso de Gettysburg de Abraham Lincoln:

> Hace cuatro veintenas y 7 años, nuestros padres fundaron, en este continente, una nueva nación cuya base es la libertad y la proposición de que todas las personas son creadas iguales.

Los comentarios de Lincoln se refieren al año de 1776 cuando Estados Unidos declaró su independencia. Si una veintena son 20 años, ¿en qué año pronunció Abraham Lincoln el discurso de Gettysburg?

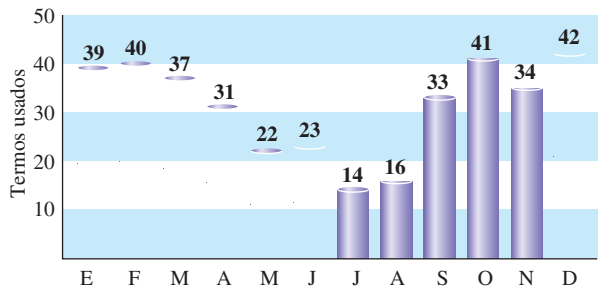
87. CLIMA En una semana de diciembre las temperaturas en Honolulu, Hawai, fueron 75°, 80°, 83°, 80°, 77°, 72° y 86°. Encuentre la temperatura promedio (media) de la semana.

88. CALIFICACIONES En una clase de psicología un estudiante tuvo calificaciones de exámenes de 94, 85, 81, 77 y 89. También se quedó dormido y perdió el examen final y le pusieron 0. ¿Cuál fue su promedio de exámenes en la clase?

89. NÚMEROS CARDINALES ¿Cuál es el promedio (media) de los primeros nueve números cardinales mayores que 0?

90. USO DE ENERGÍA Vea la ilustración. Encuentre el número promedio de termos de gas natural usados por mes.

Cta. 45-009 **Auditoría de energía 2004** **Tri-City Gas Co.**
Janice C. Milton Calle State # 23 N, depto B Salem, OR



91. COMIDA RÁPIDA La tabla muestra los sándwiches que anuncia Subway como su menú bajo en grasas. ¿Cuál es el promedio (media) del número de calorías del grupo de los sándwiches?

Sándwiches de 6" de largo	Calorías	Grasa (g)
Delicia vegetal	237	3
Pechuga de pavo	289	4
Pechuga de pavo y jamón	295	5
Jamón	302	5
Roast Beef	303	5
Subway Club	312	5
Pechuga de pollo rostizada	348	6

92. ÍNDICES DE AUDIENCIA DE LOS PROGRAMAS TELEVISIVOS La lista siguiente muestra el número de personas que ven *Who wants to be a millionaire*? En 5 noches de la semana en noviembre de 1999. ¿Qué tamaño tuvo la audiencia promedio?

Lunes	26 800 000
Martes	24 900 000
Miércoles	22 900 000
Jueves	25 900 000
Viernes	21 900 000

93. NÚMEROS SUMA-PRODUCTO

a. Evalúe la expresión de abajo que es la suma de los dígitos de 135 multiplicada por el producto de los dígitos de 135.

$$(1 + 3 + 5)(1 \cdot 3 \cdot 5)$$

b. Escriba una expresión que represente la suma de los dígitos de 144 multiplicada por el producto de los dígitos de 144. Luego evalúe la expresión.

94. NÚMEROS PRIMOS Muestre que 87 es la suma de los cuadrados de los primeros cuatro números primos.

POR ESCRITO

95. Explique por qué las reglas para el orden de las operaciones son necesarias.

96. Explique la diferencia entre los pasos usados para evaluar $5 \cdot 2^3$ y $(5 \cdot 2)^3$.

97. Explique el proceso para hallar la media de un grupo con un número grande de números. ¿Qué le dice un promedio?

98. ¿Qué quiere decir que hagamos todas las sumas y restas *conforme aparezcan de izquierda a derecha*?

REPASO *Realice las operaciones.*

99.
$$\begin{array}{r} 4029 \\ +3271 \\ \hline \end{array}$$

100.
$$\begin{array}{r} 4263 \\ -3764 \\ \hline \end{array}$$

101.
$$\begin{array}{r} 417 \\ \times\ 23 \\ \hline \end{array}$$

102. $82\overline{)50\,430}$

CONCEPTO CLAVE

Orden de las operaciones

Cuando se pide que evalúe una expresión numérica, usted debe realizar las operaciones en el orden apropiado. Uno de los objetivos principales de este curso es que usted sea capaz de aplicar correctamente las reglas para el orden de las operaciones.

Evalúe la expresión $2 + 3 \cdot 5$ de dos maneras.

Multiplique primero	**Sume primero**
$2 + 3 \cdot 5$	$2 + 3 \cdot 5$

1. ¿Por qué motivo se necesitan las reglas para el orden de las operaciones? ¿Cuál es el método correcto?
2. Llene los espacios para completar las reglas para el orden de las operaciones.

Haga todos los cálculos dentro de los paréntesis y símbolos de agrupación en el orden siguiente, procediendo del par más adentro al par más afuera.

1. Evalúe todas las _____. Esto es, evalúe cualquier expresión con _____.
2. Haga todas las _____ y divisiones conforme aparezcan de _____ a derecha.
3. Realice todas las sumas y _____ conforme aparezcan de izquierda a _____.

Para aplicar las reglas para el orden de las operaciones debemos identificar las operaciones involucradas en una expresión. En el orden apropiado indique las operaciones que se deben hacer para evaluar las expresiones siguientes.

3. $10 + 4 - 3^2$

4. $\frac{180}{6} - (4)3$

5. $2(3) - 12 \div 6 \cdot 3$

6. $2(3)^3(4) + 6$

Después de identificar las operaciones debemos hacerlas en el orden apropiado. Evalúe las expresiones.

7. $10 + 4 - 3^2$

8. $\frac{180}{6} - (4)3$

9. $2(3) - 12 \div 6 \cdot 3$

10. $2(3)^3(4) + 6$

Cuando las expresiones involucran símbolos de agrupación hacemos las operaciones dentro de ellos primero. Evalúe las expresiones siguientes.

11. $2(4 + 3 \cdot 2)^2 + 6$

12. $1 + 3[6 - (1 + 5)]$

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

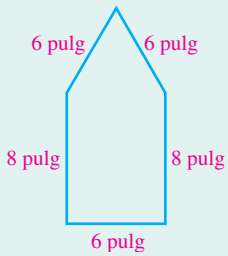
SECCIÓN 1.1

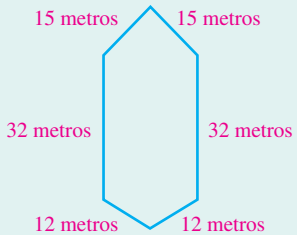
ASIGNE UN VALOR Solicite a cada uno de sus compañeros de su grupo que se presente con una calculadora diferente en la siguiente clase, esto para que puedan examinar y apreciar las diferencias en todos los modelos. Para cada modelo determine el número mayor (si es que hay uno) que se pueda introducir en la pantalla de la calculadora. Luego apriete las teclas apropiadas de la calculadora para sumar 1 a ese número. ¿Qué se ve en la pantalla?

NÚMEROS GRANDES Bill Gates, fundador de la Corporación Microsoft, se anuncia como Billonario. ¿Cuántos millones forman un billón?

SECCIÓN 1.2

PERÍMETROS Encuentre el perímetro de las figuras.





SECCIÓN 1.3

RESTA Explique cómo se relaciona la resta con la suma. Use esta idea para hacer las restas siguientes.

a. $\begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline \end{array}$ **b.** $\begin{array}{r} 27 \\ -13 \\ \hline \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r} 25 \\ -18 \\ \hline \end{array}$

SECCIÓN 1.4

ÁREA MÁXIMA Un jardinero tiene 80 metros de cerca para encerrar un jardín rectangular. Encuentre la longitud y la anchura que encerrarán el área máxima.

SECCIÓN 1.5

PRUEBAS DE DIVISIBILIDAD Un número es divisible entre 8 si el número formado por los tres últimos dígitos es divisible entre 8. Determine si los números siguientes son divisibles entre 8.

a. 1216 **b.** 2496

c. 4160 **d.** 3078

e. 16 928 **f.** 27 926

SECCIÓN 1.6

FACTORES COMUNES Abajo se muestran las factorizaciones en primos de 36 y 126. Los factores primos que son comunes a 36 y 126 (remarcadas en color) son 2, 3 y 3.

$$36 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3}$$

$$126 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot 7$$

Encuentre los factores primos comunes para los pares de números siguientes.

a. 25, 45 **b.** 24, 60

c. 18, 45 **d.** 40, 112

e. 180, 210 **f.** 242, 198

SECCIÓN 1.7

ORDEN DE LAS OPERACIONES Considere la expresión

$$5 + 8 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2$$

Inserte un juego de paréntesis en algún lugar de la expresión de tal forma que cuando se evalúe, obtenga los siguientes resultados:

a. 63 **b.** 132

c. 21 **d.** 127

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 1.1 *Introducción a los números cardinales*

CONCEPTO

Un *conjunto* es una colección de objetos. El conjunto de los *números naturales* es

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

El conjunto de los *números cardinales* es

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los números cardinales se usan a menudo en tablas, gráficas de barras y gráficas lineales.

Los dígitos en un *número cardinal* tienen *valor posicional.*

Un número cardinal se escribe en *notación expandida* cuando sus dígitos se escriben con sus *valores posicionales.*

El símbolo $<$ significa "es menor que". El símbolo $>$ significa "es mayor que".

Para dar respuestas aproximadas utilizamos *números redondeados.*

EJERCICIOS DE REPASO

Considere el conjunto $\{0, 2, \frac{3}{2}, 5, 7.2, 9\}$.

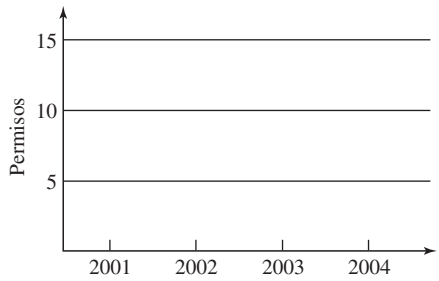
1. Escriba los números naturales en el conjunto.

2. Anote los números cardinales mayores que cero en el conjunto.

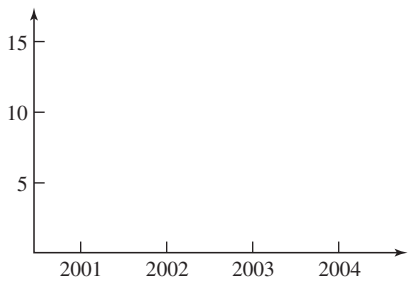
Considere los datos de la tabla que lista los números de permisos de construcción emitidos en la ciudad de Springsville para el periodo 2001-2004.

Año	2001	2002	2003	2004
Permisos de construcción	12	15	10	7

3. Construya una gráfica de barras de los datos.



4. Construya una gráfica de líneas de los datos.



Considere el número 2 365 720.

5. ¿Qué dígito está en la columna de las decenas de millares?

6. ¿Qué dígito está en la columna de las centenas?

Escriba los números en notación expandida.

7. 570 302

8. 37 309 054

Escriba los números en notación estándar.

9. 3 millares + 2 centenas + 7 unidades

10. Veintitrés millones, doscientos cincuenta y tres mil, cuatrocientos doce

Coloque un símbolo $<$ o $>$ entre los numerales para que el enunciado sea verdadero.

11. 9 ☐ 7

12. 301 ☐ 310

Redondee 2 507 348 hasta el número especificado.

13. La centena más cercana

14. La decena de millares más cercana

15. La decena más cercana

16. La centena de millares más cercana.

SECCIÓN 1.2 *Suma de números cardinales*

La *suma* de números cardinales corresponde a la combinación de conjuntos de objetos. Realice primero las sumas que se indican dentro de los paréntesis.

Propiedad conmutativa de la suma: el orden en que se suman los números cardinales no afecta el resultado de la suma.

Propiedad asociativa de la suma: la forma en que se agrupan los sumandos de números cardinales no afecta al resultado de la suma.

El *perímetro* de un rectángulo es la distancia alrededor de él.

Encuentre las sumas.

17. $7 + 6$

18. $6 + 7$

19. $4 + (7 + 3)$

20. $(4 + 7) + 3$

21. $5 + (6 + 9)$

22. $(9 + 3) + 6$

Encuentre las sumas.

23. $135 + 213$

24. $4447 + 7478$

25.
$$\begin{array}{r} 236 \\ +282 \\ \hline \end{array}$$

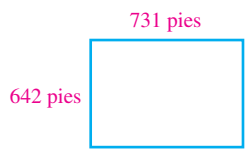
26.
$$\begin{array}{r} 5345 \\ +\ 655 \\ \hline \end{array}$$

27. ¿Cuál propiedad de la suma es la que se muestra?

a. $19 + 6 = 6 + 19$

b. $101 + (99 + 57) = (101 + 99) + 57$

28. Encuentre el perímetro del rectángulo.



29. AEROPUERTOS A continuación se indican los tres aeropuertos con mayor tráfico durante 2003. Encuentre el número total de pasajeros que pasan por esos aeropuertos.

Aeropuerto	Total de pasajeros
Atlanta, Hartsfield	76 086 792
Chicago, O'Hare	69 354 154
Londres, Heathrow	63 468 620

Fuente: Oficina Mundial del Consejo Internacional de Aeropuertos

30. ¿Cuál es la suma de tres mil setecientos seis y diez mil novecientos cincuenta y cinco?

SECCIÓN 1.3 *Resta de números cardinales*

La *resta* de números cardinales nos dice cuántos objetos quedan después de que se quitan algunos de un conjunto.

Realice las restas.

31. $8 - 5$

32. $9 - (7 - 2)$

33. Reste 218 de 235.

34. $5231 - 5177$

35.
$$\begin{array}{r} 343 \\ -269 \\ \hline \end{array}$$

36.
$$\begin{array}{r} 7800 \\ -5725 \\ \hline \end{array}$$

37. VIAJE Un vuelo directo a San Francisco cuesta $237. Un vuelo con una escala en Reno cuesta $192. ¿Cuánto se puede uno ahorrar tomando el vuelo barato?

38. CUENTAS DE AHORROS Una cuenta de ahorros contiene $931. Si el propietario deposita $271 y hace retiros por $37 y $380, calcule el balance final.

39. GRANJAS En un envío de 350 animales 124 eran cerdos. 79 ovejas y el resto ganado vacuno. Encuentre el número de ganado vacuno en el envío.

40. EXTENSIÓN TERRITORIAL Use los datos de la tabla para determinar qué tan grande es la superficie de Rusia comparada con la de Canadá.

País	Superficie (en millas cuadradas)
Rusia	6 592 735
Canadá	3 855 081

Fuente: *Time Almanac, 2005*

SECCIÓN 1.4 *Multiplicación de números cardinales*

La *multiplicación* es suma repetida. Por ejemplo,

$$4 \cdot 6 = \overbrace{6 + 6 + 6 + 6}^{\text{La suma de cuatro 6's}}$$
$$= 24$$

El resultado, 24, se llama *producto* y los números 4 y 6 se llaman *factores*.

Propiedad conmutativa de la multiplicación: el orden en que se multiplican los números cardinales no afecta el resultado de su producto.

Propiedad asociativa de la multiplicación: la forma en que se agrupan los factores de los números cardinales no afecta el resultado de su producto.

El *área A de un rectángulo* es el producto de su longitud *l* por su anchura *a*:

$$A = l \cdot a$$

Efectúe las multiplicaciones.

41. $8 \cdot 7$

42. $7(8)$

43. $8 \cdot 0$

44. $7 \cdot 1$

45. $(5 \cdot 7) \cdot 6$

46. $5 \cdot (7 \cdot 6)$

Realice las multiplicaciones.

47. $157 \cdot 21$

48. $3723(48)$

49.
$$\begin{array}{r} 356 \\ \times\ 89 \\ \hline \end{array}$$

50.
$$\begin{array}{r} 5624 \\ \times\ 81 \\ \hline \end{array}$$

51. BANDAS DE DESFILE Para el espectáculo de medio tiempo de un partido de futbol los miembros de una banda de desfile se agrupan en una formación rectangular de 22 filas y 15 columnas. ¿Cuántos miembros hay en la banda?

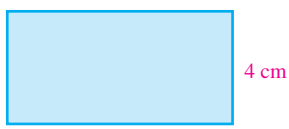
52. ¿Qué propiedad de la multiplicación se muestra?

a. $2 \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot 7$

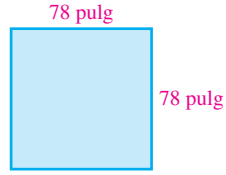
b. $100(50) = 50(100)$

Encuentre el área del rectángulo y del cuadrado.

53.



54.



55. INGRESOS Sarah trabajó 12 horas a $9 por hora y Santiago trabajó 14 horas a $8 por hora. ¿Quién ganó más dinero?

56. COMPRAS Hay 12 huevos en una docena y 12 docenas en una gruesa. ¿Cuántos huevos hay en un envío de 100 gruesas?

SECCIÓN 1.5 División de números cardinales

La *división* es una operación que determina cuántas veces un número (*divisor*) está contenido en otro número (*dividendo*). *Recuerde que no se puede dividir entre 0.*

Realice las divisiones, siempre que sea posible.

57. $357 \div 17$

58. $1443 \div 39$

59. $21\overline{)405}$

60. $54\overline{)1269}$

61. $\frac{81}{27}$

62. $\frac{595}{35}$

63. $\frac{0}{10}$

64. $\frac{10}{0}$

65. REGALOS Si se dividen equitativamente 745 dulces entre 45 niños, ¿cuántos recibirá cada niño? ¿Cuántos dulces sobrarán?

66. A COMPRAS Un condado recibió una donación de $850 000 para comprar algunas patrullas nuevas para la policía. Si una patrulla bien equipada cuesta $25 000, ¿cuántas puede comprar el condado con el dinero de la donación?

SECCIÓN 1.6 Factores primos y exponentes

A los números que se multiplican entre sí se denominan *factores*.

Un *número primo* es un número cardinal mayor que 1, el cual tiene como factores sólo a 1 y a sí mismo. Los números cardinales mayores que 1, que no son primos, se llaman *números compuestos*.

Los números cardinales que son divisibles entre 2 son números *pares*. Los números cardinales que no son divisibles entre 2 son números *impares*.

La *factorización en primos* de un número cardinal es el producto de sus factores primos.

El *exponente* se usa para indicar multiplicación repetida. En la expresión 6^3, 6 es la *base* y el exponente es 3.

Encuentre los factores de los números.

67. 18

68. 25

Identifique cada número como primo, compuesto o ninguno de los dos.

69. 31

70. 100

71. 1

72. 0

73. 125

74. 47

Identifique cada número como par o impar.

75. 171

76. 214

77. 0

78. 1

Encuentre la factorización en números primos de cada número.

79. 42

80. 75

Escriba las expresiones usando exponentes.

81. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

82. $5(5)(5)(13)(13)$

Evalúe las expresiones.

83. 5^3

84. 11^2

85. $2^3 \cdot 5^2$

86. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

SECCIÓN 1.7 *Orden de las operaciones*

Recuerde que debe efectuar las operaciones matemáticas en el orden siguiente:

Realice todos los cálculos dentro de paréntesis y símbolos de agrupación en el orden siguiente, procediendo de adentro hacia afuera.

1. Evalúe todas las potencias. Esto es, evalúe todas las expresiones con exponentes.
2. Haga todas las multiplicaciones y divisiones en orden de izquierda a derecha.
3. Efectúe todas las sumas y restas en orden de izquierda a derecha.

La *media aritmética* (promedio) es un valor alrededor del cual se agrupan los valores de los números.

Evalúe las expresiones.

87. $13 + 12 \cdot 3$

88. $35 - 15 + 3$

89. $(13 + 12) \cdot 3$

90. $(35 - 15) \div 5$

91. $8 \cdot 5 - 4 \div 2 \cdot 4$

92. $8 \cdot (5 - 4 \div 2)^2$

93. $2 + 3(10 - 4 \cdot 2)$

94. $4(20 - 5 \cdot 3 + 2) - 4$

95. $\dfrac{4(6) - 6}{2(3^2)}$

96. $\dfrac{12 + 3 \cdot 7}{5^2 - 14}$

97. $7 + 3[10 - 3(4 - 2)]$

98. $5 + 2[(15 - 3 \cdot 4) - 2]$

Encuentre la media aritmética (promedio) de cada conjunto de puntuaciones.

99.

Examen	1	2	3	4
Puntuación	80	74	66	88

100.

Examen	1	2	3	4	5
Puntuación	73	77	81	0	69

EXAMEN DEL CAPÍTULO 1

1. Indique los números cardinales menores que 5.

2. Escriba "cinco mil doscientos sesenta y seis" en notación expandida.

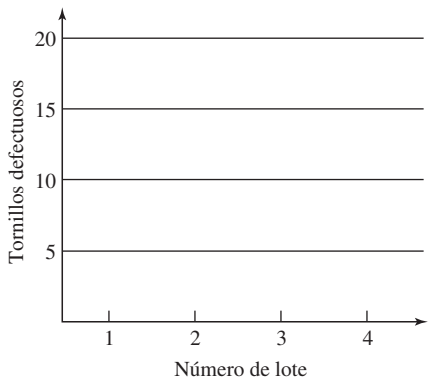
3. Escriba "7 millares + 5 centenas + 7 unidades" en notación estándar.

4. Redondee 34 752 341 hasta el millón más cercano.

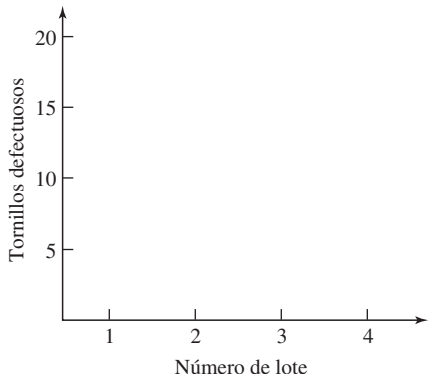
Refiérase a los datos de la tabla.

Número de lote	1	2	3	4
Tornillos defectuosos	7	10	5	15

5. Use los datos para hacer una gráfica de barras.



6. Use los datos para hacer una gráfica lineal.



Coloque uno de los símbolos $<$ o $>$ entre los números para que cada enunciado sea verdadero.

7. 15 ☐ 10

8. 1247 ☐ 1427

Haga las operaciones.

9. Sume; 327 + 435.

10. Reste 287 de 535.

11. Sume:
$$\begin{array}{r} 4521 \\ +3579 \\ \hline \end{array}$$

12. Reste:
$$\begin{array}{r} 4521 \\ -3579 \\ \hline \end{array}$$

13. Un rectángulo tiene 327 pulgadas de ancho y 757 pulgadas de largo. Encuentre su perímetro.

14. ACCIONES El martes una acción de la KBJ Company se vendía en $73. El precio se elevó $12 el miércoles y cayó $9 el jueves. Encuentre su precio el jueves.

Realice las siguientes operaciones.

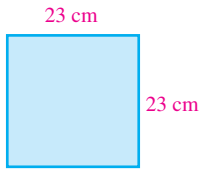
15. Multiplique: $\begin{array}{r} 53 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$

16. Multiplique: $\begin{array}{r} 367 \\ \times\ 73 \\ \hline \end{array}$

17. Divida: $63\overline{)4536}$.

18. Divida: $73\overline{)8379}$.

19. Encuentre el perímetro y el área del cuadrado.



20. ¿Qué propiedad se ilustra con cada enunciado?

a. $18 \cdot (9 \cdot 40) = (18 \cdot 9) \cdot 40$

b. $23\,999 + 1 = 1 + 23\,999$

21. Realice las operaciones, en caso de ser posible.

a. $15 \cdot 0$ **b.** $\dfrac{0}{15}$

22. CLASES DE EDUCACIÓN FÍSICA En una clase de educación física los estudiantes se paran en una formación de 8 filas y 12 columnas cuando el instructor toma la asistencia. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

23. Encuentre la factorización en primos de 1260.

Evalúe las expresiones.

24. $3(4^2) - 2^2$.

25. $9 + 4 \cdot 5$.

26. $10 + 2[12 - 2(6 - 4)]$.

27. $\dfrac{3^3 - 2(6 - 5)^2}{33 - 9 + 1}$

28. CALIFICACIONES Un estudiante obtuvo 73, 52 y 70 en tres exámenes y recibió 0 en dos exámenes a los que no se presentó. Encuentre su puntuación media (promedio).

29. ¿Qué información nos da la media aritmética (promedio) sobre un conjunto de valores?

30. Explique la diferencia entre lo que miden el perímetro y el área de un rectángulo.

31. ¿Qué son los paréntesis y cómo se han usado en este capítulo?

CAPÍTULO 2

Los enteros

2.1 Introducción a los números enteros

2.2 Suma de enteros

2.3 Resta de enteros

2.4 Multiplicación de enteros

2.5 División de enteros

2.6 Orden de las operaciones y estimación

Concepto clave: números con signo

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso

Getty Images

Existen pocas cosas que pueden sorprender tanto como un cielo estrellado en una noche clara. Las estrellas son de distintos colores, tamaños, formas y edades. Probablemente habrá notado que algunas son brillantes y otras son tenues. Los astrónomos han desarrollado una escala para clasificar la brillantez relativa de las estrellas, a las más brillantes (incluyendo al Sol) se les asignan magnitudes de números negativos, mientras que las magnitudes de números positivos se asignan a las estrellas más tenues (y planetas).

Verifique sus conocimientos

1. El _____ es el valor de un número. Es la distancia entre ese número y el cero en la recta numérica.
2. Cuando se suma 0 a un número, el número permanece igual. Llamamos 0 a la _____de suma.
3. Dos números que están a la misma distancia de 0 en la recta numérica pero en lados opuestos se llaman _____.
4. El producto de dos enteros con signos _____ es negativo.
5. Insertar uno de los símbolos $>$ o $<$ en el espacio que corresponda: $-15 \quad -16$.
6. Encuentre el significado (en porcentaje) de las temperaturas que se muestran en la tabla de la izquierda:

Témperaturas altas diarias	
Domingo	1
Lunes	7
Martes	−3
Miércoles	1
Jueves	0
Viernes	−1
Sábado	2

7. Sume:
   a. $-27 + 13$
   b. $12 + (-12)$
   c. $(-2) + (-2) + (-2) + (-2)$
   d. $(-4 + 7) + [1 + (-6) + 4]$
8. Reste:
   a. $7 - 13$ **b.** $3 - (-3)$ **c.** $0 - 5 - 7$
9. Encuentre el producto
   a. $3(-3)$ **b.** $-5(-20)$ **c.** $(-3)(-2)(-4)$
10. Escriba la multiplicación relacionada con la ecuación $\frac{-18}{3} = -6$.
11. Encuentre cada uno de los cocientes, si es posible:
    a. $\frac{36}{-9}$ **b.** $\frac{-900}{-30}$ **c.** $\frac{-3}{2 + 1 - 3}$
12. Evalúe cada expresión.
    a. $-(-7)$ **b.** $-|-7|$ **c.** $3|-6 + 2|$
13. Encuentre cada potencia
    a. -3^2 **b.** $(-3)^2$ **c.** $(3 - 4)^2$
14. Evalúe:
    a. $24 \div 3 \cdot 2$ **b.** $6 + \frac{12}{-4} - 4^2$
    c. $-5 - 2[7 - (-3)(-2)^3]$ **d.** $\frac{-3^3 + (-4)(-6)}{-3(3 - 5)^2 + 9}$
15. El precio de cierta computadora disminuyó de $620 a $500 en seis meses. ¿Cuánto disminuyó el precio por mes?
16. En una prueba de detector de mentiras un ladrón obtuvo −19 puntos, lo cual indica decepción. Sin embargo, en una segunda prueba obtuvo −4, de la cual no se concluye nada. Encuentre las diferencias en los resultados.

Taller de habilidades para el estudio

ACTITUDES, EXPERIENCIA Y ESTILOS DE APRENDIZAJE

Su personalidad afectará la forma en la que aprende las matemáticas; algunas características trabajarán en su beneficio y otras no. La clave es maximizar sus fortalezas, minimizar sus debilidades y encontrar métodos de aprendizaje que puedan adecuarse a su estilo personal.

Actitudes. ¿Cómo se siente con su desempeño en las matemáticas? ¿Cómo se siente al tomar el control de su aprendizaje? ¿Qué opina de las oportunidades de éxito de esta clase? Si su respuesta a estas preguntas es: "¡Nunca aprenderé matemáticas!" o "mis maestros nunca me enseñaron bien", entonces usted mismo se habrá colocado en la senda del fracaso. Trate de cambiar su actitud un poco, piense de forma constructiva y positiva, podría obtener buenos resultados si en vez de pensar "soy torpe en lo que se refiere a matemáticas", trata mejor de decir "las matemáticas no son mi fuerte, pero trabajaré duro y aprenderé nuevas cosas esta vez". Usted debe estar consciente de que el aprendizaje de cualquier concepto nuevo está sujeto a frustración, pero que se puede tener éxito con apoyo, estrategia y trabajo arduo.

Experiencia previa. Experiencias buenas o malas en los cursos previos al de matemáticas pueden afectar la forma en la que usted ve a las matemáticas en la actualidad. Muchos de sus compañeros que han tenido experiencias negativas en el pasado pueden sentir ansiedad y estrés en el presente. Si se siente estresado e incapaz de tratar con los números, puede estar experimentando la ansiedad matemática. Estos sentimientos contraproducentes pueden superarse con preparación extra, servicios de apoyo, técnicas de relajación y hasta con hipnoterapia.

Estilos de aprendizaje. ¿Qué clase de estudiante es? La respuesta a esta pregunta le ayudará a determinar cómo estudia, la forma en la que realiza la tarea o hasta el sitio donde decide sentarse en el salón de clase. Por ejemplo, los alumnos visual-verbales aprenden mejor leyendo o escribiendo, así una buena estrategia para ellos es estudiar y reescribir las notas y los ejemplos. Sin embargo, para aquellos alumnos que aprenden mejor mientras escuchan, pueden optar por grabar cintas de audio con los conceptos importantes como estrategia de estudio. Las personas que desean aprender y son consideradas "cinestésicas" son aquellas que gustan de moverse y utilizar sus manos, así que la incorporación de juegos y rompecabezas (generalmente llamados manipuladores) en las actividades de estudio puede ser benéfico para ellos.

TAREA

1. Describa sus experiencias pasadas en los cursos de matemáticas, ¿en general fueron buenas o malas? ¿Por qué? Si siente que sufre de ansiedad debido a las matemáticas, visite la oficina del director de su colegio y solicite una cita para encontrar formas que le ayuden a superar este problema.

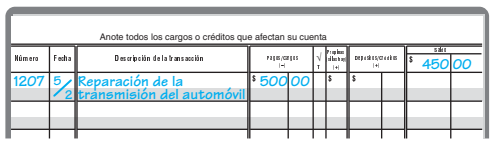
En este capítulo presentaremos el concepto de número negativo y exploraremos una extensión del conjunto de números enteros positivos llamados los enteros.

2.1 Introducción a los números enteros

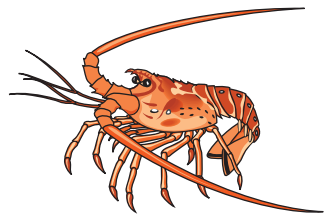
- Enteros • Extensión de la recta numérica • Más sobre desigualdades
- Valor absoluto • El opuesto de un número • El símbolo de resta (−)

Hasta ahora hemos visto que todos los números pueden utilizarse para describir muchas situaciones que se originan en la vida cotidiana, por ejemplo, se pueden utilizar números cardinales para expresar temperaturas por arriba de cero, un estado de cuenta de cheques o cierta altitud sobre el nivel del mar. Sin embargo, no se pueden utilizar números cardinales para expresar las temperaturas bajo cero, el estado de cuenta de cheques con saldo sobregirado o la distancia a la que se encuentra un objeto que está debajo del nivel del mar (vea la figura 2.1)

La temperatura récord de frío en el estado de Florida fue 2 grados *bajo* cero el 13 de febrero de 1899 en Tallahassee.



Se hizo un cheque por $500 cuando sólo había $450 en la cuenta. La cuenta de cheques está *sobregirada.*



La langosta americana se localiza en la costa Este de Estados Unidos a una profundidad superior a 600 pies *debajo* del nivel del mar.

FIGURA 2.1

En esta sección veremos cómo podemos utilizar los números negativos para describir las tres situaciones anteriores, así como en muchas otras.

Enteros

Para describir una temperatura de 2 grados (2°) sobre cero, un saldo de $50, o 600 pies sobre el nivel del mar, podemos utilizar números que se conocen como **números positivos**. Todos los números positivos son mayores que cero, y se pueden escribir usando un signo **positivo** +, o sin ningún signo.

En palabras	**En símbolos**	**Se lee**
2 grados sobre cero	+2 o 2	dos positivo
Un balance de $50	+50 o 50	cincuenta positivo
600 pies sobre el nivel del mar	+600 o 600	seiscientos positivo

Para describir una temperatura de 2 grados bajo 0, un sobregiro de $50, o 600 pies bajo el nivel del mar, necesitamos utilizar **números negativos** éstos son números menores a 0 y deben escribirse con un **signo** −.

En palabras	En símbolos	Se lee
2 grados bajo cero	-2	negativo dos
sobregiro de \$50	-50	negativo cincuenta
600 pies bajo el nivel del mar	-600	negativo seiscientos

Números positivos y negativos

Los **números positivos** son mayores que 0 y los **números negativos** son menores que 0.

Comentario Cero no es positivo ni negativo.

A menudo llamamos a los números positivos o a los negativos **números con signo**. Los primeros tres números con signo que se muestran a continuación son positivos y los últimos tres números son negativos:

$$+12, \quad +26, \quad 515, \quad -12, \quad -26, \quad \text{y} \quad -515$$

El conjunto formado por todos los números cardinales, los negativos de todos los números cardinales, y el número 0 se le llama el conjunto de números **enteros**.

Conjunto de números enteros

$$\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Como cada número natural es un entero, decimos que el conjunto de números naturales es un subconjunto de los enteros (vea la figura 2.2), ya que todo el número positivo es un entero, decimos que el conjunto de todos los números cardinales es un **subconjunto** de los enteros.

Conjunto de números naturales

Conjunto de enteros $\rightarrow \{\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Conjunto de números cardinales

FIGURA 2.2

Comentario Observe que los enteros negativos y el 0 no son números naturales. También observe que los enteros negativos no son todos los números enteros.

Extensión de la recta numérica

En la sección 1.1 analizamos la recta numérica. Ahora utilizaremos una extensión de la recta numérica para aprender más acerca de los números negativos.

Los números negativos pueden representarse sobre una recta numérica al extender la línea a la izquierda. Se comienza en el punto de origen (el punto 0), nos movemos hacia la izquierda, marcando puntos que tienen una separación uniforme, como se demuestra en la figura 2.3. Conforme nos movemos a la derecha de la línea, los valores de los números van incrementándose, si nos movemos a la izquierda el valor de los números disminuye.

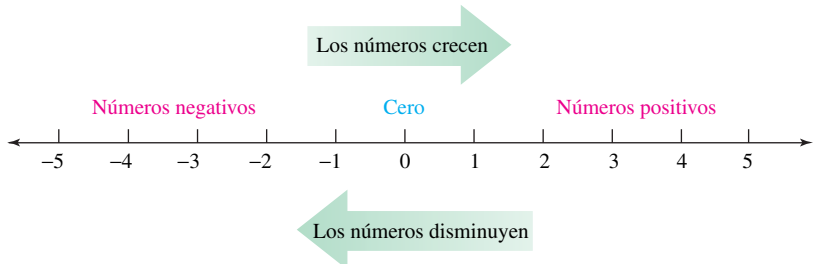


FIGURA 2.3

El termómetro que se muestra en la figura 2.4(a) es un ejemplo de la recta numérica vertical. Su escala está marcada en grados e indica una temperatura de −10°. La línea de tiempo que se muestra en la figura 2.4(b) es un ejemplo de la recta numérica horizontal. Su escala está integrada por incrementos de 500 años.

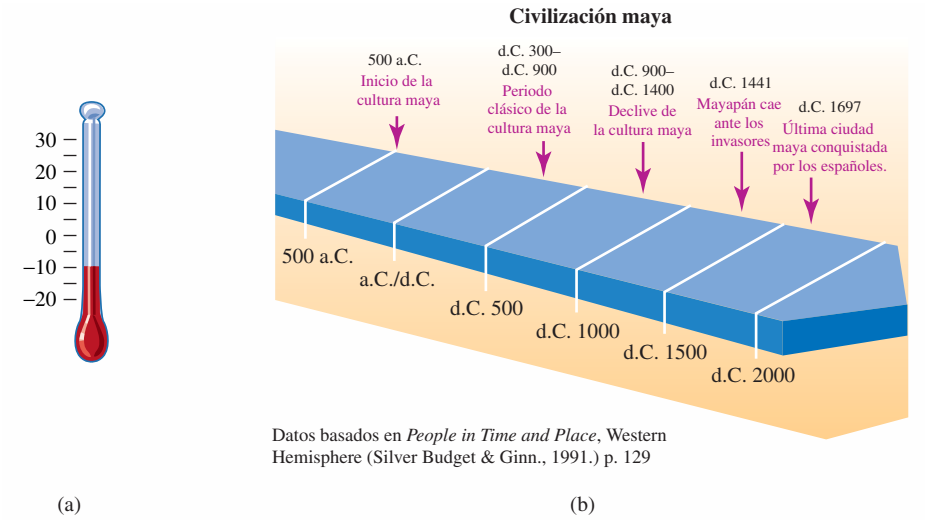
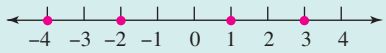


FIGURA 2.4

Autoevaluación 1

Localice en la recta numérica −4, −2, 1 y 3.

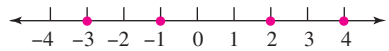
Respuesta



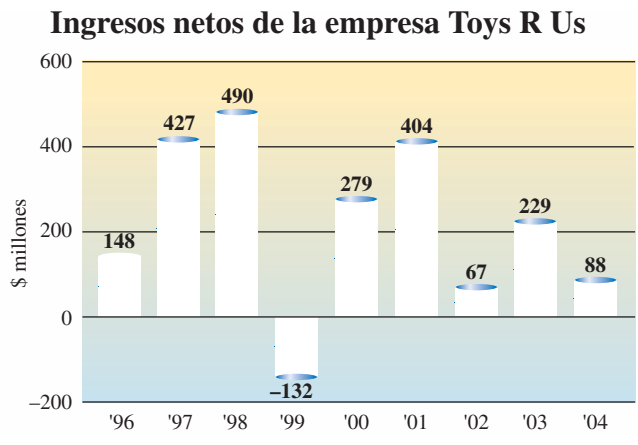
EJEMPLO 1

Grafique −3, −1, 2 y 4 en la recta numérica.

Solución Para graficar cada entero, se localiza su posición en la recta numérica y se dibuja un punto.



Al extender la recta numérica para incluir a los números negativos se pueden representar más situaciones mediante el uso de gráficas de barras y gráficas de línea. Por ejemplo, la gráfica de barras que se muestra en la figura 2.5 ilustra las ganancias *y pérdidas* anuales de la empresa Toys R Us durante un periodo de nueve años. Observe que las ganancias del 2004 fueron $88 millones y las pérdidas en 1999 llegaron a $132 millones.



Fuente: Morningstar.com

FIGURA 2.5

Tarjetas de crédito

PARA PENSAR A DETALLE

"El mayor peligro para muchos alumnos universitarios es el abuso de las tarjetas de crédito. Muchos bancos seducen a nuevos usuarios para que obtengan tarjetas de crédito con bajo o 0 interés". Gary Schatsky, financiero certificado.

¿Qué cifras del estado de cuenta de la tarjeta de crédito mostrada son realmente deudas y podrían representarse con números negativos?

Banco Star — **Resumen de la cuenta**

Saldo anterior	Compras nuevas	Pagos y crédito	Saldo nuevo
$4621.00	$1073.00	$2369.00	$3325.00

04/21/05	05/16/05	$67.00
Fecha de facturación	Fecha de vencimiento del pago	Pago mínimo

Las tasas periódicas pueden variar.
Vea el reverso para mayor explicación e información importante.
Por favor, espere el tiempo suficiente para que le sea enviado el estado de cuenta.

Más sobre desigualdades

Recordará que el símbolo $<$ significa "es menor que" y a su vez $>$ significa "es mayor que". La figura 2.6 muestra la gráfica de enteros -2 y 1. Como -2 está a la izquierda del 1 en la recta numérica, $-2 < 1$. Como $-2 < 1$, también es cierto que $1 > -2$.

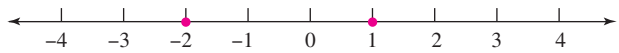


FIGURA 2.6

EJEMPLO 2 Utilice uno de los símbolos $>$ o $<$ para que sea cierta la siguiente afirmación: **a.** $4 \square -5$ y **b.** $-4 \square -2$.

Solución

a. Como 4 está a la derecha de -5 en la recta numérica, $4 > -5$.

b. Como -4 está a la izquierda de -2 en la recta numérica, $-4 < -2$.

Autoevaluación 2

Utilice uno de los símbolos $>$ o $<$ para hacer que cada ejercicio sea verdadero.

a. $6 \square -6$

b. $-6 \square -5$

Respuestas **a.** $>$, **b.** $<$

Existen otros tres símbolos de desigualdad que se utilizan comúnmente: el símbolo $\neq$, "no es igual a", el símbolo $\leq$, "es menor que o igual a", el símbolo $\geq$ "es mayor que o igual a".

$5 \neq 2$ Se lee como "5 no es igual a 2".

$6 \leq 10$ Se lee como "6 es menor que o igual a 10". Esta afirmación es cierta, pues $6 < 10$.

$12 \leq 12$ Se lee como "12 es menor que o igual a 12". Lo cual es cierto, puesto que $12 = 12$.

$17 \geq 15$ Se lee como"17 es mayor que o igual a 15". Esta ecuación es cierta, pues $17 > 15$.

$20 \geq 20$ Se lee como "20 es mayor que o igual a 20". Lo que es cierto ya que $20 = 20$.

Autoevaluación 3
Utilice un símbolo de desigualdad para escribir. "30 es menor que o igual que 35".

Respuesta $30 \leq 35$

EJEMPLO 3 Utilice un símbolo de desigualdad para escribir **a**. "8 no es igual a 5" y **b.** "50 es mayor que o igual a 40".

Solución

a. $8 \neq 5$

b. $50 \geq 40$

Valor absoluto

Si utilizamos la recta numérica podemos ver que los números 3 y -3 están separados a la misma distancia, es decir 3 unidades respecto de 0, como se demuestra en la figura. 2.7.

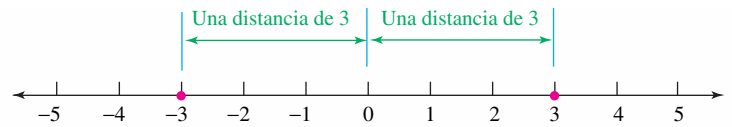


FIGURA 2.7

El **valor absoluto** de un número indica la distancia entre un número y 0 en la recta numérica. Para indicar el valor absoluto, el número se inserta entre dos barras verticales, con lo que se genera el llamado **símbolo de valor absoluto.** Por ejemplo, podemos escribir $|-3| = 3$. Esto se lee como "El valor absoluto de 3 negativo es 3", esto indica que la distancia entre -3 y cero en la recta numérica es de 3 unidades. En la figura 2.7 podemos ver que $|3| = 3$.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es la distancia en la recta numérica entre el número y 0.

Comentario El valor absoluto expresa distancia. El valor absoluto de un número siempre es positivo, o puede ser 0. Nunca es negativo.

Autoevaluación 4
Calcule cada expresión:

a. $|-9|$

b. $|4|$

Respuestas **a.** 9, **b.** 4

EJEMPLO 4 Evalúe cada expresión: **a.** $|8|$, **b.** $|-5|$ y **c.** $|0|$.

Solución

a. En la recta numérica, la distancia entre 8 y 0 es 8. Por lo tanto,

$$|8| = 8$$

b. En la recta numérica, la distancia entre -5 y 0 es 5, en consecuencia,

$$|-5| = 5$$

c. En la recta numérica, la distancia entre 0 y 0 es 0, por lo tanto,

$$|0| = 0$$

El opuesto de un número

Opuestos o negativos

Dos números que se encuentran a la misma distancia de 0 en la recta numérica, pero en lados opuestos, se conocen como números **opuestos** o **negativos.**

La figura 2.8 muestra que para cada número natural de la recta numérica, existe un número correspondiente llamado su *opuesto,* el cual se localiza a la izquierda del 0. Por ejemplo, vemos que 3 y -3 son opuestos, como lo son -5 y 5.

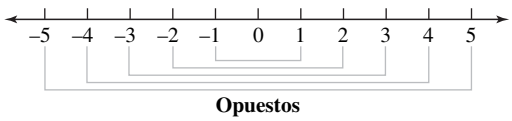


FIGURA 2.8

Para escribir el opuesto de un número se utiliza el símbolo $-$. Por ejemplo, el opuesto de 5 es -5 (se lee como "cinco negativo" o "menos cinco"). Los paréntesis son necesarios para expresar el opuesto de un número negativo. El opuesto de -5 se escribe como $-(-5)$. Ya que 5 y -5 están a la misma distancia del 0, entonces el opuesto de -5 es 5. En consecuencia, $-(-5) = 5$. Lo que lleva a la siguiente conclusión.

La regla del doble negativo

El opuesto del negativo de un número es ese número.

Número	Opuesto	
57	-57	Se lee como "negativo cincuenta y siete".
-8	$-(-8) = 8$	Se lee como "el opuesto de ocho negativo". Aplique la regla del doble negativo.
0	$-0 = 0$	El opuesto de 0 es 0.

El concepto de un opuesto también se puede aplicar a un valor absoluto. Por ejemplo, el opuesto de un valor absoluto de -8 puede escribirse como $-|-8|$. Piense en ello como si se tratara de un proceso de dos pasos. Primero debe encontrar el valor absoluto, después coloque un signo $-$ a ese resultado.

Encuentre primero el valor absoluto

$$-|-8| = -8$$

Después anteponga un signo $-$.

EJEMPLO 5 Simplifique cada expresión: **a.** $-(-44)$ y **b.** $-|-225|$.

Solución

a. $-(-44)$ significa el opuesto de -44. Como el opuesto de -44 es 44, escribimos

$$-(-44) = 44$$

b. $-|-225|$ significa el opuesto de $|-225|$. Como $|-225| = 225$, y el opuesto de 225 es -225, escribimos

$$-|-225| = -225$$

Autoevaluación 5
Simplifique cada expresión:
a. $-(-1)$ y **b.** $-|-99|$

Respuestas **a.** 1, **b.** -99

El símbolo de resta (−)

El símbolo − se utiliza para indicar un número negativo, el opuesto de un número, y la operación de resta. La clave para interpretar correctamente el símbolo − consiste en examinar el contexto en el que se utiliza.

Interpretación del símbolo −

−12	Doce negativo	Un símbolo − colocado justo enfrente de un número que se lee como "negativo".
−(−12)	El opuesto del doce negativo	El primer símbolo − se lee como "el opuesto de" y el segundo se lee como "negativo".
12 − 5	Doce menos cinco	Observe que el espacio se utiliza antes y después del signo −. Lo que indica una sustracción o resta y se lee "menos".

Sección 2.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

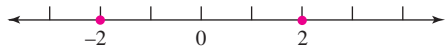
VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Los números pueden representarse por puntos igualmente espaciados en la _____ numérica.
2. El punto en la recta numérica representado por el 0 se llama _____.
3. Para _____ un número significa su localización en la recta numérica y marcarlo con un punto.
4. La gráfica de un número es el punto en la _____ que representa ese número.
5. Los símbolos $>$ y $<$ se llaman símbolos _____.
6. Números _____ son menores que 0.
7. El _____ _____ de un número es la distancia entre el número y el 0 sobre la recta numérica.
8. Dos números que están a la misma distancia en la recta numérica, pero del lado opuesto a ésta se llaman _____.
9. {. . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 . . .} se llama el conjunto de _____.
10. La regla del doble negativo establece que el opuesto del _____ de un número es ese número.

CONCEPTOS

11. Refiérase a cada una de las gráficas y utilice el símbolo de desigualdad $>$ o $<$ para que la respuesta sea cierta.

a.



−2 ☐ 2

b.

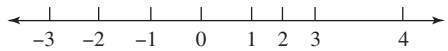
0 ☐ −1

c.

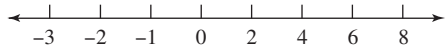
−1 ☐ 0 y 1 ☐ 0

12. Determine qué es lo que está mal en cada una de las rectas numéricas.

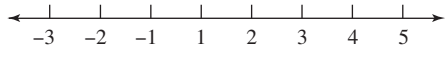
a.



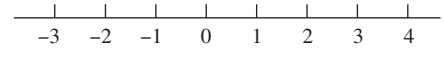
b.



c.



d.



13. ¿Cada número en la recta numérica tiene un número opuesto?

14. ¿El valor absoluto de un número es siempre positivo?

15. ¿Cuál de los siguientes números contiene un signo de menos: $15 - 8$, $-(-15)$ o -15?

16. ¿Existe un número que sea mayor que 10 y menor que 10 al mismo tiempo?

17. Exprese el hecho de $12 < 15$ utilizando el símbolo $>$.

18. Exprese el hecho de $5 > 4$ utilizando el símbolo $<$.

19. Represente cada una de las situaciones siguientes utilizando un número con signo.

a. Sobregiro de $225

b. 10 segundos antes del despegue

c. 3 grados debajo de lo normal

d. Un déficit de $ 12 000

e. Un caballo de carreras terminó 2 longitudes detrás del ganador.

20. Represente cada una de las siguientes situaciones utilizando un número con signo, luego describa su opuesto con palabras.

a. Un excedente comercial de $3 millones de dólares

b. Una cuenta de bacterias 70 veces mayor que el valor estándar o normal

c. Una ganancia de $67

d. Un negocio de un millón de dólares en el mercado "negro".

e. 20 unidades sobre su cuota

21. Si un número es menor que 0, ¿qué tipo de número debe ser?

22. Si un número es mayor que 0, ¿qué clase de número debe ser?

23. ¿Qué número está a 3 unidades a la derecha de -7 en la recta numérica?

24. En la recta numérica, ¿qué número se encuentra a 4 unidades a la izquierda de 2?

25. Indique dos números sobre la recta numérica que se encuentren separados a una distancia de 5 unidades de -3.

26. Nombre dos números en la recta numérica que estén a una distancia de 4 unidades del 3.

27. ¿Qué número está más cerca de -3 en la recta numérica: 2 o -7

28. ¿Qué número está más alejado del 1 en la recta numérica: -5 o 8?

29. Proporcione ejemplos del símbolo $-$, el cual se utiliza en tres diferentes formas.

30. ¿Cuál es el opuesto de 0?

NOTACIÓN

31. Traduzca cada frase a símbolos matemáticos

a. El opuesto de ocho negativo.

b. El valor absoluto de ocho negativo.

c. Ocho menos ocho.

d. El opuesto del valor absoluto de ocho negativo.

32. Escriba el conjunto de los enteros.

PRÁCTICA *Simplifique cada expresión.*

33. $|9|$

34. $|12|$

35. $|-8|$

36. $|-1|$

37. $|-14|$

38. $|-85|$

39. $-|20|$

40. $-|110|$

41. $-|-6|$

42. $|0|$

43. $|203|$

44. $-|-11|$

45. -0

46. $-|0|$

47. $-(-11)$

48. $-(-1)$

49. $-(-4)$

50. $-(-9)$

51. $-(-12)$

52. $-(-25)$

Grafique cada conjunto de números en la recta numérica.

53. $\{-3, 0, 3, 4, -1\}$

54. $\{-4, -1, 2, 5, 1\}$

55. El opuesto de -3, el opuesto de 5 y el valor absoluto de -2

56. El valor absoluto de 3, el opuesto de 3 y el número que es 1 menor que -3

Inserte uno de los símbolos $>$, $<$ o $=$ en los espacios en blanco para que la respuesta sea cierta.

57. $-5 \quad 5$

58. $0 \quad -1$

59. $-12 \quad -6$

60. $-6 \quad -7$

61. $-10 \quad -11$

62. $-11 \quad -20$

63. $|-2| \quad 0$

64. $|-30| \quad -40$

Inserte uno de los símbolos $\geq$ o $\leq$ en los espacios en blanco de tal manera que la respuesta sea correcta.

65. $-14 \quad -15$

66. $-77 \quad -76$

67. $210 \quad 210$

68. $37 \quad 37$

69. $-1255 \quad -(-1254)$

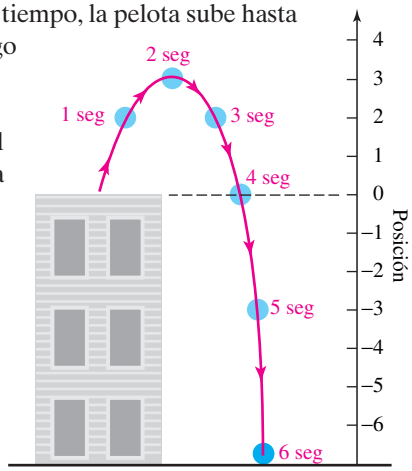
70. $0 \quad -3$

71. $-|-3| \quad 4$

72. $-|-163| \quad -150$

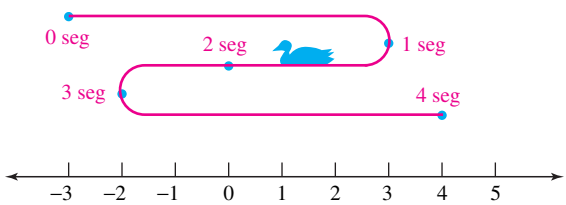
APLICACIONES

73. VUELO DE UNA PELOTA Un adolescente tira una pelota desde el techo de un edificio como se muestra en la figura. En el instante que lo hace, su amigo comienza a cronometrar el tiempo, la pelota sube hasta lo más alto y luego cae al suelo. Utilice una recta numérica vertical para completar la información de la tabla y determinar la posición de la pelota en cada tiempo especificado.



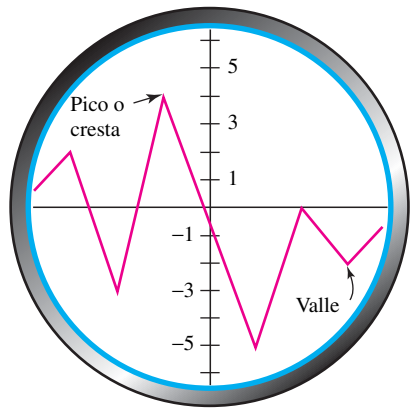
Tiempo	Posición de la pelota
1 seg	
2 seg	
3 seg	
4 seg	
5 seg	
6 seg	

74. JUEGO DE TIRO AL BLANCO En un parque de diversiones, el juego de tiro al blanco tiene unas figuras de patos en movimiento. La trayectoria que sigue uno de los patos es como se demuestra, además se indica el tiempo que le toma al pato para alcanzar ciertas posiciones. Complete la tabla utilizando la recta numérica horizontal de la ilustración.



Tiempo	Posición del pato
0 seg	
1 seg	
2 seg	
3 seg	
4 seg	

75. TECNOLOGÍA A continuación se indica la gráfica de un osciloscopio. Es importante conocer la altura de cada uno de los tres picos o crestas y la profundidad de cada uno de los tres valles. Utilice una recta numérica vertical para determinar esos números.



76. INUNDACIONES La tabla siguiente muestra las lecturas debido a una serie de reportes diarios que indican la altura de un río en comparación con la etapa de inundación. Complete la gráfica de barras en la ilustración.

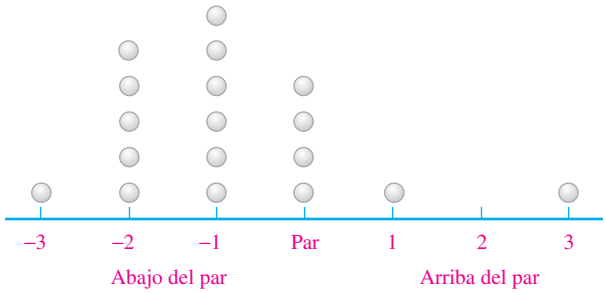
Informe de la etapa de inundación	
Dom.	2 pies debajo del límite
Lun.	3 pies sobre el límite
Mar.	4 pies sobre el límite
Miér.	2 pies sobre el límite
Jue.	1 pie debajo del límite
Vie.	3 pies debajo del límite
Sáb.	4 pies debajo del límite

77. GOLF En el golf el *par* es el número estándar de los golpes considerados necesarios para un hoyo. Una puntuación de −2 indica que el golfista utilizó 2 golpes menos que el par. Una puntuación de +2 significa que se hicieron 2 golpes adicionales al par. En la ilustración, cada pelota de golf representa la puntuación de un golfista profesional en el 16º hoyo de cierto campo de golf. La puntuación de +22 significa 2 golpes de más que el par.

a. ¿Cuál es la puntuación más frecuente para este hoyo?

b. ¿Cuál es la mejor puntuación para este hoyo?

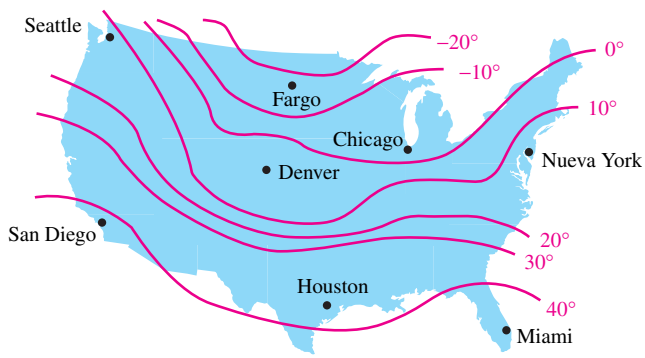
c. Explique por qué este hoyo parece ser muy fácil para un golfista profesional.



78. CHEQUERA Examine los artículos que se presentan en el siguiente talonario de cheques, después escriba dos columnas en la hoja, una estará indicada como "positivo" y la otra como "negativo". Relacione cada artículo debajo del encabezado apropiado.

Tom Dryden Dic. 04		Bono navideño	$100
Pago total	$2000	**Reducciones**	
Horas extra	$300	Fondo de retiro	$200
Deducciones		**Impuestos**	
Cuota sindical	$30	Pago de impuestos	
Bonos	$100	federales	$160
		Impuesto estatal	$35

79. MAPAS DEL ESTADO DEL TIEMPO La siguiente ilustración muestra las temperaturas en grados Fahrenheit pronosticadas para un día a mediados de enero.



a. ¿Cuál es el intervalo de temperatura para la región que incluye Fargo, Dakota del Norte?

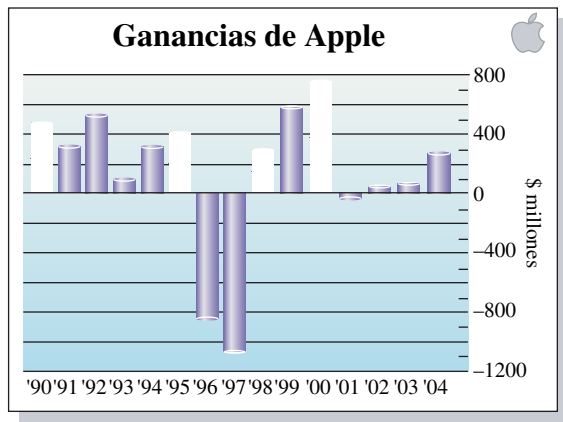
b. De acuerdo con el pronóstico, ¿cuál es la temperatura más cálida que llegará a tener Houston?

c. Conforme a este pronóstico, ¿cuál es la temperatura más fría a la que llegará Seattle?

80. GANANCIAS Y PÉRDIDAS La gráfica en la ilustración muestra el ingreso neto de Apple Computer Inc., para los años 2000 a 2004.

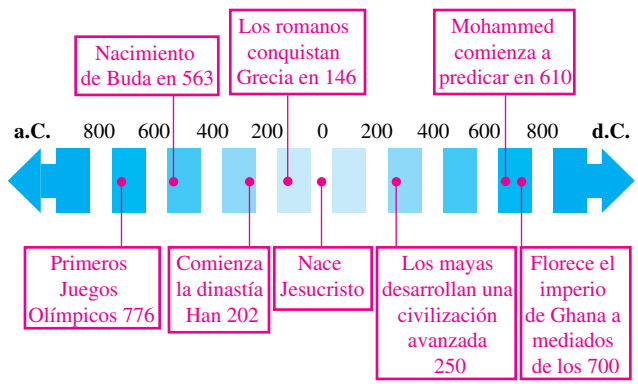
a. ¿En qué año la compañía sufrió una pérdida? Estime cada pérdida.

b. ¿En qué año Apple tuvo su máxima ganancia? Realice un estimado.



Fuente: Morningstar.com

81. HISTORIA Las rectas numéricas pueden utilizarse para mostrar datos históricos. Algunos sucesos importantes mundiales se indican en línea del tiempo de la ilustración.


Nacimiento de Buda en 563
Los romanos conquistan Grecia en 146
Mohammed comienza a predicar en 610
a.C. 800 600 400 200 0 200 400 600 800 d.C.
Primeros Juegos Olímpicos 776
Comienza la dinastía Han 202
Nace Jesucristo
Los mayas desarrollan una civilización avanzada 250
Florece el imperio de Ghana a mediados de los 700

a. ¿Qué unidad básica se utiliza en esta línea del tiempo?

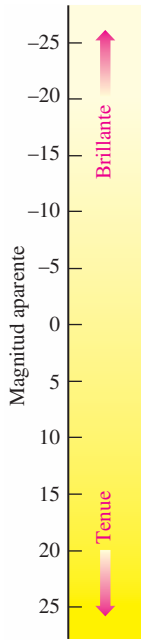
b. ¿Qué puede pensarse como números positivos?

c. ¿Qué puede pensarse como números negativos?

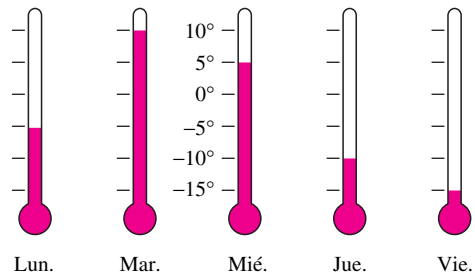
d. ¿Qué suceso importante distingue los números positivos de los números negativos?

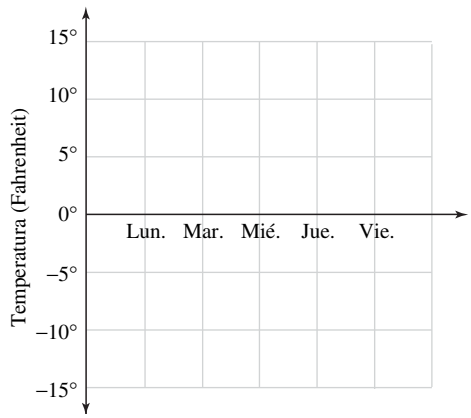
82. ASTRONOMÍA Los astrónomos utilizan una escala similar a una recta numérica llamada *escala de magnitud aparente* para indicar la brillantez de los objetos en el cielo. Cuanto más brillante aparece un objeto a un observador en la Tierra, tanto más negativa será su magnitud aparente. Grafique cada uno de los siguientes valores en la escala de la ilustración.

- Luna llena −12
- Plutón +15
- Sirio (una estrella brillante) −2
- Sol −26
- Venus −4
- Límite visual de binoculares +10
- Límite visual de un telescopio grande +20
- Límite visual del ojo +6



83. GRÁFICAS DE LÍNEA Cada termómetro de la ilustración muestra diariamente las temperaturas elevadas, en grados Fahrenheit. Grafique en papel cuadriculado la temperatura más elevada y después construya una gráfica de línea recta.



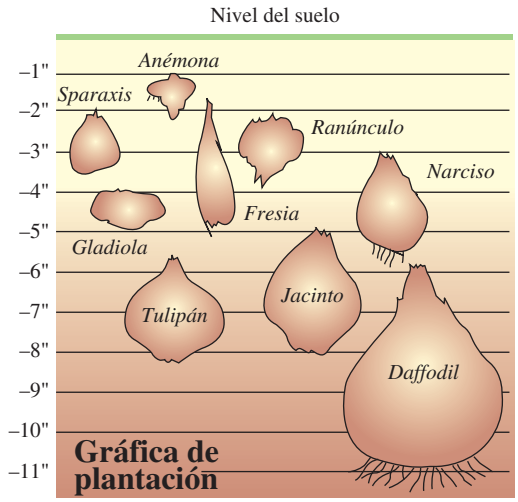


84. JARDINERÍA La ilustración de la siguiente columna muestra las profundidades a las cuales deberían plantarse las raíces de varios tipos de bulbos de flores. (El símbolo ″ representa pulgadas.)

a. ¿A qué profundidad debería plantarse un bulbo de tulipán?

b. ¿A qué profundidad adicional deben plantarse los bulbos del jacinto en comparación con los bulbos de las gladiolas?

c. ¿Qué bulbos deben plantarse con mayor profundidad? ¿A qué profundidad?



POR ESCRITO

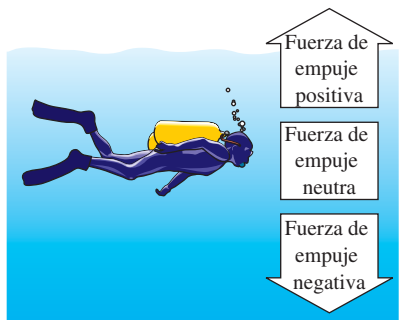
85. Explique el concepto de número opuesto.

86. ¿Qué situación de la vida real supone usted que originó el concepto de número negativo?

87. Explique por qué razón el valor absoluto de un número nunca es negativo.

88. Dé un ejemplo del uso de la recta numérica que haya visto en otro curso.

89. BUZOS Los buzos utilizan el término de *fuerza de empuje positiva, neutra* y *negativa,* como se muestra. ¿Qué significado pueden tener cada uno de estos términos?



90. NUEVA ORLEANS La ciudad de Nueva Orleans, Luisiana, está situada por debajo del nivel del mar. Averigua por qué la ciudad no está bajo el agua.

REPASO

91. Redondee 23 456 a la centena más cercana.

92. Evalúe: $19 - 2 \cdot 3$.

93. Reste 2081 de 2842.

94. Divida 345 entre 15.

95. Indique el nombre de la propiedad ilustrada aquí:

$$(13 \cdot 2) \cdot 5 = 13 \cdot (2 \cdot 5)$$

96. Escriba cuatro por cinco utilizando tres notaciones diferentes.

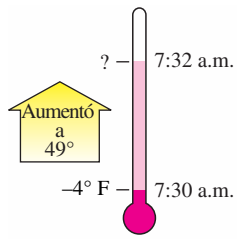
2.2 Suma de enteros

- Suma de dos enteros con el mismo signo
- Suma de dos enteros con signos diferentes
- La propiedad de adición del cero
- El inverso aditivo de un número

Un pronunciado cambio de temperatura ocurrió en 1943 en Spearfish, South Dakota. En enero 22 a las 7:30 a.m., la temperatura era −4°F. ¡En sólo dos minutos la temperatura llegó a 49 grados! Para evaluar la temperatura a las 7:32 a.m. necesitamos sumar 49 a −4

$$-4 + 49$$

Para realizar la suma debemos saber cómo sumar enteros positivos y negativos. En esta sección desarrollamos reglas para que nos permitan llevar a cabo dichos cálculos.



Suma de dos enteros con el mismo signo

$4 + 3$
ambos positivos

Para explicar la suma de números con signo podemos utilizar la recta numérica (vea la figura 2.9.) Para evaluar 4 + 3, comenzaremos en el origen (el punto marcado con 0) y dibujemos una flecha que apunte a la derecha y abarque cuatro unidades. Esto representa el 4 positivo. Desde ese punto dibujamos una flecha que abarque 3 unidades, que apunte, a la derecha para representar un 3 positivo. La segunda flecha apunta a la respuesta, por tanto, 4 + 3 = 7.

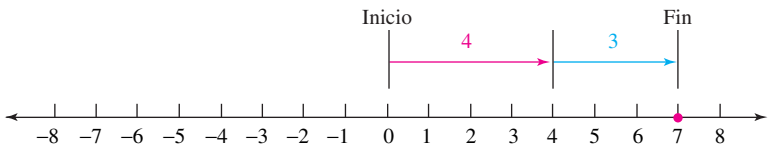


FIGURA 2.9

Para verificar nuestro trabajo, pensemos el problema en términos de dinero. Si se tienen $4 y se ganan $3 adicionales se tendrá un total de $7.

$-4 + (-3)$
ambos negativos

Para calcular −4 + (−3), comenzamos en el punto de origen y dibujamos una flecha que apunte a la izquierda y abarque 4 unidades de largo (vea la figura 2.10.) Esto representa −4. Desde allí dibujamos una flecha que abarque 3 unidades señalando a la izquierda, lo cual representa −3. La segunda flecha apunta la respuesta: −4 + (−3) = −7.

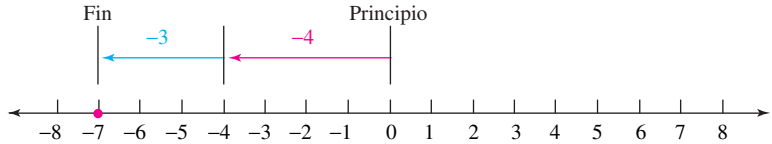


FIGURA 2.10

Para comprobar nuestro trabajo, pensemos el problema en términos de dinero. Si se tiene una deuda de \$4 (4 negativo) y después se adquiere una deuda de \$3 adicionales (3 negativo), entonces se tendrá una deuda de \$7 (7 negativo).

Aquí están algunas observaciones del proceso de suma de dos números que tienen el mismo signo utilizando la recta numérica.

- Ambas flechas apuntan en el mismo sentido y se "construyen" una con otra.
- La respuesta tiene el mismo signo como los dos números que se suman.

4	+	3	=	7		−4	+	(−3)	=	−7	
Positivo	+	positivo	=	respuesta positiva		Negativo	+	negativo	=	respuesta negativa	

Estas observaciones sugieren la siguiente regla.

Suma de dos enteros con el mismo signo

Para sumar dos enteros con el mismo signo, sume sus valores absolutos y escriba su signo común a la suma. Si ambos enteros son positivos, entonces la suma es positiva, si ambos son negativos, la suma es negativa.

Comentario Cuando se escriben sumas que incluyen números con signo, se deben escribir los números negativos dentro de paréntesis para separar el signo − del signo +.

$9 + (-4)$ $\quad 9 + -4$ $\quad$ y $\quad -9 + (-4)$ $\quad -9 + -4$

EJEMPLO 1

Calcule la suma: $-9 + (-4)$.

Solución

Paso 1: Para sumar dos enteros con el mismo signo, primero sumamos el valor absoluto de cada uno de los enteros. Puesto que $|-9| = 9$ y $|-4| = 4$, comenzamos por sumar 9 y 4.

$$9 + 4 = 13$$

Paso 2: Entonces escribimos el signo común (el cual es negativo) a este resultado. Así pues,

$$-9 + (-4) = -13$$

↑ Hace la respuesta negativa

Después de practicar usted será capaz de resolver este tipo de problemas mentalmente. No será necesario que indique todos los pasos que se han realizado aquí.

Autoevaluación 2

Determine la suma:

a. $7 + 5$

b. $-300 + (-100)$

Respuestas **a.** 12, **b.** −400

EJEMPLO 2

Encuentre el resultado de la suma: **a.** $6 + 4$ y **b.** $-80 + (-60)$.

Solución

a. Como los dos enteros son positivos, la respuesta es positiva.

$$6 + 4 = 10$$

b. Como ambos enteros son negativos, la respuesta es negativa.

$$-80 + (-60) = -140$$

Suma de dos enteros con signos diferentes

4 + (−3)
uno positivo,
uno negativo

Para calcular 4 + (−3), comenzaremos en el origen y dibujaremos una flecha que abarque 4 unidades de largo que apuntan a la derecha (vea la figura 2.11.) Esto representa un 4 positivo. A partir de ahí se dibuja otra flecha de 3 unidades de largo, que apunte hacia la izquierda, esto representa −3. La segunda flecha apunta a la respuesta: 4 + (−3) = 1.

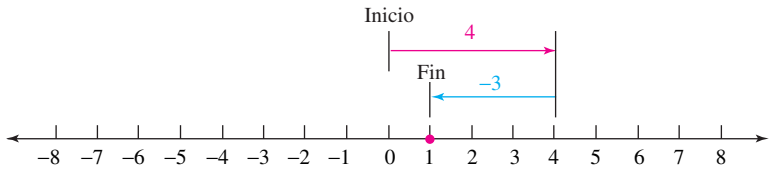


FIGURA 2.11

En términos de dinero, si se tenía $4 (4 positivo) y después se adquirió una deuda de $3 (3 negativo), al final se obtendrá $1 (1 positivo).

−4 + 3
uno negativo,
uno positivo

El problema de −4 + 3 puede ilustrarse dibujando una flecha 4 unidades de largo desde el origen y que apunte hacia la izquierda (vea la figura 2.12). Ésta representa a −4. Desde ahí se dibuja una flecha de 3 unidades de longitud apuntando a la derecha, la cual representará un 3 positivo, la segunda flecha apunta a la respuesta: −4 + 3 = −1.

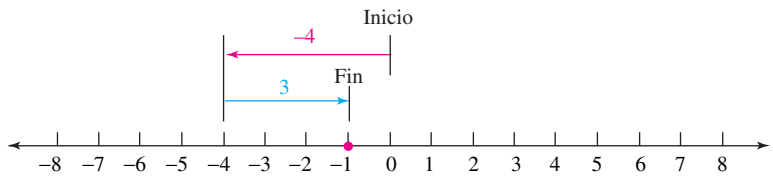


FIGURA 2.12

Este problema puede pensarse al ganar $4 (4 negativo) y después pagar $3 (3positivo). Pero en este caso sigue debiendo $1 (1 negativo)

Los dos últimos ejemplos nos llevan a hacer algunas observaciones respecto de la suma de dos enteros con signos diferentes, utilizando la recta numérica.

- Las flechas que representan a los enteros apuntan en distintas direcciones.
- La longitud más larga de las dos flechas determina el signo de la respuesta.

Estas observaciones sugieren la siguiente regla.

Adición o suma de dos enteros con diferentes signos

Para sumar dos enteros con distintos signos, se restan sus valores absolutos, el menor del mayor. Después a este resultado se le pone el signo del entero con el valor absoluto mayor.

EJEMPLO 3 Calcule la suma: $5 + (-7)$.

Solución

Paso 1: Para sumar dos enteros con distinto signo, primero restamos el valor absoluto del menor al del mayor. Como $|5|$, (que es 5) es menor que $|-7|$, el cual es 7, entonces comenzamos al restar 5 de 7.

$$7 - 5 = 2$$

Paso 2: -7 tiene el mayor valor absoluto, así que escribimos un signo negativo a la respuesta del paso 1. Así:

$$5 + (-7) = -2$$

Hace la respuesta negativa.

Autoevaluación 4

Encuentre la suma:

a. $-2 + 7$

b. $6 + (-9)$

Respuestas **a.** 5, **b.** -3

EJEMPLO 4 Calcule la suma: **a.** $-8 + 5$ y **b.** $11 + (-5)$.

Solución

a. Como -8 tiene el mayor valor absoluto, la respuesta es negativa.

$-8 + 5 = -3$ Como los signos de los números son diferentes, reste sus valores absolutos, 5 de 8, y se obtiene 3. Se coloca un signo negativo a ese resultado.

b. Puesto que 11 tiene el valor absoluto mayor, la respuesta es positiva.

$11 + (-5) = 6$ Restar el valor absoluto, 5 de 11, para obtener 6. La respuesta es positiva.

PARA PENSAR A DETALLE — Flujo de efectivo

"La universidad puede constituir una prueba de fuego, un reto en el que se tiene que trabajar bajo presión, hacer buen uso de la libertad, se está expuesto a muchas distracciones, y además uno se encuentra bombardeado por una gran cantidad de ofertas de crédito. Resulta fácil llegar a un ciclo de gasto excesivo y de una innecesaria deuda para el alumno" Texto tomado de *Planeación para la vida universitaria, del Banco Wells Fargo.*

Si su ingreso es inferior a sus gastos, entonces usted tiene un flujo *negativo* de efectivo, que puede representarse con una bandera roja, como signo que debería aumentar sus ingresos y/o reducir sus gastos. ¿Cuál de las siguientes actividades pueden aumentar su ingreso y cuáles gastos se pueden reducir?

- Compra genéricos o artículos de marca de la tienda.
- Obtención de capacitación y/o más educación.
- Uso de la credencial de alumno para obtener descuentos en tiendas, eventos, etcétera.
- Trabajar más tiempo.
- Convertir un pasatiempo o habilidad en un negocio que permita obtener ingresos.
- Dar asesorías particulares a alumnos más jóvenes.
- Dejar los hábitos caros, como fumar, comprar panecillos diariamente, etcétera.
- Asistir a actividades gratuitas o ir en días de descuentos o gratis a centros de atracción.
- Vender artículos que se usan poco, como el viejo reproductor de discos compactos.
- Comparar precios de por lo menos 3 productos, o en al menos comparar los precios de 3 tiendas, antes de comprar.

Basado en *Building Financial Skills* por la Nacional Endowment for Financial Education.

EJEMPLO 5 **Cambio de temperatura.** Al principio de esta sección, aprendimos que a las 7:30 a.m. del 22 de enero de 1943, en Spearfish, South Dakota, la temperatura era de $-4°$. La temperatura llegó a los 49 grados en sólo dos minutos. ¿Cuál era la temperatura a las 7:32 A.M.?

Solución La frase *la temperatura alcanzó 49 grados* indica que es suma. Necesitamos sumar 49 a -4.

$$-4 + 49 = 45$$ Restar el menor valor absoluto, 4, del mayor valor absoluto, 49. La suma es positiva.

A las 7:32 A.M., la temperatura era de 45°F

EJEMPLO 6 Sume: $-3 + 5 + (-12) + 2$.

Solución Esta expresión tiene cuatro enteros. Los sumamos, de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned} -3 + 5 + (-12) + 2 &= 2 + (-12) + 2 && \text{Suma: } -3 + 5 = 2. \\ &= -10 + 2 && \text{Suma: } 2 + (-12) = -10. \\ &= -8 \end{aligned}$$

Autoevaluación 6
Sume: $-12 + 8 + (-6) + 1$

Respuesta -9

Una alternativa a los problemas como el ejemplo 6 es sumar todos los números positivos, sumar todos los números negativos y, entonces, sumar los resultados.

EJEMPLO 7 Encuente la suma: $-3 + 5 + (-12) + 2$.

Solución Podemos utilizar la propiedad conmutativa de la suma al reordenar los números y utilizar la propiedad asociativa de la suma al grupo de positivos juntos y negativos juntos.

$$\begin{aligned} -3 + 5 + (-12) + 2 &= \mathbf{5} + \mathbf{2} + (\mathbf{-3}) + (\mathbf{-12}) && \text{Reordenar los números.} \\ &= (\mathbf{5} + \mathbf{2}) + [(\mathbf{-3}) + (\mathbf{-12})] && \text{Agrupar los positivos. Agrupar los negativos.} \end{aligned}$$

Primero realizaremos las operaciones dentro de los símbolos de agrupación.

$$\begin{aligned} (\mathbf{5} + \mathbf{2}) + [(\mathbf{-3}) + (\mathbf{-12})] &= \mathbf{7} + (\mathbf{-15}) && \text{Sumar los positivos. Sumar los negativos.} \\ &= -8 && \text{Sumar los números con diferente signo.} \end{aligned}$$

Autoevaluación 7
Calcule la suma

$$-12 + 8 + (-6) + 1$$

Respuesta -9

EJEMPLO 8 Evalúe: $[-1 + (-5)] + (-7 + 5)$.

Solución De acuerdo a lo que indican las reglas del orden de las operaciones, primero se deben realizar las operaciones que están dentro de los símbolos de agrupación.

$$\begin{aligned} [\mathbf{-1 + (-5)}] + (\mathbf{-7 + 5}) &= \mathbf{-6} + (\mathbf{-2}) && \text{Realizar la suma dentro de los corchetes. Realizar la suma dentro de los paréntesis.} \\ &= -8 && \text{Sumar los números con el mismo signo.} \end{aligned}$$

Autoevaluación 8
Calcula:

$$-6 + (-8) + [10 + (-17)]$$

Respuesta -21

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Números negativos

Nigeria es el segundo socio comercial aficano más grande de Estados Unidos. Para calcular el balance comercial de Nigeria con Estados Unidos en 2002, sumamos \$1 057 700 000 de las exportaciones a Nigeria (considerado positivo) al \$5 945 300 000, en importación de Nigeria (considerado negativo). Podemos utilizar una calculadora científica para realizar la suma: 1 057 700 000 + (−5 945 300 000).

- No tenemos que hacer nada especial para ingresar un número positivo. Cuando usamos las teclas en 1 057 700 000 hemos capturado un número positivo.
- Para capturar −5 945 300 000, oprimimos la tecla de cambio de signo [+/−] *después de introducir* 5 945 300 000. Observe que la tecla de cambio de signo es diferente de la tecla de la resta [−].

1057700000 [+] 5945300000 [+/−] [=] -4887600000

En el 2002, Estados Unidos tenía un balance comercial de −\$4 887 600 000, con Nigeria. Como el resultado es negativo, lo llamaremos *déficit comercial.*

La propiedad de adición del cero

Cuando se suma 0 a un número, éste permanece igual. Por ejemplo, 5 + 0 = 5, y 0 + (−4) = −4. Por esta razón, el 0 se conoce como **identidad aditiva.**

Propiedad de adición del 0

La suma de cualquier número y 0 es ese número.

El inverso aditivo de un número

Un segundo hecho relacionado con el 0 y la operación de la suma puede demostrarse al considerar la suma de un número y su opuesto. Para ilustrarlo, utilizamos la recta numérica de la figura 2.13 para sumar 6 y su opuesto, −6. Vemos que 6 + (−6) = 0.

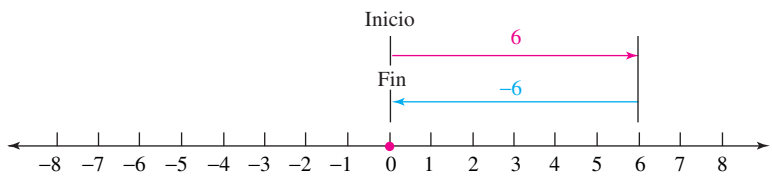


FIGURA 2.13

Si la suma de dos números es 0, los números se consideran los **inversos aditivos** el uno del otro. Como 6 + (−6) = 0, decimos que 6 y −6 son inversos aditivos.

Ahora podemos clasificar un par de números como 6 y −6 de tres maneras: como opuestos, negativos o inversos aditivos.

El inverso aditivo de un número

Dos números se consideran **inversos aditivos** si su suma es 0.

EJEMPLO 9 ¿Cuál es el inverso aditivo de -3? Justifique su resultado.

Solución El inverso aditivo de -3 es su opuesto, 3. Para justificar el resultado, realicemos la suma y veremos que el resultado es 0.

$$-3 + 3 = 0$$

Autoevaluación 9
¿Cuál es el inverso aditivo de 12? Justifique su resultado.

Respuesta -12; $12 + (-12) = 0$

Sección 2.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Cuando 0 se suma a otro número, el número permanece igual. Le llamamos 0 al _____ aditivo.
2. Puesto que $-5 + 5 = 0$, decimos que 5 es el _____ aditivo de -5. También podemos decir que 5 y -5 son _____ .

CONCEPTOS *Encuentre cada respuesta utilizando la recta numérica.*

3. $-3 + 6$
4. $-3 + (-2)$
5. $-5 + 3$
6. $-1 + (-3)$

7. **a.** ¿Es la suma de dos enteros positivos siempre positiva?
   b. ¿Es la suma de dos enteros negativos siempre negativa?
8. **a.** ¿Cuál es la suma de un número y su inverso aditivo?
   b. ¿Cuál es la suma de un número y su opuesto?
9. Encuentre el valor absoluto.
   a. $|-7|$ **b.** $|10|$
10. Si la suma de dos números es 0, ¿qué podemos decir acerca de los números?

Llene los espacios en blanco.

11. Para sumar dos enteros con signos distintos, _____ sus valores absolutos, el menor del mayor. Después se antepone a ese resultado el signo del número con el _____ valor absoluto.
12. Para sumar dos enteros con signos iguales, sume sus valores _____ y coloque su _____ común a la suma

NOTACIÓN *Complete cada solución para evaluar la expresión.*

13. $-16 + (-2) + (-1) = \square + (-1)$
    $= \square$
14. $-8 + (-2) + 6 = \square + 6$
    $= \square$
15. $(-3 + 8) + (-3) = \square + (-3)$
    $= \square$
16. $-5 + [2 + (-9)] = -5 + (\square)$
    $= \square$
17. Explique por qué razón las expresiones $-6 + -5$ no están correctamente escritas. ¿Cómo deberían escribirse?
18. ¿Qué símbolo matemático se sugiere cuando se utiliza la palabra *suma*?

PRÁCTICA *Encuentre el inverso aditivo de cada número.*

19. -11
20. 9
21. -23
22. -43
23. 0
24. 1
25. 99
26. 250

Encuentre el resultado de cada una de las sumas.

27. $-6 + (-3)$
28. $-2 + (-3)$
29. $-5 + (-5)$
30. $-8 + (-8)$
31. $-6 + 7$
32. $-2 + 4$
33. $-15 + 8$
34. $-18 + 10$
35. $20 + (-40)$
36. $25 + (-10)$
37. $30 + (-15)$
38. $8 + (-20)$
39. $-1 + 9$
40. $-2 + 7$
41. $-7 + 9$
42. $-3 + 6$
43. $5 + (-15)$
44. $16 + (-26)$
45. $24 + (-15)$
46. $-4 + 14$
47. $35 + (-27)$
48. $46 + (-73)$
49. $24 + (-45)$
50. $-65 + 31$

Evalúe cada expresión.

51. $-2 + 6 + (-1)$
52. $4 + (-3) + (-2)$
53. $-9 + 1 + (-2)$
54. $5 + 4 + (-6)$
55. $6 + (-4) + (-13) + 7$
56. $8 + (-5) + (-10) + 6$
57. $9 + (-3) + 5 + (-4)$
58. $-3 + 7 + 1 + (-4)$
59. Encuentre la suma de -6, -7 y -8.
60. Encuentre la suma de -11, -12 y -13.

Encuentre cada suma.

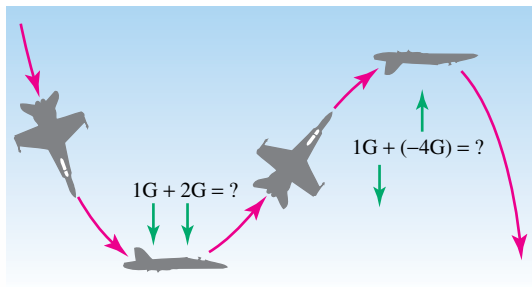
61. $-7 + 0$
62. $6 + 0$
63. $9 + 0$
64. $0 + (-15)$
65. $-4 + 4$
66. $18 + (-18)$
67. $2 + (-2)$
68. $-10 + 10$
69. ¿Qué número debe sumarse a -5 para obtener 0?
70. ¿Qué número debe sumarse a 8 para obtener 0?

Evalúe cada expresión.

71. $2 + (-10 + 8)$
72. $(-9 + 12) + (-4)$
73. $(-4 + 8) + (-11 + 4)$
74. $(-12 + 6) + (-6 + 8)$
75. $[-3 + (-4)] + (-5 + 2)$
76. $[9 + (-10)] + (-7 + 9)$
77. $[6 + (-4)] + [8 + (-11)]$
78. $[5 + (-8)] + [9 + (-15)]$
79. $-2 + [-8 + (-7)]$
80. $-8 + [-5 + (-2)]$
81. $789 + (-9135)$
82. $2701 + (-4089)$
83. $-675 + (-456) + 99$
84. $-9750 + (-780) + 2345$

APLICACIONES *Utilice números con signo para ayudar a responder cada pregunta.*

85. FUERZAS G Cuando un piloto de combate desciende y hace vueltas en el aire, distintas fuerzas actúan sobre el cuerpo, al igual que las fuerzas que se experimentan al subirse en una montaña rusa. Algunas de las fuerzas, llamadas G, son positivas y otras son negativas. La fuerza de la gravedad, 1G, es constante. Complete el diagrama de la siguiente columna.



86. QUÍMICA Los primeros pasos del laboratorio de química se listan aquí. El experimento comienza con un compuesto que se almacena a $-40°$F.

Paso 1: Aumente la temperatura del compuesto a 200°.
Paso 2: Añada azufre y luego aumente la temperatura a 10°.
Paso 3: Añada 10 mililitros de agua, agite y suba la temperatura a 25°.

¿Cuál es la temperatura resultante de la mezcla después del paso 3?

87. FLUJO DE EFECTIVO Los costos de mantenimiento, electricidad e impuestos de un departamento dúplex son de $900 al mes. El dueño de los departamentos recibe pagos de renta mensual de $450 y $380. ¿Produce esta inversión un flujo positivo de efectivo cada mes?

88. Un hombre de negocios hace ejercicios en su hora de almuerzo subiendo 10 pisos hasta su oficina. Si comienza su ascenso desde el cuarto nivel del estacionamiento subterráneo, ¿en qué piso del edificio está su oficina?

89. SALUD Encuentre la puntuación total de 6 factores de riesgo (en azul) del cuestionario médico que se muestra a continuación. Después utilice la tabla de abajo para determinar el riesgo de contraer una enfermedad cardíaca para una persona cuyas respuestas se muestran en la gráfica.

Edad		Colesterol total	
Edad	Puntos	Lectura	Puntos
35	−4	280	3

Colesterol		Presión arterial	
HDL	Puntos	Sistólico/Diastólico	Puntos
62	−3	124/100	3

Diabético		Fumador	
	Puntos		Puntos
Sí	4	Sí	2

Riesgo de contraer una enfermedad cardíaca en 10 años

Puntuación total	Riesgo	Puntuación total	Riesgo
−2 o menos	1%	5	4%
−1 a 1	2%	6	6%
2 a 3	3%	7	6%
4	4%	8	7%

Fuente: Instituto Nacional de Cardiología y Neumología.

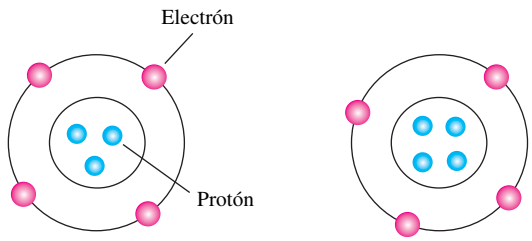
90. HOJAS DE CÁLCULO El total de lluvias mensual en cuatro condados está listado en las hojas de cálculo de abajo. El **−1** en la celda B1 significa que el total de lluvia en el condado de Suffolk para cierto mes era una pulgada menos que lo calculado. Podemos analizar los datos al pedirle a la computadora que realice varias operaciones.

a. Al pedirle a la computadora que sume los números de las celdas C1, C2, C3 y C4, escribimos SUM(C1:C4). Encuentre esta suma.

b. Encuentre SUM(B4:F4).

	A	B	C	D	E	F
1	Suffolk	**−1**	−1	0	+1	+1
2	Marin	0	−2	+1	+1	−1
3	Logan	−1	+1	+2	+1	+1
4	Tipton	−2	−2	+1	−1	−3

91. ÁTOMOS Un átomo está compuesto por protones, neutrones y electrones. Un protón tiene una carga positiva (representada por +1), un neutrón no tiene carga y el electrón tiene carga negativa (−1). En la siguiente figura se muestran dos modelos sencillos de átomos. ¿Cuál es la carga neta de cada átomo?



(a) **(b)**

92. SONDEO POLÍTICO Seis meses antes de una elección general, el senador titular se encontró que iba atrás de su opositor por 18 puntos. Para alcanzar a su adversario, el personal de la campaña decidió utilizar una estrategia de cuatro partes. Cada parte de este plan se muestra abajo, con la ganancia anticipada de la puntuación.

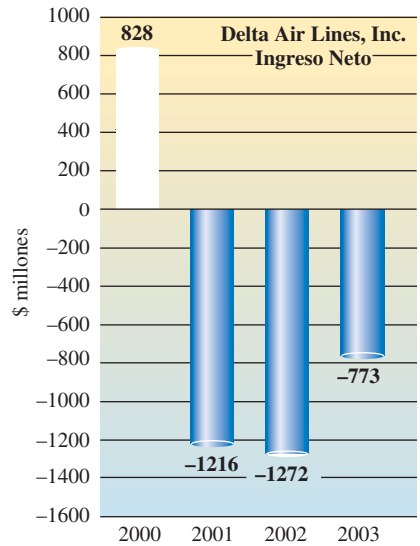
1. Campaña intensa en TV +10
2. Pedir apoyos de simpatizantes +2
3. Correos a votantes +3
4. Campaña de salir a conseguir votos +1

Con estos puntos ganados, ¿alcanzará el senador titular al contrincante el día de las elecciones?

93. INUNDACIÓN Después de una tormenta de lluvia muy fuerte, un río que había estado 4 pies debajo del nivel de inundación subió 11 pies en un período de 48 horas. Encuentre la altura del río después de la tormenta en comparación con el nivel de inundación.

94. CIENCIA MILITAR Durante una batalla el ejército retrocedió 1500 metros, se reagrupó y avanzó 3500 metros. Al día siguiente, tuvo que retroceder 1250 metros. Determine la ganancia neta del ejército.

95. AEROLÍNEAS En la gráfica siguiente se muestra el ingreso neto anual de la aerolínea Delta Airlines durante los años 2000 y 2003. Estime el ingreso total de la compañía en este período de cuatro años.



Fuente: Hoover's Online

96. CONTABILIDAD En una hoja de saldo financiero las deudas (consideradas como números negativos) se anotan entre paréntesis. Las ganancias (consideradas números positivos) se escriben sin paréntesis. ¿Cuál es el saldo del 2004 de la escuela preescolar cuyo registro financiero se muestra?

Centro de educación preescolar Comunity Care
Hoja de balance, Junio 2004

Balance de fondos	
Material para clase	$ 5889
Emergencias	927
Programa de vacaciones	(2928)
Seguro	1645
Portero	(894)
Licencia	715
Matenimiento	(6321)
Saldo	?

ESCRITO

97. ¿Es la suma de un número positivo y un número negativo siempre positiva? Explique por qué sí o por qué no.

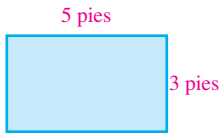
98. ¿Cómo explica lo siguiente, cuando se pide *sumar* −4 y 8 lo que en realidad sucede es que se *restan ambas cantidades* para obtener el resultado?

99. ¿Por qué motivo la suma de dos números negativos es un número negativo?

100. Escriba un problema de aplicación en el que se tenga que sumar -50 y -60.

REPASO

101. Encuentre el área del siguiente rectángulo.



102. El tanque de un automóvil se llena con 15 galones de gasolina y recorre 25 millas por galón. ¿Cuánto recorrerá con el tanque lleno?

103. Encuentre el perímetro del rectángulo del ejercicio 101.

104. ¿Qué propiedad se ilustra en el planteamiento $5 \cdot 15 = 15 \cdot 5$?

105. Halle los factores primos de 125. Utilice exponentes para expresar el resultado.

106. Realice la división: $\frac{144}{12}$.

2.3 Resta de enteros

• Suma de opuestos • Orden de las operaciones • Aplicaciones de la resta

En esta sección, estudiamos otra forma de pensar en relación con la resta. Este nuevo procedimiento es útil cuando problemas de resta contienen números negativos.

Suma de opuestos

El problema de resta $6 - 4$ puede pensarse en quitar 4 de 6. Podemos utilizar la recta numérica para ilustrarlo. (Vea figura 2.14). Comenzamos en el origen, dibujamos una flecha de 6 unidades de longitud en la dirección positiva. De este punto retrocederemos 4 unidades a la izquierda. La respuesta, llamada **diferencia,** es 2.

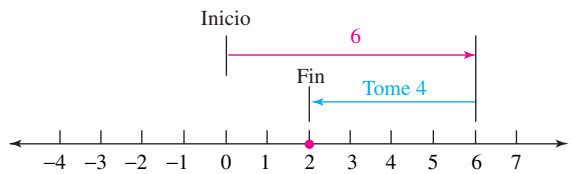


FIGURA 2.14

El trabajo mostrado en la figura 2.14 parece como la ilustración de la *suma* de $6 + (-4) = 2$, que se muestra en la figura 2.15.

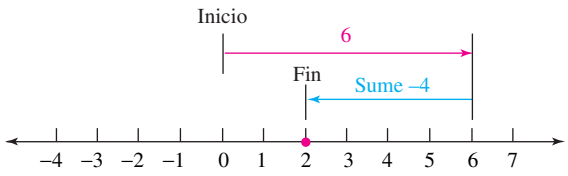


FIGURA 2.15

En el primer problema, $6 - 4$, restamos 4 de 6. En el segundo, $6 + (-4)$, sumamos -4 (que es el opuesto de 4) a 6. En cada caso, el resultado fue 2.

Restar — Sumar el opuesto de 4

$6 - 4 = 2$ $\qquad$ $6 + (-4) = 2$

El mismo resultado

Esta observación ayuda a justificar la siguiente regla para la resta.

Regla para la resta

Para restar dos enteros, sumamos el opuesto del segundo entero al primer entero.

En palabras, esta regla dice que *la resta es lo mismo que sumar el opuesto del número que va a restar.*

Cabe indicar que no es necesario utilizar esta regla para cada problema de resta. Por ejemplo, $6 - 4$ es obviamente 2; no es necesario reescribir cuando se suma el opuesto. Pero para problemas más complicados como $-6 - 4$ o $3 - (-5)$, donde el resultado no es obvio, la regla de la resta será muy útil.

EJEMPLO 1

Resta: $-6 - 4$.

Solución El número que se va restar es 4. Si se aplica la regla de la resta escribimos

$-6 - 4 = -6 + (-4)$ Se escribe la resta como una suma del opuesto de 4, que es -4. Se escribe 4 dentro de paréntesis.

$= -10$ Para sumar -6 y -4, aplicamos la regla para sumar dos números negativos.

Para verificar el resultado, sumamos la diferencia, -10, y al sustraendo, 4. Debemos obtener el minuendo, -6.

$-10 + 4 = -6$

La respuesta es -10.

Autoevaluación 1

Encuentre $-2 - 3$ y verifique el resultado.

Respuesta -5

EJEMPLO 2

Reste: $3 - (-5)$.

Solución El número que se resta es -5.

$3 - (-5) = 3 + 5$ Escriba la resta como suma del opuesto de -5, el cual es 5.

$= 8$ Realice la suma.

Autoevaluación 2

Reste: $3 - (-2)$

Respuesta 5

Autoevaluación 3
Reste -8 de -3.

Respuesta 5

EJEMPLO 3 Resta -3 de -8.

Solución El número por restar es -3, así que lo escribimos después del -8.

$$-8 - (-3) = -8 + 3 \quad \text{Sume el opuesto de } -3, \text{ que es 3.}$$
$$= -5 \quad \text{Realice la suma.}$$

Recuerde que cualquier problema de resta puede volver a escribirse como una suma equivalente. Sólo sume el opuesto del número que se restará.

La resta puede escribirse como suma . . .

$$4 - 8 = 4 + (-8) = -4$$
$$4 - (-8) = 4 + 8 = 12$$
$$-4 - 8 = -4 + (-8) = -12$$
$$-4 - (-8) = -4 + 8 = 4$$

del opuesto del número por restar.

Orden de las operaciones

Las expresiones pueden contener restas repetidas o combinaciones con símbolos de agrupación. Para trabajar con estos problemas, aplicamos las reglas para el orden de las operaciones, las cuales se mencionaron en la página 58.

Autoevaluación 4
Evalúe: $-3 - 5 - (-1)$

Respuesta -7

EJEMPLO 4 Evalúe: $-1 - (-2) - 10$.

Solución Este problema contiene dos restas. Trabajamos de izquierda a derecha, volvemos a escribir cada resta como la suma del opuesto.

$$-1 - (-2) - 10 = -1 + 2 + (-10)$$ Se suma el opuesto de -2, que es 2. Sume el opuesto de 10, que es -10. Escriba -10 entre paréntesis.

$$= 1 + (-10)$$ Trabaje de izquierda a derecha. Sume $-1 + 2$.

$$= -9$$ Realice la suma.

Autoevaluación 5
Evalúe: $-2 - (-6 - 5)$

Respuesta 9

EJEMPLO 5 Evalúe: $-8 - (-2 - 2)$.

Solución Primero se debe realizar la resta dentro del paréntesis.

$$-8 - (-2 - 2) = -8 - [-2 + (-2)]$$ Sume el opuesto de 2, que es -2. Como -2 debe escribirse dentro del paréntesis, escriba $-2 + (-2)$ en el interior de los corchetes.

$$= -8 - (-4)$$ Sume -2 y -2. Ya que ahora sólo es necesario un conjunto de símbolos de agrupación, escriba -4 dentro del paréntesis.

$$= -8 + 4$$ Sume el opuesto de -4, que es 4.

$$= -4$$ Realice la suma.

Aplicaciones de la resta

En nuestra vida diaria las cosas cambian continuamente. La temperatura, la cantidad de dinero que tenemos en el banco y nuestras edades, son ejemplos. En matemáticas, la operación de resta se utiliza para medir cambio.

Comentario En general, para encontrar el cambio en una cantidad, restamos el valor anterior del posterior.

EJEMPLO 6 **Cambio del nivel del agua.** El lunes, el nivel del agua en un tanque de almacenamiento de la ciudad era de 6 pies sobre el nivel normal, para el viernes el nivel había bajado a 4 pies por debajo de lo normal. Encuentre el cambio en el nivel del agua de lunes a viernes (vea figura 2.16).

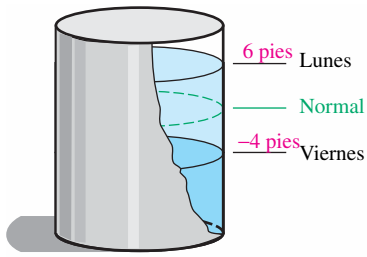


FIGURA 2.16

Solución Utilizamos la resta para encontrar una cantidad de cambio. Los niveles del agua de 4 pies debajo del nivel normal (el último valor) y 6 pies sobre el nivel normal (el valor anterior) pueden representarse mediante -4 y 6, respectivamente.

Nivel del agua el viernes	menos	Nivel del agua el lunes	es	Cambio del nivel del agua

$$-4 - 6 = -4 + (-6) \quad \text{Sume el opuesto de 6, que es } -6.$$
$$= -10 \quad \text{Realice la suma. El resultado negativo indica que el nivel del agua decreció.}$$

El nivel del agua bajó 10 pies de lunes a viernes.

En el siguiente ejemplo, la recta numérica sirve como modelo matemático de una situación real. En consecuencia la operación de resta se utiliza para encontrar la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica.

EJEMPLO 7 **Artillería.** En una sesión de práctica, un grupo de artillería disparó dos veces a un blanco. El primero, quedó corto por 65 yardas del objetivo y el segundo, lo pasó por 50 yardas. (Vea la figura 2.17). ¿Cuál fue la distancia de separación entre los dos puntos del impacto?

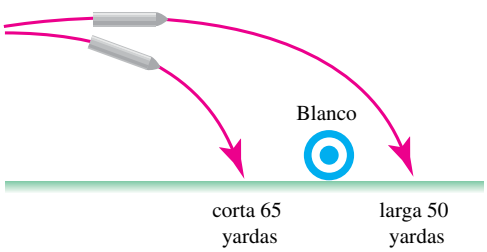


FIGURA 2.17

Solución Podemos utilizar la recta numérica para modelar esta situación. El blanco es el punto de origen, las palabras *tiro corto* indican un número negativo, y las palabras *lo pasó* indican un número positivo. Así pues, graficamos los puntos de impacto en la gráfica en -65 y 50 en la figura 2-18.

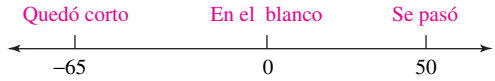


FIGURA 2.18

La frase *cuán lejos estaban* nos indica que es resta.

La posición de tiro largo	menos	la posición de tiro corto	es	la distancia entre dos puntos de impacto

$$50 - (-65) = 50 + 65 \quad \text{Suma el opuesto de } -65.$$
$$= 115 \quad \text{Se realiza la suma.}$$

Los puntos de impacto se encuentran separados 115 yardas.

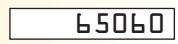
INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Resta con números negativos

El pico más alto del mundo es el Everest en el Himalaya. La profundidad más grande del océano que se ha medido se encuentra en un lugar llamado Mariana Trench cerca de la Isla de Guam en el Pacífico Occidental, (Vea la figura 2.19). Para determinar la distancia entre el pico más alto y la profundidad más grande, debemos restar.

$$29\,035 - (-36\,025)$$

Para realizar esta resta se utiliza una calculadora científica, introducimos estos números y después oprimimos estas teclas.

29035 [−] 36025 [+/−] [=]



El intervalo es 65 060 pies entre el pico más alto y la profundidad más baja. Podríamos haber aplicado la regla de la resta para escribir $29\,035 - (-36\,025)$ como $29\,035 + 36\,025$ antes de utilizar la calculadora.

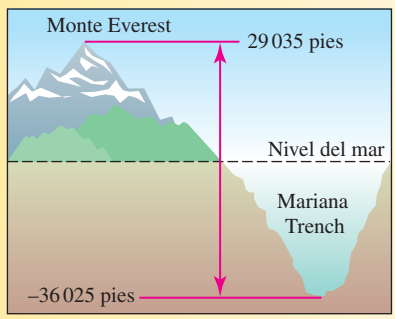


FIGURA 2.19

Sección 2.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. La respuesta a un problema de sustracción o resta se llama _____.
2. Dos números que están a la misma distancia de 0 en la recta numérica, pero en los lados opuestos de ésta, se llaman _____.

CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

3. La sustracción o resta es lo mismo que _____ el _____de los números que se van a restar.
4. Restar 3 es lo mismo que sumar _____.
5. Restar -6 es lo mismo que sumar _____.
6. El opuesto de -8 es ☐.
7. $9 - 5 = 9$ ☐ (-5)
8. **a.** $2 - 7 = 2 +$ ☐
   b. $2 - (-7) = 2 +$ ☐
   c. $-2 - 7 = -2 +$ ☐
   d. $-2 - (-7) = -2 +$ ☐
9. Después de usar paréntesis como símbolos de agrupación, si se necesita otro tipo de símbolos, utilizamos _____.
10. Podemos encontrar el _____ de una cantidad al restar el primer valor del último.
11. Escribir este problema mediante símbolos matemáticos: ocho negativo menos cuatro negativo.
12. Escriba este problema utilizando símbolos matemáticos: ocho negativo restado de cuatro negativo.
13. Determine la distancia entre -4 y 3 en la recta numérica.
14. Encuentre la distancia entre -10 y 1 en la recta numérica.
15. ¿Restar 3 de 8 es lo mismo que restar 8 de 3? Explique.
16. Evalúe cada expresión.
    a. $-2 - 0$ **b.** $0 - (-2)$

NOTACIÓN *Complete cada solución para evaluar cada expresión*

17. $1 - 3 - (-2) = 1 + ($☐$) + 2$
    $= -2 +$ ☐
    $=$ ☐

18. $-6 + 5 - (-5) = -6 + 5 +$ ☐
    $=$ ☐ $+ 5$
    $=$ ☐

19. $(-8 - 2) - (-6) = [-8 + ($☐$)] - (-6)$
    $=$ ☐ $- (-6)$
    $= -10 +$ ☐
    $=$ ☐

20. $-5 - (-1 - 4) = -5 - [-1 + ($☐$)]$
    $= -5 - ($☐$)$
    $= -5 +$ ☐
    $=$ ☐

PRÁCTICA *Encuentre cada diferencia.*

21. $8 - (-1)$	**22.** $3 - (-8)$
23. $-4 - 9$	**24.** $-7 - 6$
25. $-5 - 5$	**26.** $-7 - 7$
27. $-5 - (-4)$	**28.** $-9 - (-1)$
29. $-1 - (-1)$	**30.** $-4 - (-3)$
31. $-2 - (-10)$	**32.** $-6 - (-12)$
33. $0 - (-5)$	**34.** $0 - 8$
35. $0 - 4$	**36.** $0 - (-6)$
37. $-2 - 2$	**38.** $-3 - 3$
39. $-10 - 10$	**40.** $4 - 4$
41. $9 - 9$	**42.** $4 - (-4)$
43. $-3 - (-3)$	**44.** $-5 - (-5)$

Evalúe cada expresión.

45. $-4 - (-4) - 15$	**46.** $-3 - (-3) - 10$
47. $-3 - 3 - 3$	**48.** $-1 - 1 - 1$
49. $5 - 9 - (-7)$	**50.** $6 - 8 - (-4)$
51. $10 - 9 - (-8)$	**52.** $16 - 14 - (-9)$
53. $-1 - (-3) - 4$	**54.** $-2 - 4 - (-1)$
55. $-5 - 8 - (-3)$	**56.** $-6 - 5 - (-1)$
57. $(-6 - 5) - 3$	**58.** $(-2 - 1) - 5$
59. $(6 - 4) - (1 - 2)$	**60.** $(5 - 3) - (4 - 6)$
61. $-9 - (6 - 7)$	**62.** $-3 - (6 - 12)$
63. $-8 - [4 - (-6)]$	**64.** $-1 - [5 - (-2)]$
65. $[-4 + (-8)] - (-6)$	**66.** $[-5 + (-4)] - (-2)$

67. Reste −3 de 7.

68. Reste 8 de −2.

69. Reste −6 de −10.

70. Reste −4 de −9.

Utilice la calculadora para realizar la resta.

71. −1557 − 890

72. −345 − (−789)

73. 20 007 − (−496)

74. −979 − (−44 879)

75. −162 − (−789) − 2303

76. −787 − 1654 − (−232)

APLICACIONES *Utilice números con signo para ayudar a responder cada pregunta.*

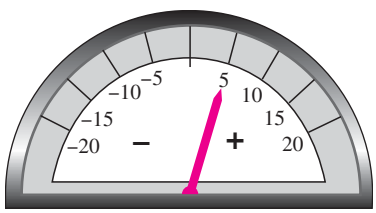
77. BUCEO Un buzo salta de su bote al agua y desciende 50 pies. Hace una pausa para verificar su equipo y después desciende 70 pies más. Utilice un número con signo para representar la profundidad final a la que llegó el buzo.

78. CAMBIO DE TEMPERATURA Rashawn voló de su casa en Nueva York a Hawai para una semana de vacaciones. Las condiciones cuando se iba eran de ventisca y con una temperatura de −6°, al salir fuera del avión la temperatura era de 85°. ¿Qué cambio de temperatura experimentó?

79. PROGRAMAS DE LECTURA Al inicio del año escolar se realizó una evaluación de lectura estatal en la que participó una escuela preescolar que estaba 23 puntos debajo del promedio de condado. El director empezó inmediatamente un programa de tutoría especial. A fines del año escolar se volvió ha realizar la evaluación, y se observó que los alumnos estaban a sólo 7 puntos debajo del promedio. ¿Cuántos puntos mejoró la escuela en la evaluación de lectura en todo el año?

80. SUBMARINOS Un submarino viajaba a 2000 pies bajo de la superficie del océano, cuando el sistema de radar alertó un choque inminente con otro submarino. El capitán ordenó al capitán se sumergiera 200 pies adicionales para después continuar en rumbo horizontal. Encuentre la profundidad a la que llegó el submarino después de sumergirse 200 pies.

81. INTENSIDAD DE CORRIENTE Durante una operación normal del sistema eléctrico, la lectura del amperímetro de un automóvil era de +5. Si los faros demandan una corriente de 7 amperes y la radio consume 6, y ambos están encendidos, ¿cuánto registrará el amperímetro?



82. GIN RUMMY Después de perder una ronda, el jugador de cartas debe restar el valor de cada una de las cartas que le quedó en la mano con un puntaje anterior de 21 puntos. Si las cartas mostradas contaron 10 puntos, ¿cuál es su nuevo resultado?

83. GEOGRAFÍA The Death Valley en California, es el punto terrestre más bajo en Estados Unidos, con 282 pies por debajo del nivel del mar. El punto terrestre más bajo del mundo es el Mar Muerto que está a 1 348 pies bajo el nivel del mar. ¿Cuánto más bajo está el Mar Muerto en comparación con The Death Valley?

84. DETECTOR DE MENTIRAS En una prueba con el detector de mentiras, un ladrón obtuvo como resultado −18, lo cual indica decepción, sin embargo en una segunda prueba, el resultado fue de −1, lo que fue poco convincente. Encuentre la diferencia entre los resultados.

85. FÚTBOL Un equipo universitario de fútbol registra el resultado de cada uno de los juegos en una hoja de estadísticas. Encuentre la ganancia (o pérdida) neta después de la tercera jugada.

Abajo	Jugada	Resultado
Primer lugar	Corrida	Perdió 1 yarda
Segundo lugar	Pase	Perdió 6 yardas
Penal	Retraso en el pase	Perdió 5 yardas
Tercer lugar	Pase	Ganó 8 yardas
Cuarto lugar	Patada	—

86. CONTABILIDAD Complete la hoja de saldo que se muestra a continuación. Después determine la condición financiera global de la compañía al restar el total de los pasivos al total de los activos.

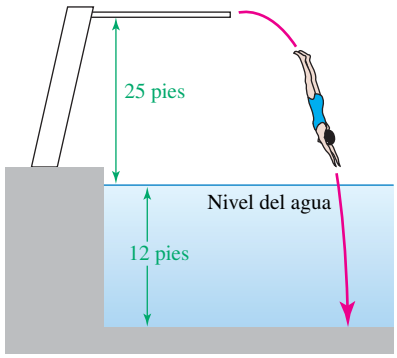
Corporación Walker
Estado Financiero 2001

Activo	
Efectivo	$11 109
Suministros	7 862
Bienes	67 543
Activo total	$
Pasivo	
Cuentas por pagar	$79 037
Impuestos	20 181
Pasivo Total	$

87. CLAVADOS Una clavadista salta desde una plataforma y una vez choca con agua, su velocidad la lleva al fondo de la piscina.

a. Utilice la recta numérica y números con signos para modelar esta situación. Determine la altura de la plataforma, el nivel del agua que es 0 y el fondo de la piscina.

b. Encuentre la longitud total del clavado desde la parte más alta de la plataforma hasta el fondo de la piscina.



88. A continuación se alistan las temperaturas más altas y las temperaturas más bajas registradas en algunas ciudades. Ponga las ciudades en orden de mayor a menor de acuerdo a la fluctuación en sus temperaturas extremas.

	Temperaturas extremas	
Ciudad	Máximas	Mínimas
Atlantic, City, N.J.	106	−11
Barrow, AK	79	−56
Kansas City, MO	109	−23
Norfolk, VA	104	−3
Portland, ME	103	−39

89. CUENTA DE CHEQUES Michael tiene $1303 en su cuenta de cheques. ¿Puede pagar su seguro de automóvil de $676, su cuenta de electricidad $121 y su renta de $750 sin tener que realizar otro depósito? Explique su respuesta.

90. HISTORIA Dos de los más grandes matemáticos griegos fueron Arquímedes (287-212 a.C.) y Pitágoras (569-500 d.C.). ¿Cuántos años hay de diferencia entre el nacimiento de ambos?

POR ESCRITO

91. Explique qué significa cuando decimos que la resta es lo mismo que la suma del opuesto.

92. Proporcione un ejemplo que demuestre que es posible restar algo de nada.

93. Explique cómo verifica el resultado de: $-7 - 4 = -11$.

94. Explique ¿por qué los alumnos no necesitan cambiar cada resta que encuentren en una suma de opuestos?

REPASO

95. Redondee 5989 a la décima más cercana.

96. Redondee 5999 a la centena más cercana.

97. Liste los factores de 20.

98. Se necesitan 13 naranjas para hacer una lata de jugo. Encuentre la cantidad de naranjas que se utilizan para hacer 12 latas de jugo.

99. Evalúe: $12^2 - (5 - 4)^2$.

100. ¿Qué propiedad se ilustra en el siguiente ejercicio?

$$15 + 12 = 12 + 15$$

2.4 Multiplicación de enteros

- Multiplicación de dos enteros positivos
- Multiplicación de un entero positivo y uno negativo
- Multiplicación de un entero negativo y uno positivo
- Multiplicación por 0.
- Multiplicación de dos enteros negativos
- Potencias de enteros

Ahora volvemos nuestra atención a la multiplicación de enteros. Cuando multiplicamos dos enteros diferentes de cero, el primer factor puede ser positivo o negativo. Lo mismo es cierto para el segundo factor. Esto significa que existen cuatro posibles combinaciones para considerar.

Positivo · positivo Positivo · negativo
Negativo · positivo Negativo · negativo

En esta sección consideraremos estas cuatro combinaciones y utilizaremos nuestras observaciones para establecer las reglas para la multiplicación de dos enteros.

Multiplicación de dos enteros positivos

4(3)
signos iguales
ambos positivos

Comenzamos por considerar el producto de dos enteros positivos, 4(3).Como ambos factores son positivos, decimos que tienen signos *iguales.* En el capítulo 1, aprendimos que la multiplicación es una suma repetida. Así que 4(3) representa la suma de cuatro 3.

$4(3) = 3 + 3 + 3 + 3$ Esta multiplicación es una suma repetida. Escribe 3 como sumando cuatro veces.

$4(3) = 12$ El resultado es 12, que es un número positivo.

Este resultado sugiere que *el producto de dos enteros positivos es positivo.*

Multiplicación de un entero positivo y uno negativo

4(−3)
signos distintos
uno positivo y uno negativo

A continuación consideramos 4(−3). Este es el producto de un entero positivo y un entero negativo. Los signos de estos factores son *distintos.* De acuerdo con la definición de multiplicación, 4(−3) significa que sumamos −3 cuatro veces.

$4(-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$ Se utiliza la definición de multiplicación. Escribe −3 como sumando cuatro veces.

$4(-3) = (-6) + (-3) + (-3)$ Se trabaja de izquierda a derecha. Se aplica la regla para sumar los dos números negativos.

$4(-3) = (-9) + (-3)$ Se trabaja de izquierda a derecha. Se aplica la regla para sumar dos números enteros negativos.

$4(-3) = -12$ Se realiza la suma.

El resultado es −12, lo que sugiere que *el producto de un entero positivo y un entero negativo es negativo.*

Multiplicación de un entero negativo y uno positivo

−3(4)
signos distintos
uno negativo, uno positivo

Para desarrollar una regla para la multiplicación de un entero negativo y un entero positivo, consideramos −3(4). Observe que los factores tienen *distintos* signos. Gracias a la propiedad conmutativa de la multiplicación, la respuesta a −3(4) será la misma que la respuesta a 4(−3). Sabemos que 4(−3) = −12 de la explicación anterior, así que, −3(4) = −12. Esto sugiere que *el producto de un entero negativo y un entero positivo es negativo.*

Al sintetizar los dos últimos casos se obtiene la regla de multiplicación de dos enteros con signos distintos.

Multiplicación de dos enteros con signos distintos

Para multiplicar un entero positivo y un entero negativo, o un entero negativo y un entero positivo, multiplicamos sus valores absolutos, luego hacemos la respuesta negativa.

EJEMPLO 1 Encuentre cada producto: **a.** $7(-5)$, **b.** $20(-8)$ y **c.** $-8 \cdot 5$.

Solución Para multiplicar los enteros con signos distintos, multiplicamos sus valores absolutos y se hace el producto negativo.

a. $7(-5) = -35$ Multiplique los valores absolutos, 7 y 5, para obtener 35. Entonces haga el resultado negativo.

b. $20(-8) = -160$ Multiplique los valores absolutos, 20 y 8, para obtener 160. Por tanto, luego haga negativo el resultado.

c. $-8 \cdot 5 = -40$ Multiplique los valores absolutos, 8 y 5, para obtener 40. Haga negativo el resultado.

Autoevaluación 1
Encuentre cada producto:
a. $2(-6)$
b. $30(-2)$
c. $-15 \cdot 2$

Respuestas **a.** -12, **b.** -60, **c.** -30

Comentario Cuando escribimos una multiplicación que contiene números con signo, no escribimos el signo negativo $-$ después del punto en medio $\cdot$ (el símbolo de multiplicación). En vez de eso, se utiliza paréntesis para mostrar la multiplicación.

$6(-2)$ $6 \cdot -2$ y $-6(-2)$ $-6 \cdot -2$

Multiplicación por 0

Antes de desarrollar una regla para multiplicar dos enteros negativos, necesitamos examinar la multiplicación por 0. Si 4(3) significa que queremos determinar la suma de cuatro 3 veces, y 0 (-3) significa que encontramos la suma de cero veces -3. Es claro que la suma es 0. Así, $0(-3) = 0$.

La propiedad conmutativa de la multiplicación garantiza que podemos cambiar el orden de los factores en el problema de multiplicación sin afectar el resultado.

$$(-3)(0) = 0(-3) = 0$$

Cambie el orden de los factores

El resultado sigue siendo 0.

Vemos que el orden en el cual escribimos los factores 0 y -3 es indistinto, de cualquier forma su producto es 0. Este ejemplo sugiere que el producto de cualquier número y 0 es 0.

Multiplicación por 0
El producto de cualquier entero y 0 es 0.

EJEMPLO 2 Encuentre $-12 \cdot 0$.

Solución Como el producto de cualquier número y 0 es 0, tenemos que

$$-12 \cdot 0 = 0$$

Autoevaluación 2
Encontrar $0(-56)$.

Respuesta 0

Multiplicación de dos enteros negativos

$-3(-4)$
signos iguales
ambos negativos

Para desarrollar una regla para la multiplicación de dos enteros negativos, consideramos el patrón mostrado en la siguiente página. En ésta, multiplicamos -4 por una serie de factores que decrecen en 1. Después de determinar cada producto, graficamos cada producto en la recta numérica. (Figura 2.20). Veamos si

usted puede determinar las respuestas de los tres últimos problemas de multiplicación al examinar el patrón de las respuestas que nos lleva a ellas.

Estos factores disminuyen en 1 conforme se lea la columna hacia abajo.

Observe el patrón aquí.

$$\begin{aligned}
4(-4) &= -16\\
3(-4) &= -12\\
2(-4) &= -8\\
1(-4) &= -4\\
0(-4) &= 0\\
-1(-4) &= ?\\
-2(-4) &= ?\\
-3(-4) &= ?
\end{aligned}$$

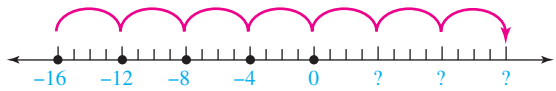


FIGURA 2.20

Del patrón vemos que

$$\begin{aligned}
-1(-4) &= 4\\
-2(-4) &= 8\\
-3(-4) &= 12
\end{aligned}$$

Para dos factores negativos, el producto es positivo.

Estos resultados sugieren que *el producto de dos enteros negativos es positivo.* En la sección anterior, vimos que el producto de dos enteros positivos también es positivo. Esto nos lleva a la siguiente conclusión.

Multiplicación de dos enteros con signos iguales

Para multiplicar dos enteros positivos, o dos enteros negativos, multiplicamos sus valores absolutos. La respuesta es positiva.

Autoevaluación 3

Encuentre el producto:

a. $-9(-7)$

b. $-12(-2)$

Respuestas **a.** 63, **b.** 24

EJEMPLO 3

Efectúe cada producto: **a.** $-5(-9)$ y **b.** $-8(-10)$.

Solución Para multiplicar dos enteros negativos, multiplicamos sus valores absolutos y el resultado lo hacemos positivo.

a. $-5(-9) = 45$ Multiplique los valores absolutos, 5 y 9, para obtener 45. La respuesta es positiva.

b. $-8(-10) = 80$ Multiplique los valores absolutos, 8 y 10, para obtener 80. El resultado es positivo.

Ahora podemos resumir las reglas para multiplicar dos enteros.

Multiplicación de dos enteros

Para multiplicar dos enteros, multiplicamos sus valores absolutos.

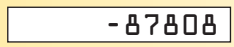
1. El producto de dos enteros, con signos *iguales es positivo*.
2. El producto de dos enteros con signos *diferentes es negativo.*

Podemos utilizar la calculadora para multiplicar números con signo.

Multiplicación con números negativos INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

En la temporada de Acción de Gracias, una cadena de supermercados ofreció pavos gratis a sus clientes con la compra de $100 o más. Cada pavo le costó a la tienda $8 dólares y 10 976 personas aprovecharon la oferta. Como cada uno de los 10 976 pavos que se regalaron representó para la cadena una pérdida de $8 dólares (que puede representarse como -8 dólares), la compañía perdió $10\,976(-8)$ dólares. Para encontrar este producto, introducimos los números y oprimimos las siguientes teclas en una calculadora científica.

10976 [×] 8 [+/−] [=]



El resultado negativo indica que con esta promoción, la cadena de supermercado perdió $87,808 en pavos.

EJEMPLO 4 Multiplique: **a.** $-3(-2)(-6)(-5)$ y **b.** $-2(-4)(-5)$.

Solución

a. $-3(-2)(-6)(-5) = 6(-6)(-5)$ Trabaje de izquierda a derecha: $-3(-2) = 6$.

$= -36(-5)$ Trabaje de izquierda a derecha: $6(-6) = -36$.

$= 180$

b. $-2(-4)(-5) = 8(-5)$ Trabaje de izquierda a derecha: $-2(-4) = 8$.

$= -40$

Autoevaluación 4

Multiplique: **a.** $-1(-2)(-5)$ y **b.** $-2(-7)(-1)(-2)$

Respuestas **a.** -10, **b.** 28

El ejemplo 4, el inciso **a**, ilustra que un producto es positivo cuando hay un número par de factores negativos. La parte **b** nos muestra que un producto es negativo cuando hay un número impar de factores negativos.

Potencias de enteros

Usted recordará que las expresiones exponenciales se utilizan para representar multiplicaciones repetidas. Por ejemplo, 2 a la tercera potencia, o 2^3, es una forma abreviada de escribir $2 \cdot 2 \cdot 2$. En esta expresión, 3 es el exponente y la base es positiva 2. En el siguiente ejemplo, evaluamos las expresiones exponenciales con bases que son números negativos.

EJEMPLO 5 Encuentre cada una de las potencias: **a.** $(-2)^4$ y **b.** $(-5)^3$.

Solución

a. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$ Escriba -2 como factor 4 veces.

$= 4(-2)(-2)$ Trabaje de izquierda a derecha. Multiplique -2 y -2 para obtener 4.

$= -8(-2)$ Trabaje de izquierda a derecha. Multiplique 4 y -2 para obtener -8.

$= 16$ Realice la multiplicación.

b. $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5)$ Escriba -5 como factor 3 veces.

$= 25(-5)$ Trabaje de izquierda a derecha. Multiplique -5 y -5 para obtener 25.

$= -125$ Realice la multiplicación.

Autoevaluación 5

Encuentre cada potencia:

a. $(-3)^4$

b. $(-4)^3$

Respuestas **a.** 81, **b.** -64

En el ejemplo 5, inciso a), -2 se elevó a una potencia par, y la respuesta fue positiva. En el inciso b), otro número negativo, -5, se elevó a una potencia impar y la respuesta fue negativa. Estos resultados sugieren una regla general.

Potencias pares e impares de un entero negativo

Cuando un entero negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo.

Cuando un entero negativo se eleva a una potencia impar, el resultado es negativo.

Autoevaluación 6
Encuentre cada potencia: $(-1)^8$

Respuesta 1

EJEMPLO 6 Encuentre la potencia: $(-1)^5$.

Solución Tenemos un entero negativo elevado a una potencia impar. El resultado será negativo.

$$(-1)^5 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$$
$$= -1$$

COMENTARIO Aunque las expresiones -3^2 y $(-3)^2$ parecen similares, pero no lo son, y no significan lo mismo. En -3^2, la base es 3 y el exponente es 2. El signo $-$ frente al 3^2 significa lo contrario de 3^2. En $(-3)^2$, la base es -3 y el exponente es 2, cuando las evaluamos, se hace más claro que no son equivalentes.

-3^2 representa *lo opuesto de* 3^2.		$(-3)^2$ representa $(-3)(-3)$.	
$-\mathbf{3}^2 = -(\mathbf{3}\cdot\mathbf{3})$	Se escribe 3 como factor 2 veces	$(\mathbf{-3})^2 = (\mathbf{-3})(\mathbf{-3})$	Se escribe -3 como factor 2 veces.
$= -9$	Se multiplica primero lo que está dentro del paréntesis	$= 9$	El producto de dos números negativos es positivo.

Observe que los resultados son diferentes

Autoevaluación 7
Evalúe: **a.** -4^2 y **b.** $(-4)^2$

Respuestas **a.** -16, **b.** 16

EJEMPLO 7 Evalúe: **a.** -2^2 y **b.** $(-2)^2$.

Solución

a. $-\mathbf{2}^2 = -(\mathbf{2}\cdot\mathbf{2})$ Como dos es la base, se escribe 2 como factor dos veces.

$= -4$ Se realiza la multiplicación dentro del paréntesis.

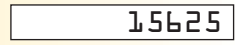
b. $(\mathbf{-2})^2 = (\mathbf{-2})(\mathbf{-2})$ La base es -2. Se escribe como factor dos veces.

$= 4$ Los signos son iguales, así que el producto es positivo.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Elevar un número negativo a una potencia

Los números negativos pueden elevarse a una potencia mediante una calculadora científica. Oprimimos la tecla [+/−] para cambiar el signo y la tecla [y^x] (en algunas calculadoras, [x^y]). Por ejemplo, para evaluar $(-5)^6$, introducimos estos números y oprimimos estas teclas.

5 [+/−] [y^x] 6 [=]



El resultado es 15 625

Algunas calculadoras requieren paréntesis para una base negativa elevada a una potencia.

Sección 2.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. En la multiplicación $-5(-4)$, los enteros -5 y -4, los cuales se van a multiplicar, se llaman _____. La respuesta, 20, se llama _____.
2. La definición de multiplicación nos dice que $3(-4)$ representa una _____ repetida, $-4 + (-4) + (-4)$.
3. En la expresión -3^5, ☐ es la base y 5 es el _____.
4. En la expresión $(-3)^5$, ☐ es la base y ☐ es el exponente.

CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

5. El producto de dos enteros con signos _____ es negativo.
6. El producto de dos enteros con signos iguales es _____.
7. La propiedad _____ de la multiplicación implica que $-2(-3) = -3(-2)$.
8. El producto de 0 y cualquier número es ☐.
9. Determine el resultado de $-1(9)$. En general, ¿cuál es el resultado cuando multiplicamos un número positivo por -1?
10. Encuentre $-1(-9)$. En general, ¿cuál es el resultado cuando se multiplica un número negativo por -1?
11. Cuando se multiplican dos enteros, hay cuatro combinaciones posibles de signos. Indique cada una de ellas.
12. Cuando se multiplican dos enteros, hay cuatro posibles combinaciones de signos. ¿Cómo pueden agruparse en dos categorías?
13. Si se evaluaran cada una de las siguientes potencias, ¿cuál sería el *signo* del resultado?
    a. $(-5)^{13}$ **b.** $(-3)^{20}$
14. Un alumno indicó lo siguiente "de un positivo y de un negativo el resultado es negativo." ¿Dónde está el error en esta afirmación?
15. Encuentre el valor absoluto.
    a. $|-3|$ **b.** $|12|$
    c. $|-5|$ **d.** $|9|$
    e. $|10|$ **f.** $|-25|$
16. Encuentre cada uno de los productos y luego grafíquelo en una recta numérica. ¿Cuál es la distancia entre cada par de productos?

    $2(-2), \quad 1(-2), \quad 0(-2), \quad -1(-2), \quad -2(-2)$

17. **a.** Complete la siguiente tabla.

Problema	Número de factores negativos	Respuesta
$-2(-2)$		
$-2(-2)(-2)(-2)$		
$-2(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$		

    b. Las respuestas en la tabla nos ayudan a justificar la siguiente regla: el producto de un número _____ de enteros negativos es positivo.

18. **a.** Complete la tabla.

Problema	Número de factores negativos	Respuesta
$-2(-2)(-2)$		
$-2(-2)(-2)(-2)(-2)$		
$-2(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$		

    b. Los resultados en la tabla nos ayudan a justificar la siguiente regla: el producto de un número _____ de enteros negativos es negativo.

NOTACIÓN *Complete cada solución para evaluar la expresión.*

19. $-3(-2)(-4) = ☐(-4)$
    $= ☐$
20. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)☐$
    $= ☐(-3)(-3)$
    $= ☐(-3)$
    $= ☐$
21. Explique por qué motivo la expresión de abajo no está escrita correctamente. ¿Cómo debería escribirse?

    $-6 \cdot -5$

22. Traduzca a símbolos matemáticos
    a. El producto de tres negativo y dos negativo.
    b. Cinco negativo al cuadrado.
    c. El opuesto de cinco al cuadrado.

PRÁCTICA *Encuentre cada uno de los productos.*

23. $-9(-6)$ **24.** $-5(-5)$
25. $-3 \cdot 5$ – **26.** $-6 \cdot 4$

27. $12(-3)$
28. $11(-4)$
29. $(-8)(-7)$
30. $(-9)(-3)$
31. $(-2)10$
32. $(-3)8$
33. $-40 \cdot 3$
34. $-50 \cdot 2$
35. $-8(0)$
36. $0(-27)$
37. $-1(-6)$
38. $-1(-8)$
39. $-7(-1)$
40. $-5(-1)$
41. $1(-23)$
42. $-35(1)$

Evalúe cada expresión.

43. $-6(-4)(-2)$
44. $-3(-2)(-3)$
45. $5(-2)(-4)$
46. $3(-3)(3)$
47. $2(3)(-5)$
48. $6(2)(-2)$
49. $6(-5)(2)$
50. $4(-2)(2)$
51. $(-1)(-1)(-1)$
52. $(-1)(-1)(-1)(-1)$
53. $-2(-3)(3)(-1)$
54. $5(-2)(3)(-1)$
55. $3(-4)(0)$
56. $-7(-9)(0)$
57. $-2(0)(-10)$
58. $-6(0)(-12)$

59. Encuentre el producto de -6 y el opuesto de 10.

60. Encuentre el producto del opuesto de 9 y el opuesto de 8.

Encuentre cada potencia.

61. $(-4)^2$
62. $(-6)^2$
63. $(-5)^3$
64. $(-6)^3$
65. $(-2)^3$
66. $(-4)^3$
67. $(-9)^2$
68. $(-10)^2$
69. $(-1)^5$
70. $(-1)^6$
71. $(-1)^8$
72. $(-1)^9$

Evalúe cada expresión.

73. $(-7)^2$ y -7^2
74. $(-5)^2$ y -5^2
75. -12^2 y $(-12)^2$
76. -11^2 y $(-11)^2$

Utilice una calculadora para evaluar cada expresión.

77. $-76(787)$
78. $407(-32)$
79. $(-81)^4$
80. $(-6)^5$
81. $(-32)(-12)(-67)$
82. $(-56)(-9)(-23)$
83. $(-25)^4$
84. $(-41)^5$

APLICACIONES *Utilice números con signo para resolver cada uno de los siguientes problemas.*

85. DIETA Después de realizarle un examen físico a un paciente, el médico consideró que el paciente debería comenzar una dieta. Se propusieron dos opciones

	Plan #1	Plan #2
Duración	10 semanas	14 semanas
Ejercicio diario	1 h	30 min
Pérdida de peso por semana	3 lb	2 lb

a. Encuentre cuál es la pérdida de peso esperado para cada plan dietético. Exprese cada respuesta con un número con signo.

b. ¿Con cuál de los planes espera el paciente bajar más peso? Explique por qué pudo optar por no haberlo elegido.

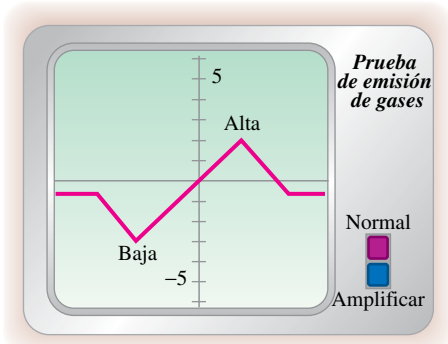
86. INVENTARIOS Una hoja de cálculo se utiliza para llevar un registro en pérdidas de inventario en un almacén. Los artículos, sus costos y los números de los artículos faltantes se relacionaron en la tabla siguiente.

	A	B	C	D
1	Artículo	Costo	Número de unidades	$ Pérdidas
2	CD	$5	−11	
3	TV	$200	−2	
4	Radio	$20	−4	

a. ¿Qué instrucciones deberían darse para encontrar las pérdidas totales para cada tipo de artículo? Encuentra cada una de esas pérdidas y llena la columna D.

b. ¿Qué instrucciones deberían darse para encontrar el total de las pérdidas en inventario del almacén? Encuentre este número.

87. AMPLIFICACIÓN Utilizando un dispositivo de prueba electrónica, un mecánico puede medir las emisiones contaminantes del motor de un automóvil. Los resultados de la prueba aparecen en la pantalla.



a. Encuentre los valores alto y bajo para esta prueba como se muestra en la pantalla.

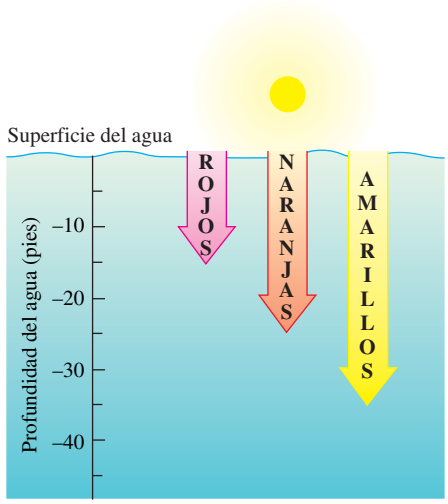
b. Al cambiar un ajuste en el monitor, la imagen de la pantalla puede amplificarse. ¿Cuáles serían los nuevos valores altos y bajos si cada valor fuera del doble?

88. LUZ La luz del Sol es una mezcla de todos los colores. Cuando pasa por el agua, ésta absorbe distintos colores en cantidades distintas como se muestra.

a. Utilice un número con signo para representar la profundidad a la que la luz roja penetra el agua.

b. La luz verde penetra 4 veces más profundo que la roja. ¿A qué profundidad llega?

c. La luz azul penetra tres veces más profundo que la luz naranja. ¿Qué profundidad tiene en este caso?

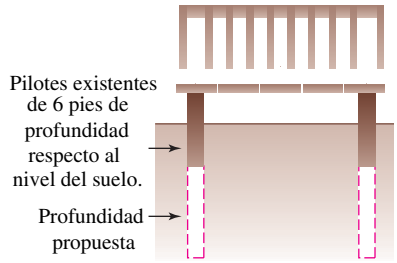


89. CAMBIO DE TEMPERATURA Un granjero estaba preocupado porque sus árboles frutales se habían congelado, llamó al servicio meteorológico para pedir información acerca de la temperatura. Le comentaron que la temperatura continuaría bajando aproximadamente 4° cada hora por las siguientes cinco horas. ¿Qué número con signo representa el cambio total de la temperatura en las próximas cinco horas?

90. Durante los últimos 4 años, una mujer de negocios solicitó una deducción por depreciación de $200 en su planilla para una oficina de sistemas de computadoras. ¿Qué número con signo representa el total de la deducción solicitada durante los 4 años?

91. EROSIÓN Un dique protege una ciudad que se encuentra en el área de inundación. De acuerdo con los geólogos los bancos del dique se están erosionando a razón de dos pies por año. Si no se hace algo para corregir el problema ¿qué número con signo indica cuánto se erosionará el dique durante la siguiente década?

92. SOPORTE DE PISO Después de una tormenta de invierno, el dueño de una casa hace que una compañía de ingeniería examine su piso dañado. El informe concluye que los pilotes originales no fueron anclados lo suficientemente profundo por un factor de 3. ¿Qué número con signo representa la profundidad a la cual se deberían haber anclado los pilotes?



93. ASOCIACIÓN NACIONAL DE BALONCESTO DE MUJERES La asistencia promedio por juego de la WNBA de las Houston Comets es de 8,110 por juego. Si se supone que el equipo da una bolsa de deportes cuyo costo es de $3, a cada persona que asiste al juego. ¿Qué número con signo expresa la pérdida financiera de esta distribución promocional?

94. CUIDADO DE LA SALUD Un proveedor del cuidado de la salud de una compañía estima que 75 horas por semana se pierden porque los empleados sufren de estrés o enfermedades prevenibles. En 52 semanas al año, ¿cuántas horas se pierden? Utilice un número con signo para contestar.

POR ESCRITO

95. Si un producto contiene un número par de factores negativos, ¿cómo sabemos que el resultado será positivo?

96. Explique por qué el producto de un número positivo y un número negativo, es negativo, usando como ejemplo $5(-3)$.

97. Explique por qué el resultado es el opuesto al número original cuando un número se multiplica por -1.

98. ¿Puede pensar en cualquier número que dé un resultado diferente de cero cuando se multiplica por 0? Explique su respuesta.

REPASO

99. La factorización prima de un número es $3^2 \cdot 5$. ¿Cuál es el número?

100. Redondee 10 345 a la centena más cercana.

101. La inscripción en una universidad subió de 10 200 a 12 300 en un año. ¿Cuál fue el incremento de la inscripción?

102. Encuentre el perímetro de un cuadrado cuyos lados miden 6 yardas de largo.

103. ¿Qué significa el símbolo de $<$?

104. Mencione los diez primeros números primos

2.5 División de enteros

- Relación entre la multiplicación y la división
- Reglas para la división de enteros • División y cero

En esta sección, desarrollaremos reglas para la división de enteros, tal como lo hicimos en el caso de la multiplicación de enteros. También consideraremos dos tipos de división en la que interviene el 0.

Relación entre la multiplicación y la división

Cada hecho en la división que contiene tres números tiene una parte correspondiente de multiplicación que involucra a los mismos tres números. Por ejemplo,

$\frac{6}{3} = 2$ porque $3(2) = 6$ Recuerde que en el enunciado de la división, 6 es el *dividendo,* 3 el *divisor,* y 2 es el *cociente.*

$\frac{20}{5} = 4$ porque $5(4) = 20$

Reglas para la división de enteros

Ahora utilizaremos la relación que existe entre la multiplicación y la división para desarrollar las reglas que se aplican en la división de enteros. Existen cuatro casos que considerar.

Caso 1: En el primer caso, un entero se divide entre un entero positivo. Por años de experiencia, ya sabemos que el resultado es positivo. Por tanto, el *cociente de dos enteros positivos es positivo.*

Caso 2: Después, consideramos el cociente de dos negativos. Como ejemplo, considere la división $\frac{-12}{-2} = ?$ Podemos realizar esta división al examinar su enunciado relacionado con la multiplicación, $-2(?) = -12$. Nuestro objetivo es encontrar el número que debería reemplazar al signo de interrogación. Para hacerlo, utilizaremos las reglas para multiplicar enteros, las cuales se presentaron en la sección anterior.

Enunciado de la multiplicación	**Enunciado de la división**
$-2(?) = -12$	$\frac{-12}{-2} = ?$
Este debe ser 6 *positivo* si el producto va a ser 12 *negativo*	Así que el cociente es 6 *positivo*.

Por consiguiente, $\frac{-12}{-2} = 6$. De este ejemplo, podemos ver que el *cociente de dos enteros negativos es positivo.*

Caso 3: En el tercer caso examinamos el cociente de un entero positivo y un entero negativo. Consideremos que $\frac{12}{-2} = ?$ El enunciado de la multiplicación equivalente es $-2(?) = 12$.

Enunciado de la multiplicación	**Enunciado de la división**
$-2(?) = 12$	$\frac{12}{-2} = ?$
Éste debe ser -6 si el producto va a ser 12 *positivo.*	Así que el cociente es -6.

Por lo tanto, $\frac{12}{-2} = -6$. Este resultado muestra que *el cociente de un entero positivo y un entero negativo es negativo.*

Caso 4: Finalmente, para encontrar el cociente de un entero negativo y un entero positivo, consideremos $\frac{-12}{2} = ?$. Su enunciado de multiplicación equivalente es $2(?) = -12$.

Enunciado de la multiplicación	**Enunciado de la división**
$2(?) = -12$	$\frac{-12}{2} = ?$
Éste debe ser -6 si se quiere que el producto sea -12.	Así que el cociente es -6.

Por consiguiente, $\frac{-12}{2} = -6$. De este ejemplo, podemos ver que *el cociente de un entero negativo y un entero positivo es negativo.*

Resumamos los resultados del análisis previo.

División de dos enteros

Para dividir dos enteros, se dividen sus valores absolutos.

1. El cociente de dos enteros con signos *iguales* es positivo.
2. El cociente de dos enteros con signos *diferentes* es negativo.

Las reglas para la división de enteros son similares a las reglas que rigen a la multiplicación de enteros.

EJEMPLO 1

Encuentre cada cociente: **a.** $\frac{-35}{7}$ y **b.** $\frac{20}{-5}$.

Solución Para dividir enteros con signos distintos, determinamos el cociente de sus valores absolutos y luego se hace el cociente negativo.

a. $\frac{-35}{7} = -5$ Dividir los valores absolutos, 35 entre 7, para obtener 5. El cociente es negativo.

Para verificar el resultado, multiplicamos el divisor, 7 y el cociente, -5. Deberíamos obtener el dividendo, -35.

$$7(-5) = -35$$

La respuesta, -5, coincide.

b. $\frac{20}{-5} = -4$ Dividir los valores absolutos, 20 entre 5, para obtener 4. El cociente es negativo

Autoevaluación 1

Encuentre el cociente y verifique el resultado:

a. $\frac{-45}{5}$

b. $\frac{60}{-20}$

Respuestas **a.** -9, **b.** -3

EJEMPLO 2

Divida: $\frac{-12}{-3}$.

Solución Los enteros tienen signos iguales. El cociente será positivo.

$\frac{-12}{-3} = 4$ Dividir los valores absolutos, 12 entre 3, para obtener 4. El cociente es positivo.

Autoevaluación 2

Divida: $\frac{-21}{-3}$

Respuesta 7

EJEMPLO 3 **Reducción de precios.** En el curso de un año, un distribuidor de ventas al menudeo redujo el precio de un televisor por una cantidad igual cada mes, pues no había ventas. Al finalizar el año, el costo era de 132 dólares menos que al inicio del año. ¿Cuánto se redujo el precio cada mes?

Solución La caída de precio de 132 dólares anuales se escribe como -132. Esto ocurrió en 12 reducciones, lo que indica división.

$$\frac{-132}{12} = -11$$ El cociente de un número negativo y un número positivo es negativo.

La caída en precio cada mes fue de 11 dólares.

División y cero

Para repasar el concepto de la división entre 0, vemos que $\frac{0}{2} = ?$ El enunciado de la multiplicación equivalente es $2(?) = 0$.

Enunciado de la multiplicación	Enunciado de la división
$2(?) = 0$	$\frac{0}{2} = ?$
Ésta debe ser 0 si el producto va a ser 0.	Así que el cociente es 0.

Por lo tanto, $\frac{0}{2} = 0$. Este ejemplo sugiere que *el cociente de 0 dividido entre cualquier número diferente de cero es 0.*

Para revisar la división entre 0, vemos que $\frac{2}{0} = ?$ El enunciado de la multiplicación equivalente es $0(?) = 2$.

Enunciado de la multiplicación	Enunciado de la división
$0(?) = 2$	$\frac{2}{0} = ?$
No existe ningún número que dé 2 cuando se multiplica por 0.	No existe el cociente.

Por tanto, $\frac{2}{0}$ no tiene respuesta. Decimos que la división entre 0 es indefinida. Este ejemplo sugiere que *el cociente de cualquier número dividido entre 0 es indefinido.*

División con 0

1. Si 0 se divide entre cualquier número diferente de cero, el cociente es 0.
2. La división entre 0 es indefinida.

Autoevaluación 4

Divida $\frac{0}{-4}$

Respuesta 0

EJEMPLO 4 Encuentre $\frac{-4}{0}$, de ser posible.

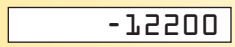
Solución Como $\frac{-4}{0}$ es una división entre 0, la división es indefinida.

División con números negativos

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

El Departamento de Estadísticas Laborales estimó que en Estados Unidos se perdieron 146 400 empleos en el sector manufacturero en 2003. Como se perdieron empleos, esta cifra se escribe como −146 400. Para determinar el número promedio de empleos de manufactura que se perdieron mensualmente, se divide: $\frac{-146\,400}{12}$. Para encontrar la división utilizando una calculadora científica, introduce estos números y oprime las siguientes teclas.

146 400 [+/−] [÷] 12 [=]



El número promedio de empleos en el sector de manufactura, en 2003, fue de 12 200 mensuales.

Sección 2.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. En $\frac{-27}{3} = -9$, el número −9 se llama el _____, y al número 3 se le llama _____.
2. La división entre 0 es _____. La división _____ 0 entre un número diferente de cero es 0.
3. El _____ _____ de un número es la distancia entre éste y 0 en la recta numérica.
4. {. . . , −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .} es el conjunto de _____.
5. El cociente de dos enteros negativos es _____.
6. El cociente de un entero negativo y un entero positivo es _____.

CONCEPTOS

7. Escriba el enunciado de la multiplicación equivalente $\frac{-25}{5} = -5$.
8. Escriba el enunciado de la multiplicación equivalente $\frac{0}{-15} = 0$.
9. Muestre que no hay respuesta para $\frac{-6}{0}$ al escribir el enunciado de la multiplicación equivalente.
10. Encuentre el valor de $\frac{0}{5}$.
11. Escriba el enunciado de la división relacionado de $5(-4) = -20$.
12. ¿Cómo se comparan las reglas para la multiplicación de enteros con las reglas de la división de enteros?
13. Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero: siempre, algunas veces o nunca.
    a. El producto de un entero positivo y un entero negativo es negativo.
    b. La suma de un entero positivo y un entero negativo es negativo.
    c. El cociente de un entero positivo y un entero negativo es negativo
14. Determine si cada enunciado es verdadero: siempre, a veces o nunca.
    a. El producto de dos enteros negativos es positivo.
    b. La suma de dos enteros negativos es negativa.
    c. El cociente de dos enteros negativos es negativo.

PRÁCTICA *Encuentre cada cociente, si es posible.*

15. $\frac{-14}{2}$
16. $\frac{-10}{5}$
17. $\frac{-8}{-4}$
18. $\frac{-12}{-3}$
19. $\frac{-25}{-5}$
20. $\frac{-36}{-12}$
21. $\frac{-45}{-15}$
22. $\frac{-81}{-9}$
23. $\frac{40}{-2}$
24. $\frac{35}{-7}$
25. $\frac{50}{-25}$
26. $\frac{80}{-40}$

27. $\frac{0}{-16}$

28. $\frac{0}{-6}$

29. $\frac{-6}{0}$

30. $\frac{-8}{0}$

31. $\frac{-5}{1}$

32. $\frac{-9}{1}$

33. $-5 \div (-5)$

34. $-11 \div (-11)$

35. $\frac{-9}{9}$

36. $\frac{-15}{15}$

37. $\frac{-10}{-1}$

38. $\frac{-12}{-1}$

39. $\frac{-100}{25}$

40. $\frac{-100}{50}$

41. $\frac{75}{-25}$

42. $\frac{300}{-100}$

43. $\frac{-500}{-100}$

44. $\frac{-60}{-30}$

45. $\frac{-200}{50}$

46. $\frac{-500}{100}$

47. Encuentre el cociente de -45 y 9.

48. Calcule el cociente de -36 y -4.

49. Divida 8 entre -2.

50. Divida -16 entre -8.

Utilice una calculadora para realizar cada división.

51. $\frac{-13\,550}{25}$

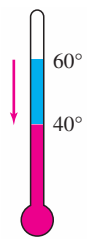
52. $\frac{-3876}{-19}$

53. $\frac{272}{-17}$

54. $\frac{-6776}{-77}$

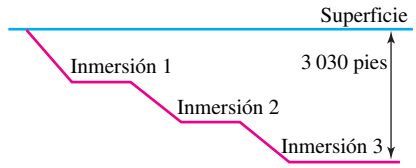
APLICACIONES *Utilice números con signo para resolver cada problema.*

55. DISMINUCIÓN DE TEMPERATURA Durante un periodo de cinco horas, la temperatura bajó continuamente como se muestra. ¿Cuál fue el cambio promedio en la temperatura por hora durante ese intervalo de cinco horas?



56. CAÍDA DE PRECIOS Durante un periodo superior a tres meses, el precio de un reproductor DVR disminuyó constantemente como se muestra en la ilustración. ¿Cuál es el cambio mensual promedio en el precio del DVR?

57. INMERSIÓN SUBMARINA En una serie de tres inmersiones iguales, un submarino se programa para alcanzar una profundidad de 3030 pies debajo de la superficie del océano. ¿Qué número con signo describe la profundidad de cada una de las tres inmersiones?



58. EL GRAN CAÑÓN Una tren tirado por mulas debe viajar del establo a un campo del Gran Cañón, aproximadamente 5000 pies debajo del borde. Si el guía quisiera que las mulas descansaran después de cada 1000 pies de descenso, ¿cuántas paradas se harían en el trayecto?

59. NEGOCIACIÓN EN EL BÉISBOL A la mitad de la temporada, un equipo de béisbol se encuentra 12 juegos detrás del líder de la liga. La gerencia del equipo decide negociar para contratar un bateador de talento, con la esperanza de recuperar por lo menos la mitad del déficit de posición para fin de año. ¿En qué posición la gerencia espera encontrarse el fin de la temporada?

60. DÉFICIT PRESUPUESTARIO Un político propuso un plan de dos años para cortar el déficit presupuestario de 20 millones de dólares de un condado, según se muestra en la gráfica. Si se ejecuta este plan, ¿cuál será el cambio en el estado financiero del condado en dos años?

	Plan	Pronóstico
Primer año	Aumento de impuestos, caída en los programas de subsidio	El déficit se reducirá a la mitad.
Segundo año	Encontrar el desperdicio y el fraude	Reducirá el resto del déficit a la mitad.

61. REBAJAS El dueño de un almacén de ropa decide reducir el precio en una línea de pantalones vaqueros que no se están vendiendo. Él piensa que puede afrontar la pérdida de $300 de la ganancia proyectada en estos pantalones. ¿Por cuánto puede rebajar cada uno de los 20 pares de pantalones vaqueros?

62. REPRESA DE AGUA Durante una semana los ingenieros de una represa de agua liberaron la suficiente cantidad hasta reducir el nivel de ésta a 35 pies. ¿En promedio, cuánto cambió el nivel del agua diariamente durante este lapso?

63. REDUCCIÓN DE PAGOS En un esfuerzo de reducir los costos, un negocio decide bajar sus gastos en salarios a 9 135 000. Al hacer esto, 5250 empleados tendrán una reducción en sus salarios por una cantidad igual. ¿Qué tan grande será la reducción salarial a cada empleado?

64. LA BOLSA El lunes, el valor de las 225 acciones de María se mantenían en alto. Para el viernes, su valor había disminuido 4335 dólares. ¿Cuánto perderá por acción en esa semana?

POR ESCRITO

65. Explique por qué el cociente de dos números negativos es positivo.

66. Piense en una situación de la vida real que se pueda representar por $\frac{0}{4}$. Explique por qué motivo la respuesta podría ser 0.

67. Utilice un ejemplo específico y explique cómo se utiliza una multiplicación para verificar una división.

68. Explique qué se quiere decir cuando se indica que una división entre 0 es indefinida.

REPASO

69. Calcule: $3\left(\frac{18}{3}\right)^2 - 2(2)$.

70. Mencione un conjunto de números.

71. Encuentre el factor primo de 210.

72. El enunciado $(4 + 8) + 10 = 4 + (8 + 10)$ ¿qué propiedad demuestra

73. $17 \geq 17$ ¿Es verdadera?

74. ¿Es cierto que $8 - 2 = 2 - 8$?

75. Calcule: 3^4.

76. Sharif tuvo de promedio 55, 70, 80 y 75 en cuatro evaluaciones de matemáticas. ¿Cuál es su promedio?

2.6 Orden de las operaciones y estimación

• Orden de las operaciones • Valor absoluto • Estimación

En esta sección evaluaremos expresiones que incluyen más de una operación. Para hacerlo, aplicaremos las reglas que rigen las operaciones con los números enteros. Asimismo, continuaremos analizando la obtención de la estimación de una respuesta. El cálculo mental o estimación se utiliza cuando necesitamos una indicación rápida del tamaño de la respuesta actual a evaluar.

Orden de las operaciones

En la sección 1.7 indicamos las siguientes reglas para el orden de las operaciones: una secuencia de pasos para realizar las operaciones aritméticas.

Orden de las operaciones

Realizar todos los cálculos indicados entre paréntesis y otros grupos de símbolos en el siguiente orden, trabajando de adentro hacia afuera.

1. Calcular todas las potencias, esto significa que se evalúan todas las expresiones con exponentes.
2. Realizar todas las multiplicaciones y divisiones como se presenten, de izquierda a derecha.
3. Realizar todas las sumas y restas como se presenten, de izquierda a derecha.

Cuando todos los símbolos de agrupación se hayan eliminado, se repiten los pasos 1-3 para completar el cálculo.

Si una barra de fracción está presente, se evalúa la expresión que está arriba de la barra (el numerador) y la expresión que está debajo de la barra (el denominador), por separado. Después se efectúa la división que está indicada por la barra de la fracción, si es posible.

EJEMPLO 1 Calcule: $-4(-3)^2 - (-2)$.

Solución Esta expresión contiene las operaciones de multiplicación, potenciación, y resta. Las reglas para el orden de las operaciones nos indican que primero se debe realizar la potencia.

Autoevaluación 1
Calcule: $-5(-2)^2 - (-6)$

$-4(\mathbf{-3})^{\mathbf{2}} - (-2) = -4(\mathbf{9}) - (-2)$ Se realizan las expresiones exponenciales: $(-3)^2 = 9$.

$= -36 - (-2)$ Se realiza la multiplicación: $-4(9) = -36$.

$= -36 + 2$ Para realizar la resta, se suma el opuesto de -2.

$= -34$ Se realiza la suma.

Respuesta -14

Autoevaluación 2
Calcule: $4(2) + (-4)(-3)(-2)$

Respuesta -16

EJEMPLO 2 Calcule: $2(3) + (-5)(-3)(-2)$.

Solución Esta expresión contiene operaciones de multiplicación y suma. De acuerdo con las reglas que indican el orden de operaciones, realizamos primero las multiplicaciones.

$2(3) + (-5)(-3)(-2) = 6 + (-30)$ Para realizar las multiplicaciones, se trabaja de izquierda a derecha.

$= -24$ Se realiza la suma.

Autoevaluación 3
Calcule: $45 \div (-5)3$

Respuesta -27

EJEMPLO 3 Calcule: $40 \div (-4)5$.

Solución Esta expresión contiene las operaciones de división y multiplicación. Se realizan las divisiones y las multiplicaciones conforme se vayan presentando de izquierda a derecha.

$\mathbf{40 \div (-4)}5 = \mathbf{-10} \cdot 5$ Se realiza primero la división: $40 \div (-4) = -10$.

$= -50$ Se realiza la multiplicación.

Autoevaluación 4
Calcule: $-3^2 - (-3)^2$

Respuesta -18

EJEMPLO 4 Calcule: $-2^2 - (-2)^2$.

Solución Esta expresión contiene las operaciones para elevar a una potencia y restar. Primero se realizan las potencias. (Recuerde que -2^2 significa *el opuesto* de 2^2.)

$-2^2 - (-2)^2 = -4 - 4$ Encuentre la potencia de: $-2^2 = -4$ y $(-2)^2 = 4$.

$= -8$ Se realiza la resta.

Autoevaluación 5
Calcule: $-18 + 4(-7 + 9)$

Respuesta -10

EJEMPLO 5 Calcule: $-15 + 3(-4 + 7)$.

Solución

$-15 + 3(\mathbf{-4 + 7}) = -15 + 3(\mathbf{3})$ Se realiza la suma entre paréntesis $-4 + 7 = 3$.

$= -15 + 9$ Se realiza la multiplicación: $3(3) = 9$.

$= -6$ Se realiza la suma.

EJEMPLO 6

Calcule: $\dfrac{-20 + 3(-5)}{(-4)^2 - 21}$

Solución Primero se calcula la expresión del numerador y luego del denominador, en forma independiente.

$$\frac{-20 + \mathbf{3(-5)}}{\mathbf{(-4)^2} - 21} = \frac{-20 + (\mathbf{-15})}{\mathbf{16} - 21}$$

En el numerador, se realiza la multiplicación: $3(-5) = -15$.
En el denominador, se realiza la potencia: $(-4)^2 = 16$.

$$= \frac{-35}{-5}$$

En el numerador se suma: $-20 + (-15) = -35$.
En el denominador se efectúa la resta: $16 - 21 = -5$.

$$= 7$$

Se realiza la división.

Autoevaluación 6

Calcule: $\dfrac{-9 + 6(-4)}{(-5)^2 - 28}$

Respuesta 11

EJEMPLO 7

Calcule: $-5[-1 + (2 - 8)^2]$

Solución Comenzamos por trabajar dentro de los símbolos de agrupación del par más interno y luego continuamos con los símbolos más externos.

$$-5[-1 + (\mathbf{2 - 8})^2] = -5[-1 + (\mathbf{-6})^2]$$

Se realiza la resta dentro del paréntesis.

$$= -5(-1 + 36)$$

Se calcula la potencia dentro de los corchetes.

$$= -5(35)$$

Se realiza la suma dentro del paréntesis.

$$= -175$$

Se realiza la multiplicación.

Autoevaluación 7

Calcule: $-4[-2 + (5 - 9)^2]$

Respuesta -56

Valor absoluto

Se recordará que el valor absoluto de un número es la distancia entre éste y el 0 en la recta numérica. En el capítulo anterior, calculamos expresiones de valor absoluto simple como $|-3|$ y $|10|$. Los símbolos del valor absoluto también se utilizan con expresiones más complicadas, tales como $|-4(3)|$ y $|-6 + 1|$. Cuando aplicamos las reglas para el orden de operaciones para evaluar estas expresiones, *los símbolos del valor absoluto están considerados como símbolos de agrupación,* y cualquier operación dentro de ellos tendría que ser completado primero.

EJEMPLO 8

Encuentre el valor absoluto: **a.** $|-4(3)|$ y **b.** $|-6 + 1|$.

Solución Primero realizamos las operaciones dentro del símbolo de valor absoluto.

a. $|-4(3)| = |-12|$

Se realiza la multiplicación con el símbolo de valor absoluto. $-4(3) = -12$.

$$= 12$$

Encuentre el valor absoluto de -12.

b. $|-6 + 1| = |-5|$

Se realiza la suma dentro del símbolo del valor absoluto: $-6 + 1 = -5$.

$$= 5$$

Se encuentra el valor absoluto de -5.

Autoevaluación 8

Encuentre cada valor absoluto:

a. $|(-6)(5)|$

b. $|-3 + (-26)|$

Respuestas **a.** 30, **b.** 29

COMENTARIO $-5(8)$ significa que $-5 \cdot 8$, la expresión $-5|8|$ (se lee como "negativo 5 veces el valor absoluto de 8") significa $-5 \cdot |8|$. Para evaluar cada expresión debemos encontrar primero el valor absoluto y después multiplicar.

$$\begin{aligned} -5|8| &= -5 \cdot 8 && \text{Se determina el valor absoluto de: } |8| = 8. \\ &= -40 && \text{Se realiza la multiplicación.} \end{aligned}$$

Autoevaluación 9
Calcule: $7 - 5|-1 - 6|$.

Respuesta -28

EJEMPLO 9 Calcule: $8 - 4|-6 - 2|$

Solución Primero se realiza la operación que está dentro del símbolo del valor absoluto.

$$\begin{aligned} 8 - 4|\mathbf{-6 - 2}| &= 8 - 4|\mathbf{-8}| && \text{Se realiza la resta dentro del símbolo del valor absoluto: } -6 - 2 = -8. \\ &= 8 - 4(8) && \text{Se encuentra el valor absoluto: } |-8| = 8. \\ &= 8 - 32 && \text{Se realiza la multiplicación: } 4(8) = 32. \\ &= -24 && \text{Se realiza la resta.} \end{aligned}$$

Estimación

Recuerde que la idea de la estimación es utilizar números redondos que estén cerca de valores reales en el problema. Cuando una respuesta exacta no es necesaria y una aproximación rápida es suficiente, se puede utilizar la estimación.

EJEMPLO 10 El almacén del supermercado.

El porcentaje del Dow Jones se anuncia al final de cada día comercial para indicar a los inversionistas cómo se ha realizado el intercambio de las acciones en Nueva York. Un número positivo indica un buen desempeño, mientras que un número negativo indica una pobre ejecución. Estime la ganancia neta o puntos perdidos en el índice Dow Jones a la semana mostrada en la figura 2.21.

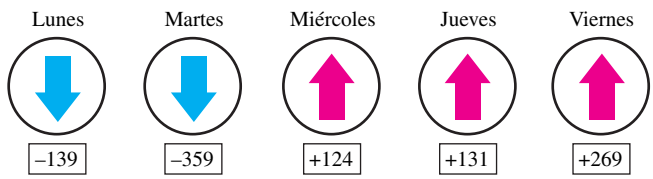


FIGURA 2.21

Solución Aproximaremos cada uno de estos números. Por ejemplo, -139 es cercano a -140 y $+124$ está cercano a $+120$. Para evaluar la ganancia o pérdida neta, sumamos las aproximaciones.

$$\begin{aligned} -140 + (-360) + 120 + 130 + 270 &= -500 + 520 && \text{Sumamos positivos y negativos por separado para obtener totales.} \\ &= 20 && \text{Realizamos la suma.} \end{aligned}$$

Esta estimación nos dice que hubo una ganancia de aproximadamente 20 puntos en el Dow Jones.

Sección 2.6 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Cuando se solicita que se evalúen expresiones que tienen más de una operación, debemos aplicar las reglas para el _____ de las operaciones.
2. En situaciones donde no es necesaria una respuesta exacta, una aproximación o _____ es una manera rápida de obtener una idea de la respuesta verdadera.
3. Los valores absolutos, paréntesis y corchetes son tipos de símbolos _____ .
4. Si una expresión incluye dos conjuntos de símbolos de agrupación, siempre se debe comenzar a trabajar de _____ hacia _____.

CONCEPTOS

5. Considere que $5(-2)^2 - 1$. ¿Cuántas operaciones se necesitan para evaluar esta expresión? Menciónelas en el orden en que deberán realizarse.

6. Considere que $15 - 3 + (-5 \cdot 2)^3$. ¿Cuántas operaciones se necesitan para evaluar esta expresión? Indíquelas en el orden en el que deben realizarse.

7. Considere $\dfrac{5 + 5(7)}{2 + (4 - 8)}$. En el numerador ¿qué operación se deberá llevar a cabo primero?, en el denominador, ¿qué operación deberá realizarse primero?

8. En la expresión $4 + 2(-7 - 1)$, ¿cuántas operaciones deberán realizarse? Indíquelas en el orden en que deberán realizarse.

9. Explique la diferencia entre -3^2 y $(-3)^2$.

10. En la expresión $-2 \cdot 3^2$, ¿qué operación deberá realizarse primero?

NOTACIÓN *Indique cada solución para evaluar la operación.*

11. $-8 - 5(-2)^2 = -8 - 5(\square)$
$= -8 - \square$
$= -8 + (\square)$
$= \square$

12. $2 + (5 - 6 \cdot 2) = 2 + (5 - \square)$
$= 2 + [5 + (\square)]$
$= 2 + (\square)$
$= \square$

13. $[-4(2 + 7)] - 6 = [-4(\square)] - 6$
$= \square - 6$
$= \square$

14. $\dfrac{|-9 + (-3)|}{9 - 6} = \dfrac{|\square|}{3}$
$= \dfrac{\square}{3}$
$= \square$

PRÁCTICA *Calcule cada operación.*

15. $(-3)^2 - 4^2$
16. $-7 + 4 \cdot 5$
17. $3^2 - 4(-2)(-1)$
18. $2^3 - 3^3$
19. $(2 - 5)(5 + 2)$
20. $-3(2)^2 4$
21. $-10 - 2^2$
22. $-50 - 3^3$
23. $\dfrac{-6 - 8}{2}$
24. $\dfrac{-6 - 6}{-2 - 2}$
25. $\dfrac{-5 - 5}{2}$
26. $\dfrac{-7 - (-3)}{2 - 4}$
27. $-12 \div (-2)2$
28. $-60(-2) \div 3$
29. $-16 - 4 \div (-2)$
30. $-24 + 4 \div (-2)$
31. $|-5(-6)|$
32. $|-7 - 9|$
33. $|-4 - (-6)|$
34. $|-2 + 6 - 5|$
35. $5|3|$
36. $5|4|$
37. $-6|-7|$
38. $-6|-4|$
39. $(7 - 5)^2 - (1 - 4)^2$
40. $5^2 - (-9 - 3)$
41. $-1(2^2 - 2 + 1^2)$
42. $(-7 - 4)^2 - (-1)$
43. $-50 - 2(-3)^3$
44. $(-2)^3 - (-3)(-2)$
45. $-6^2 + 6^2$
46. $-9^2 + 9^2$
47. $3\left(\dfrac{-18}{3}\right) - 2(-2)$
48. $2\left(\dfrac{-12}{3}\right) + 3(-5)$
49. $6 + \dfrac{25}{-5} + 6 \cdot 3$
50. $-5 - \dfrac{24}{6} + 8(-2)$

51. $\dfrac{1-3^2}{-2}$

52. $\dfrac{-3-(-7)}{2^2-3}$

53. $\dfrac{-4(-5)-2}{-6}$

54. $\dfrac{(-6)^2-1}{-4-3}$

55. $-3\left(\dfrac{32}{-4}\right)-(-1)^5$

56. $-5\left(\dfrac{16}{-4}\right)-(-1)^4$

57. $6(2^3)(-1)$

58. $2(3^3)(-2)$

59. $2+3[5-(1-10)]$

60. $12-2[1-(-8+2)]$

61. $-7(2-3\cdot 5)$

62. $-4(1+3\cdot 5)$

63. $-[6-(1-4)^2]$

64. $-[9-(9-12)^2]$

65. $15+(-3\cdot 4-8)$

66. $11+(-2\cdot 2+3)$

67. $|-3\cdot 4+(-5)|$

68. $|-8\cdot 5-2\cdot 5|$

69. $|(-5)^2-2\cdot 7|$

70. $|8\div(-2)-5|$

71. $-2+|6-4^2|$

72. $-3-4|6-7|$

73. $2|1-8|\cdot|-8|$

74. $2(5)-6(|-3|)^2$

75. $-2(-34)^2-(-605)$

76. $11-(-15)(24)^2$

77. $-60-\dfrac{1620}{-36}$

78. $\dfrac{2^5-4^6}{-42+58}$

Realice un estimado.

79. $-379+(-103)+287$

80. $\dfrac{-67-9}{-18}$

81. $-39\cdot 8$

82. $-568-(-227)$

83. $-3887+(-5106)$

84. $-333(-4)$

85. $\dfrac{6267}{-5}$

86. $-36+(-78)+59+(-4)$

APLICACIONES

87. PRUEBA En un intento por desalentar a los alumnos que contestan adivinando en un examen de opción múltiple, un profesor utiliza la escala que se muestra en la tabla siguiente. Si un alumno no está seguro de la respuesta, se salta la pregunta, ya que las respuestas incorrectas se penalizan bastante. Encuentre la calificación de la prueba de un alumno que contestó correctamente 12 preguntas y contestó mal 3, además dejó en blanco 5 preguntas.

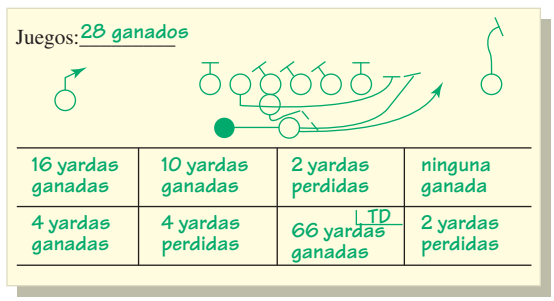
Respuesta	Valor
Correcto	+3
Incorrecto	−4
Respuestas en blanco	−1

88. PRESUPUESTO FEDERAL Ver abajo. Suponga que lo contrataron para escribir el discurso de un político que desea destacar las mejoras en las finanzas del gobierno federal durante los años 90. ¿Sería mejor que el político se refiera al déficit/superávit promedio del presupuesto durante la última mitad del período, o a los últimos cuatro años de esa década? Explique su respuesta.

Déficit/superávit presupuestal
(miles de millones de dólares)

Déficit	Año	Superávit
−164	1995	
−107	1996	
−22	1997	
	1998	+70
	1999	+123

89. INFORME DE EXPLORACIÓN La ilustración le demuestra a un entrenador de fútbol qué tan exitoso era su opositor corriendo a "una echada 28" la última vez que se enfrentaron los dos equipos. ¿Cuál fue el promedio ganado por su oponente en este juego?

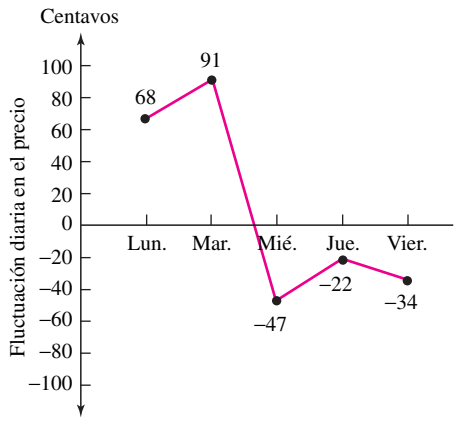


90. HOJAS DE CÁLCULO La tabla revela los datos de la hoja de cálculo para un experimento de química. Para obtener un resultado, el químico necesita sumar los valores de la fila 1, aumentar al doble la suma, y después dividir ese número por el valor más pequeño de la columna C. ¿Cuál es el resultado final de los cálculos?

	A	B	C	D
1	12	−5	6	−2
2	15	4	5	−4
3	6	4	−2	8

Estime la respuesta a cada pregunta.

91. PRECIOS DEL PETRÓLEO El precio por barril de petróleo crudo fluctúa con la oferta y la demanda. Puede aumentar y bajar rápidamente. La gráfica de línea muestra cuántos centavos aumentó o bajó el precio por barril cada día por una semana. Por ejemplo, el lunes el precio aumentó 68 centavos, y el martes 91 centavos adicionales. Calcule el aumento neto o la pérdida en el valor de un barril de petróleo crudo durante la semana.



92. ESTIMACIÓN Determine rápidamente un estimado razonable a la respuesta exacta de cada una de las siguientes situaciones.

a. Un buzo se sumerge a una profundidad de 34 pies debajo de nivel del mar, entonces observa justo debajo de donde está la figura de una nave hundida. Entonces se sumerge otros 57 pies para alcanzarla. ¿Cuál es la profundidad de la nave que se hundió?

b. Una compañía dedicada a la elaboración de productos para la higiene dental ofrece la devolución de su dinero como garantía en la compra de su paquete blanqueador de dientes. Cuando el cliente devuelve el paquete porque quedó inconforme, la compañía pierde 11 dólares debido al costo de producción del mismo, ya que no se puede vender nuevamente. ¿Cuánto dinero ha perdido la compañía debido a esta política de reembolso si los clientes han devuelto 56 paquetes del producto blanqueador para los dientes?

c. Una línea de tranvía desciende desde la punta de una pendiente de montaña situada a una altura de 7561 pies en 18 etapas iguales. ¿Cuánto desciende en cada etapa?

POR ESCRITO

93. ¿Por qué se necesitan las reglas del orden para las operaciones cuando se evalúan expresiones?

94. En las reglas del orden de las operaciones, qué significa *conforme se presenten de izquierda a derecha?*

95. Indique una situación de la vida diaria donde utilice la elaboración de estimaciones.

96. Mencione las ventajas y desventajas del proceso de estimación.

REPASO

97. Redondee 5456 al mil más cercano.

98. Calcule: $6^2 - (10 - 8)$.

99. ¿Cómo se determina el perímetro de un rectángulo?

100. "Cuando se mide el perímetro, se utilizan unidades cuadradas". ¿Cierto o falso?

101. Un elevador tiene una capacidad de 1000 libras. En su interior hay siete personas con un peso aproximado de 140 libras. ¿Está sobrecargado el elevador?

102. Indique los factores de 36.

CONCEPTO CLAVE

Números con signo

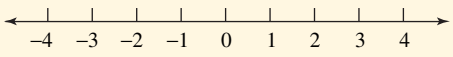
En matemáticas, trabajamos con números tanto positivos como negativos. Estudiamos los números negativos porque son necesarios al momento de describir muchas situaciones de la vida cotidiana.

Represente cada una de las situaciones utilizando un número con signo.

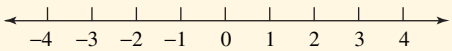
1. La bolsa de valores perdió 5 puntos.
2. El río alcanzó 12 pies sobre el nivel.
3. 30 segundos antes de entrar al aire.
4. Un negocio de $6 millones en números rojos.
5. 10 grados sobre lo normal.
6. El año 2000 d.C.
7. Un sobregiro de 205 dólares.
8. Su cuota es inferior por 14 unidades.

La recta numérica que se muestra a continuación se puede utilizar para mostrar los números positivos y negativos.

9. Sobre la recta numérica, marque el lugar de los números enteros positivos y negativos.

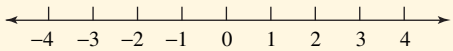


10. En la recta numérica, grafica el 2 y su opuesto.



11. Dos números, -6 y -4, están representados en la recta numérica. ¿Qué puede decir acerca de sus tamaños relativos?

12. El valor absoluto de -3, se escribe $|-3|$, es la distancia entre 3 y 0 en la recta numérica. Muestre esta distancia en la recta numérica.



Indique, en el espacio en blanco que aparece después de cada reactivo, cómo se realiza la suma, multiplicación y división de dos enteros que tienen signos iguales y diferentes. Después explique el método que se utiliza para efectuar la resta de números enteros.

13. **Suma**

    Con signos iguales:

    Con signos diferentes:

14. **Multiplicación**

    Con signos iguales:

    Con signos diferentes:

15. **División**

    Con signos iguales:

    Con signos diferentes:

16. **Resta de enteros**

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

SECCIÓN 2.1

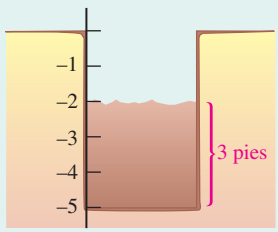
CONTRARIOS. Que todos los alumnos de su grupo formen pares. El objeto del juego es que un miembro de un equipo utilice palabras clave, con el fin de que el otro miembro adivine cada una de las palabras que se muestran en la columna 1. Esto se hace al dar a su socio la palabra clave que tiene un significado contrario. Por ejemplo, si usted quiere que su socio diga la palabra *arriba,* indique *abajo.* Mencione todas las palabras que aparecen en la columna I. Mantenga un registro de la cantidad de palabras que se adivinan correctamente.

Después intercambie las posiciones. La persona que dio primero las palabras clave ahora las recibe. Termine entonces con todas las palabras de la columna II.

Columna I		**Columna II**	
Abajo	superávit	ganar	positivo
Sobre	saldo deudor	recuperar	incremento
Adelante	ganancia	adelante	deuda
Antes	deducir	retiro	saldo a favor
Menor	pasivo	aumento	acelerar

SECCIÓN 2.2

SUMA DE ENTEROS Para ilustrar cómo sumar $-5 + 3$, piense en un hoyo que tiene una profundidad de 5 pies (-5) el cual tiene 3 pies de tierra (3) y súmelos a éste. La figura de la derecha muestra que el resultado de ese hoyo sería de 2 píes de profundidad (-2). Así que $-5 + 3 = -2$. Dibuje algo similar para encontrar el resultado de cada suma.



a. $-4 + 1$ **b.** $-5 + 4$
c. $-6 + 6$ **d.** $-3 + (-1)$
e. $-3 + (-3)$ **f.** $-3 + 5$

SECCIÓN 2.3

RESTA DE ENTEROS Escriba un problema de resta en el que la diferencia de dos números negativos sea:

a. Un número positivo. **b.** Un número negativo.

SECCIÓN 2.4

MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS

a. Complete la siguiente tabla de multiplicación.

b. Elabore otra tabla con 10 filas comenzando con -1 hasta -10 y en la primera columna del 1 al 10.

Tabla de multiplicación										
•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
−1										
−2										
−3										
−4										
−5										
−6										
−7										
−8										
−9										
−10										

c. Forme una tabla con 10 filas comenzando de -1 a -10 y una primera columna de -1 hasta -10.

SECCIÓN 2.5

OPERACIONES CON DOS ENTEROS Para cada operación de la tabla, comente si la respuesta siempre es positiva, o siempre es negativa, o ambas.

Signos de los dos enteros	Suma	Resta	Multiplicación	División
Ambos positivos				
Ambos negativos				
Uno positivo, uno negativo				

SECCIÓN 2.6

ESTIMACIÓN Calcule la respuesta a cada problema.

a. $405 - 567$ **b.** $-2564 - 2456$
c. $989 - 898$ **d.** $-23\,250 + 22\,750$
e. $56(-87)$ **f.** $-40 - 30 - 45$
g. $608 \div (-2)$ **h.** $-94 + 90 - 45$

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 2.1 *Introducción a los números enteros*

CONCEPTOS

La *recta numérica* es una línea vertical u horizontal que se utiliza para representar gráficamente los números.

Un *número negativo* es menor que 0.
Un *número positivo* es mayor que 0.

Enteros:
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Símbolos de desigualdad:

$>$ es mayor que

$<$ es menor que

$\geq$ es mayor o igual que

$\leq$ es menor o igual que

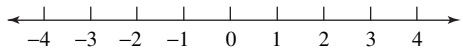
El *valor absoluto* de un número es la distancia entre éste y el cero en la recta numérica.

En la recta numérica, dos números que están a la misma distancia de 0, pero en lados distintos de éste, se denominan *opuestos*.

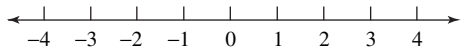
EJERCICIOS DE REPASO

Grafique el conjunto de números.

1. $\{-3, -1, 0, 4\}$



2. Los enteros mayores que -3 pero menores a 4



Escriba uno de los símbolos $>$ o $<$ en los espacios correspondientes.

3. $-7 \square 0$

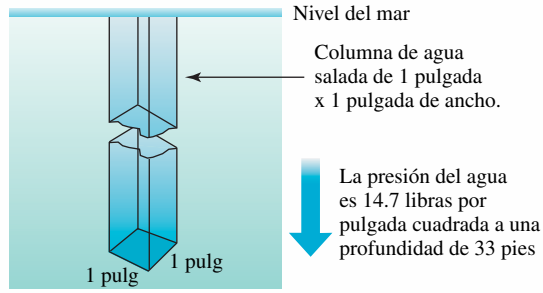
4. $-20 \square -19$

Escriba uno de los símbolos $\geq$ o $\leq$ en los espacios en blanco.

5. $|-16| \square -16$

6. $56 \square 56$

7. PRESIÓN DEL AGUA El agua salada ejerce una presión de 14.7 libras por pulgada cuadrada a una profundidad de 33 pies. Indique la profundidad utilizando un número con signo.


Nivel del mar
Columna de agua salada de 1 pulgada x 1 pulgada de ancho.
La presión del agua es 14.7 libras por pulgada cuadrada a una profundidad de 33 pies
1 pulg
1 pulg

Represente cada una de las siguientes expresiones utilizando un número con signo.

8. Un déficit de $1200.

9. 10 segundos antes de salir al aire.

Calcule cada una de las expresiones.

10. $|-4|$

11. $|0|$

12. $|-43|$

13. $-|12|$

Explique el significado de cada signo en color rojo.

14. -5

15. $-(-5)$

16. $-(-5)$

17. $5 - (-5)$

El opuesto del opuesto de un número es ese número.

Encuentre cada uno de los siguientes.

18. $-(-12)$

19. El opuesto de 8

20. El opuesto de -8

21. -0

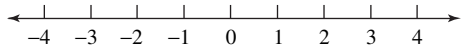
SECCIÓN 2.2 *Suma de enteros*

Para sumar dos enteros con *signos iguales,* sume su valor absoluto y coloque su signo común a la suma.

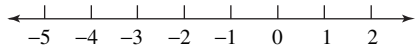
Para sumar dos enteros con signos *distintos,* reste su valor absoluto, el más pequeño del mayor. Coloque el signo del número con mayor valor absoluto a ese resultado.

Utilice la recta numérica para encontrar cada suma.

22. $4 + (-2)$



23. $-1 + (-3)$



Sume.

24. $-6 + (-4)$

25. $-23 + (-60)$

26. $-1 + (-4) + (-3)$

27. $-4 + 3$

28. $-28 + 140$

29. $9 + (-20)$

30. $3 + (-2) + (-4)$

31. $(-2 + 1) + [(-5) + 4]$

Propiedad aditiva del 0: la suma de cualquier número y 0 es ese número.

Sume.

32. $-4 + 0$

33. $0 + (-20)$

34. $-8 + 8$

35. $73 + (-73)$

Se dice que los números son *inversos aditivos* si su suma es 0.

Proporcione el inverso aditivo de cada número.

36. -11

37. 4

38. SEQUÍA Durante una sequía, el nivel del agua en una reserva disminuyó a un punto 100 pies bajo lo normal. Después de dos meses de lluvia, el nivel aumentó un total de 35 pies. ¿Qué tan debajo de lo normal estaba el nivel del agua después de la lluvia?

SECCIÓN 2.3 *Resta de enteros*

Regla para la resta: para restar dos enteros, sume el opuesto del segundo entero al primer entero.

Reste los siguientes.

39. $5 - 8$

40. $-9 - 12$

41. $-4 - (-8)$

42. $-6 - 106$

43. $-8 - (-2)$

44. $7 - 1$

45. $0 - 37$

46. $0 - (-30)$

47. Llene los espacios en blanco. La resta de un número es lo mismo que _____ el _____ de ese número.

Calcule cada expresión.

48. $-9 - 7 + 12$

49. $7 - [(-6) - 2]$

50. $1 - (2 - 7)$

51. $-12 - (6 - 10)$

52. Reste 27 de -50.

53. Calcule: $2 - [-(-3)]$.

54. MINERÍA DE ORO Algunos mineros descubrieron una veta pequeña de oro a una profundidad de 150 pies, esto los incitó a continuar con su exploración. Después de descender otros 75 pies, encontraron un hallazgo mucho más grande. Utilice un número con signo para representar la profundidad del segundo descubrimiento.

Para encontrar el *cambio* en una cantidad, reste el valor inicial al valor final.

55. REGISTRO DE TEMPERATURA A continuación se indican las temperaturas más bajas y más altas registradas en Alaska y Virginia. Encuentre, para cada estado, la diferencia en la temperatura más alta y la más baja dentro de los registros de temperatura.

Alaska:	Baja $-80°$ enero 23, 1971	Virginia: Baja $-30°$ enero 22, 1985
	Alta $100°$ junio 27, 1915	Alta $110°$ julio 15, 1954

SECCIÓN 2.4 *Multiplicación de enteros*

El producto de dos enteros con signos *iguales* es positivo. El producto de dos enteros con *signos diferentes* es negativo.

Multiplique.

56. $-9 \cdot 5$

57. $-3(-6)$

58. $7(-2)$

59. $(-8)(-47)$

60. $-20 \cdot 5$

61. $-1(-1)$

62. $-1(25)$

63. $(5)(-30)$

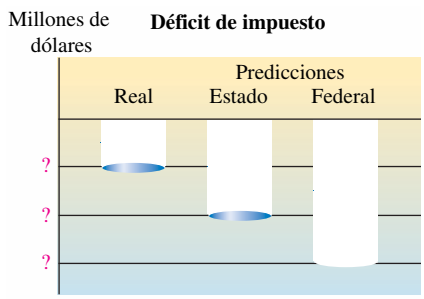
64. $(-6)(-2)(-3)$

65. $4(-3)3$

66. $0(-7)$

67. $(-1)(-1)(-1)(-1)$

68. DÉFICIT DE IMPUESTOS Una predicción de una agencia estatal respecto al déficit de impuestos demostró ser dos veces peor que el déficit real de \$3 millones. La predicción federal del mismo déficit era aún más inexacta, ya que superó tres veces la cantidad del déficit real. Termine la ilustración que resume este pronóstico incorrecto.



El *exponente se* utiliza para representar una multiplicación repetida.

Encuentre cada una de las potencias

69. $(-5)^2$

70. $(-2)^5$

71. $(-8)^2$

72. $(-4)^3$

Cuando un entero negativo se eleva a una potencia *par*, el resultado es positivo. Cuando el entero negativo se eleva a una potencia *impar*, el resultado es negativo.

73. Cuando se evalúa $(-5)^9$ ¿el resultado es positivo o negativo?

74. Explique la diferencia entre -2^2 y $(-2)^2$ y después calcule cada uno.

SECCIÓN 2.5 *División de enteros*

El cociente de dos números con el *mismo* signo es positivo.

El cociente de dos enteros con *signos diferentes* es negativo.

Si 0 se divide por cualquier número diferente de cero, el cociente es 0.

La división entre 0 es indefinida.

75. La división entre 0 es indefinida. $\frac{-15}{5} = -3$ ( ) = .

Divida.

76. $\frac{-14}{7}$

77. $\frac{25}{-5}$

78. $-64 \div 8$

79. $\frac{-202}{-2}$

Encuentre, de ser posible, cada uno de los cocientes.

80. $\frac{0}{-5}$

81. $\frac{-4}{0}$

82. $\frac{-673}{-673}$

83. $\frac{-10}{-1}$

84. TIEMPO DE PRODUCCIÓN Gracias a las mejoras en los procedimientos de producción, el tiempo necesario para producir un componente electrónico se disminuyó 12 minutos en los últimos seis meses. Si la disminución en el tiempo de producción era uniforme, ¿cuánto cambió cada mes en este periodo?

SECCIÓN 2.6 *Orden de las operaciones y estimación*

Reglas para determinar el orden de las operaciones

1. Realizar todos los cálculos que estén dentro de paréntesis y en otros símbolos de agrupación.
2. Calcular todas las expresiones exponenciales.
3. Realizar todas las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
4. Realizar todas las sumas y restas, de izquierda a derecha.

Trabajar siempre desde el grupo más interior de símbolos hasta el más exterior

Una barra de fracción representa un símbolo de agrupación.

Una *estimación* es una aproximación que proporciona una idea rápida de lo que sería una respuesta verdadera.

Calcule cada una de las expresiones.

85. $2 + 4(-6)$

86. $7 - (-2)^2 + 1$

87. $2 - 5(4) + (-25)$

88. $-3(-2)^3 - 16$

89. $-2(5)(-4) + \frac{|-9|}{3^2}$

90. $-4^2 + (-4)^2$

91. $-12 - (8 - 9)^2$

92. $7|-8| - 2(3)(4)$

93. $-4\left(\frac{15}{-3}\right) - 2^3$

94. $-20 + 2(12 - 5 \cdot 2)$

95. $-20 + 2[12 - (-7 + 5)^2]$

96. $8 - |-3 \cdot 4 + 5|$

97. $\frac{10 + (-6)}{-3 - 1}$

98. $\frac{3(-6) - 11 + 1}{4^2 - 3^2}$

Estime cada respuesta.

99. $-89 + 57 + (-42)$

100. $\frac{-507}{-26}$

101. $(-681)(9)$

102. $317 - (-775)$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2

1. Coloque uno de los símbolos $>$ o $<$ en los espacios correspondientes para dar una respuesta correcta.

a. $-8 \square -9$ **b.** $-8 \square |-8|$

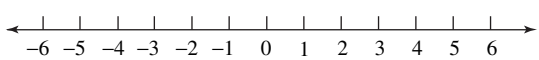
c. Lo opuesto de $5 \square 0$.

2. Mencione los enteros.

3. INSCRIPCIÓN ESCOLAR De acuerdo con las proyecciones de la siguiente tabla, ¿qué colegio enfrentará la crisis más grande en el año 2010?

Escuelas de nivel secundario con escasez de asientos en el salón de clase para 2010	
Sylmar	−669
San Fernando	−1630
Monroe	−2488
Cleveland	−350
Canoga Park	−586
Polytechnic	−2379
Van Nuys	−1690
Reseda	−462
North Hollywood	−1004
Hollywood	−774

4. Utilice la recta numérica para encontrar la suma: $-3 + (-2)$.



5. Realice las sumas.

a. $-65 + 31$ **b.** $-17 + (-17)$

c. $[6 + (-4)] + [-6 + (-4)]$

6. Reste.

a. $-7 - 6$ **b.** $-7 - (-6)$

c. $0 - 15$ **d.** $-60 - 50 - 40$

7. Encuentre cada producto.

a. $-10 \cdot 7$ **b.** $-4(-2)(-6)$

c. $(-2)(-2)(-2)(-2)$ **d.** $-55(0)$

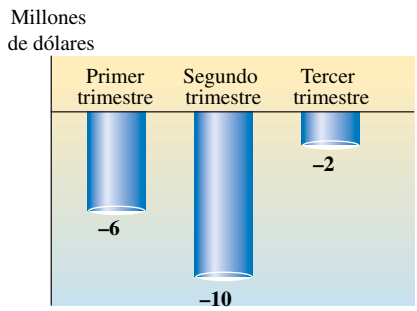
8. Escriba la expresión de multiplicación para $\dfrac{-20}{-4} = 5$.

9. Encuentre cada uno de los cocientes, de ser posible.

a. $\dfrac{-32}{4}$ **b.** $\dfrac{8}{6-6}$

c. $\dfrac{-5}{1}$ **d.** $\dfrac{0}{-6}$

10. POSESIÓN DEL NEGOCIO Seis inversionistas están evaluando la posibilidad de asumir el control de una compañía que tiene potencial, pero deben pagar la deuda que la compañía ha acumulado durante los últimos nueve meses. ¿Si todos planean tener la misma participación en las acciones, con cuánto tendrán que contribuir cada uno de los inversionistas para saldar la deuda?



11. GEOGRAFÍA El punto más bajo en el continente africano es la depresión de Qattarah en el desierto del Sahara, localizado a 436 pies bajo del nivel del mar. El punto más bajo en el continente norteamericano es el Valle de la Muerte en California, que está a 282 pies bajo el nivel del mar. Encuentre la diferencia entre las dos elevaciones.

12. Calcule cada una de las expresiones.

a. $-(-6)$ **b.** $|-7|$

c. $-|-9+3|$ **d.** $2|-66|$

13. Encuentre cada una de las potencias.

a. $(-4)^2$ **b.** -4^2

c. $(-4+3)^5$

Calcule las siguientes expresiones.

14. $-18 \div 2 \cdot 3$

15. $4-(-3)^2+6$

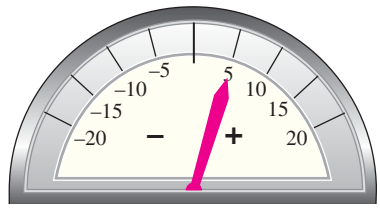
16. $-3+\left(\dfrac{-16}{4}\right)-3^3$

17. $-10+2[6-(-2)^2(-5)]$

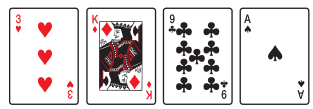
18. $\dfrac{4(-6)-2^2}{-3-4}$

19. CAMBIO DE TEMPERATURA En un laboratorio, la temperatura de un fluido se redujo a razón de 6° por hora durante 12 horas. ¿Qué número con signo representa el cambio en la temperatura?

20. AMPERÍMETRO Muchos automóviles tienen un amperímetro similar al que se muestra a continuación. Suponiendo que los faros consumen una corriente de 8 amperes y el receptor de radio consume 4 amperes, si se encienden ambos, ¿cuál será la indicación del amperímetro?, ¿cuál sería la nueva lectura?



21. JUEGOS DE CARTAS Después de la primera ronda de un juego de cartas, Tommy tenía una de 8. Cuando perdió la segunda ronda, tuvo que deducir el valor de las cartas que le quedaban en la mano de la puntuación de la primera ronda. (Véase la ilustración de abajo). ¿Cuál era su puntuación después de las dos rondas del juego? Para anotar, las cartas con caras cuentan como 10 puntos y el as 1 punto.



22. La multiplicación significa una suma repetida, utilice este hecho para demostrar que el producto de un número positivo y de uno negativo, como $5(-4)$, es negativo.

23. Explique por qué razón el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.

24. La desigualdad de $12 \geq 12$ ¿es verdadera o falsa? Explique por qué.

CAPÍTULOS 1-2 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

Considere los números del siguiente grupo $\{-2, -1, 0, 1, 2\frac{3}{2}, 5, 9\}$.

1. Enliste cada número natural.

2. Anote cada número entero.

3. Escriba cada número negativo.

4. Enliste cada entero.

Considere el número 7 326 549.

5. ¿Cual dígito está en la columna de los miles?

6. ¿Cuál dígito está en la columna de los cientos de miles?

7. Redondee al ciento más cercano.

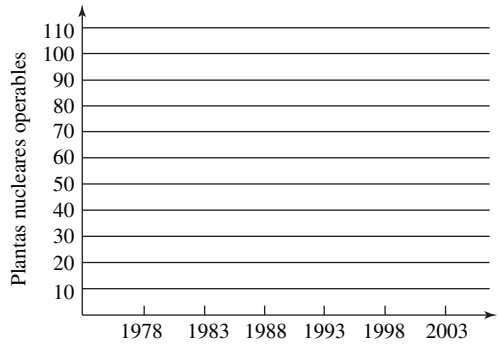
8. Redondee al diez mil más cercano.

9. ESTIMADOS Un colegio de distrito recibió los estimados que se muestran en la tabla. ¿Qué compañía deberá obtener el contrato?

Distrito escolar unificado de Citrus Licitación 02/9899 INSTALACIÓN DE CABLEADO Y DE DUCTOS	
Datatel	$2 189 413
Walton Electric	$2 201 999
Advanced Telecorp	$2 175 081
CRF Cable	$2 174 999
Clark & Sons	$2 175 801

10. POTENCIA NUCLEAR La tabla proporciona el número de plantas nucleares en Estados Unidos durante el ciclo 1978-2003, en incrementos de cinco años. Construya una gráfica de barras utilizando los datos siguientes.

Año	1978	1983	1988	1993	1998	2003
Plantas	70	80	108	109	104	104



Fuente: *Almanaque Mundial, 2005*

Realice cada una de las operaciones.

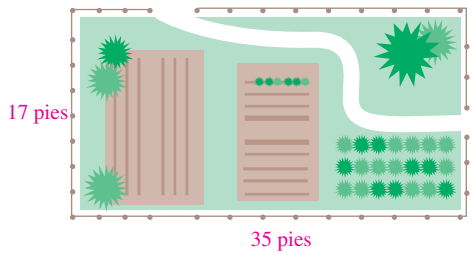
11. $237 + 549$

12. $6375 - 2569$

13.
$$\begin{array}{r} 5369 \\ -\ 685 \\ \hline \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{r} 7899 \\ +5237 \\ \hline \end{array}$$

15. Encuentre el perímetro y el área del jardín rectangular.



16. En un envío de 147 piezas de muebles, 27 piezas eran sofás, 55 eran sillas de cuero, y el resto eran sillas de madera. Encuentre la cantidad total de sillas de madera.

Realice cada una de las operaciones.

17. $435 \cdot 27$

18. $1261 \div 97$

19.
$$\begin{array}{r} 4587 \\ \times\ \ 67 \\ \hline \end{array}$$

20. $38\overline{)17\,746}$

21. ENVÍO Hay 12 pelotas de tenis en una docena y 12 docenas en una gruesa. ¿Cuántas pelotas de tenis hay en un envío de 12 gruesas?

22. Encuentre todos los factores de 18.

Identifique cada número como primo, compuesto, par o impar.

23. 17

24. 18

25. 0

26. 1

27. Encuentre la factorización prima de 504.

28. Escriba las expresiones $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ utilizando un exponente.

Evalúe cada una de las expresiones.

29. $5^2 \cdot 7$

30. $16 + 2[14 - 3(5 - 4)^2]$

31. $25 + 5 \cdot 5$

32. $\dfrac{16 - 2 \cdot 3}{2 + (9 - 6)}$

33. LÍMITE DE VELOCIDAD Una oficial de tránsito monitoreó a varios automóviles en una calle de la ciudad. Encontró que las velocidades de los automóviles eran las siguientes:

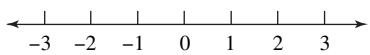
38, 42, 36, 38, 48, 44

¿Qué porcentaje obedeció el límite de velocidad de 40 mph?

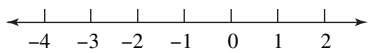
34. PRUEBA DEL DETECTOR DE MENTIRAS Un ladrón obtuvo -18 en la prueba del polígrafo, el resultado fue decepcionante. Sin embargo, en una segunda prueba, su calificación cambió a $+3$, lo que es poco concluyente. Encuentre la diferencia en el resultado.

Grafique cada conjunto de números en la recta numérica.

35. $\{-2, -1, 0, 2\}$



36. Enteros mayores que -4 y menores a 2



Evalúe cada una de las expresiones.

37. $-2 + (-3)$

38. $-15 + 10$

39. $|-3 - 1| - 5$

40. $15 - |-3 - 4|$

41. $(-8)(-3)^3$

42. $5(-7)$

43. $\dfrac{-14}{-7}$

44. $\dfrac{45}{-9}$

45. $5 + (-3)(-7)$

46. $-2[-6(5) - 5]$

47. $\dfrac{10 - (-5)}{1 - 2 \cdot 3}$

48. $\dfrac{3(-6) - 10}{3^2 - 4^2}$

49. -9^2

50. $(-9)^2$

51. COMPRA DE UN NEGOCIO Cuando 12 inversionistas decidieron comprar una compañía en bancarrota, acordaron asumir la deuda de la compañía por partes iguales. La deuda total era de $1 512 444. ¿Cuánto tuvieron que pagar cada uno de los inversionistas?

52. BANCA Un alumno tiene 48 dólares en su cuenta de cheques. Luego hizo un cheque por 105 dólares para comprar varios libros. El banco recibió el cheque, pero le asignó un cargo adicional de 22 dólares por el sobregiro. ¿Cuál es el nuevo saldo en la cuenta de cheques del alumno?

Para los ejercicios 53 y 54, determine una estimación razonable de la respuesta exacta.

53. CAMPAMENTO Los excursionistas realizan un descenso de 1150 pies del cañón en 12 etapas. ¿Cuántos pies tienen que descender en cada una de las etapas?

54. RETIRO Un fabricante de automóviles tiene que retirar 18 250 coches porque presentan una falla en el montaje de motor. ¿Si la reparación de cada automóvil cuesta 195 dólares, ¿cuánto perderá la compañía debido al retiro?

CAPÍTULO 3

Fracciones y números mixtos

3.1 Fracciones

3.2 Multiplicación de fracciones

3.3 División de fracciones

3.4 Suma y resta de fracciones

El MCM y el MFC

3.5 Multiplicación y división de números mixtos

3.6 Suma y resta de números mixtos

3.7 Orden de las operaciones y fracciones complejas

Concepto clave: propiedad fundamental de las fracciones

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso

Digital Vision/Getty Images

Se ha dicho que "un centavo ahorrado es un centavo ganado". Los compradores inteligentes ciertamente saben que esto es verdad. Se puede ahorrar mucho dinero al esperar por ofertas de descuento en artículos tales como enseres domésticos, muebles y joyas. Muchas tiendas ofrecen en sus campañas de publicidad descuentos que van de 1/3 a 1/2 en esta clase de artículos varias veces al año. En tales casos, un comprador informado necesita conocer las fracciones para calcular los descuentos y los precios de venta.

Verifique sus conocimientos

1. En la fracción $\frac{3}{4}$, 3 es el _____ y 4 es el _____.

2. En la fórmula del área del triángulo, $A = \frac{1}{2}bh$, b representa la longitud de la _____ y la h indica la _____.

3. Dos números se llaman _____ si su producto es 1.

4. El _____ _____común denominador para un conjunto de fracciones es el número más pequeño que cada denominador dividirá exactamente.

5. Las fracciones que representan la misma cantidad, como $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$, se llaman fracciones _____ .

6. ¿Qué parte fraccionaria de un día son 8 horas? ¿Cuál es la parte fraccional que resta del día?

7. Simplifique cada fracción.

a. $\frac{24}{30}$ **b.** $\frac{144}{192}$

8. Multiplique:

a. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)$ **b.** $-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)$

9. Cuántos minutos hay en $\frac{3}{8}$ de una hora?

10. Divida:

a. $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{2} \div 3$

11. Sume:

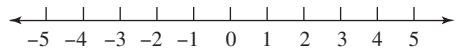
a. $\frac{2}{5} + \frac{7}{8}$ **b.** $-\frac{3}{5} + 1$

12. Reste:

a. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ **b.** $1 - \frac{3}{8}$

13. Exprese $\frac{5}{6}$ como una fracción equivalente con denominador 36.

14. Grafique: $-\frac{9}{8}, \frac{1}{9}$ y $1\frac{1}{2}$.



15. Encuentre el área de un rectángulo cuya base es $\frac{7}{4}$ cm y su altura es $\frac{5}{7}$ cm.

16. Sume: $123\frac{4}{5} + 189\frac{2}{3}$

17. Reste: $13\frac{1}{3} - 8\frac{7}{8}$

18. Encuentre el perímetro de un triángulo cuyos lados son $3\frac{1}{4}$ pulg, $2\frac{1}{5}$ pulg, $4\frac{3}{8}$ pulg

19. Evalúe: $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

20. Simplifique la fracción compleja: $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$

21. Simplifique la fracción compleja: $\dfrac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}$

22. Cuatro quintos de las personas encuestadas que asistían a una playa dijeron que utilizaban loción bloqueadora. Doce de las personas encuestadas no la utilizan. ¿Cuántas personas formaron parte de la encuesta?

23. Josie y cinco amigos compraron diez boletos de lotería. Si uno de sus boletos sale premiado, ganarán $10\frac{1}{2}$ millones de dólares. ¿Cuál será la parte del premio para Josie si ganan?

Taller de habilidades para el estudio

ESCUCHAR Y TOMAR APUNTES DEL CURSO

Asistir a todas tus clases es crucial para tener éxito en un curso de matemáticas. Su maestro le dará explicaciones y ejemplos que probablemente no encontrará en su libro de texto, así como información de las fechas de las evaluaciones y la entrega de tareas asignadas. Como esta información no se encuentra en ningún otro lado, y es *normal* que se olvide lo aprendido al poco tiempo de haber asistido a los cursos, es importante que usted mantenga un registro escrito de todo lo que ocurrió en clase. (*Nota*: los alumnos inscritos y los que asisten a clases como oyentes pueden desear grabar el audio de las notas del curso. Pida a su profesor permiso para grabar las clases en audio).

Escuchar el contenido de los cursos. Asistir a clase puede ser un poco diferente de escuchar su CD o sus archivos favoritos MP3, pues es necesario que usted sea un oyente *activo*. En general, es imposible escribir todo lo que el profesor dice en clase, pero la clave está en tener lo que es más importante. Para obtener el material importante, espere las claves por parte de su profesor: las pausas en las explicaciones y algunas frases como "esto es realmente importante" o como "esta es una pregunta que frecuentemente viene en el examen" son indicaciones en las que deberá poner especial atención. Otra forma es el escuchar con un lápiz en la mano, listo para apuntar estos ejemplos, definiciones y conceptos.

Cómo tomar notas. Generalmente al dar la clase, su profesor le indicará qué capítulo(s) y sección(es) de su libro de texto son importantes. Debe traer su libro de texto a cada clase y abrirlo en la sección que está presentando el profesor. De ser posible, averigue con anterioridad qué sección se presentará en cada clase y léala con anticipación *antes* de asistir a la clase. Conforme avance en la lectura trate de identificar qué términos y definiciones considera importantes para el profesor. Cuando su instructor se refiera a las definiciones que se encuentran en el texto, no será necesario que las escriba por completo, sólo anote el término que se define y el número de página que aparece, regístrelos utilizando abreviaturas y frases en vez de escribir las oraciones completas.

No se preocupe por tomar las notas perfectas en clase — de hecho idealmente debería "pasar en limpio" sus notas después de cada clase — de cualquier forma verá este tema con más detalle en la sección de taller de habilidades para el estudio del capítulo 4. Sin embargo, organice sus apuntes lo más posible mientras los escribe. Escriba paso a paso los ejemplos que explica su profesor. Titule los ejemplos y las definiciones que indica el profesor con el término "conceptos clave". Si se pierde un paso, o si no entiende uno en el ejemplo, solicite a su profesor que lo explique de nuevo. Los ejemplos deberían parecerse mucho a los problemas que aparecerán en sus tareas, así que es importante que los escriba tan completos como sea posible. Después de clase, siéntese con un compañero y compare sus notas, para ver si se perdieron de algo.

TAREA

1. Pregunte a su profesor qué sección(es) se tratará(n) en la clase siguiente, léalas y elabore una lista de términos y definiciones que considere serán los más importantes para su profesor.
2. En su clase siguiente, lleve su libro de texto y manténgalo abierto en las secciones que se están explicando. Si su profesor menciona un término o definición que estén en su libro de texto, escriba el término y el número de la página en la que aparece en sus notas. Escriba cada ejemplo que indique su profesor, asegúrese de haber incluido todos los pasos.
3. Encuentre por lo menos un compañero de clase con quien pueda revisar sus notas. Reúnase con él para comparar sus notas tan pronto como termine la clase. ¿Encontró alguna diferencia significativa en sus notas?

Los números enteros se utilizan para contar objetos, cuando se necesita representar las partes de un entero se utilizan las fracciones.

3.1 Fracciones

- Hechos básicos acerca de las fracciones
- Fracciones equivalentes
- Simplificación de una fracción
- Expresión de una fracción en términos superiores

No existe mejor lugar para iniciar el estudio de las fracciones que con *la propiedad fundamental de las fracciones*. Esta propiedad es la base de dos procedimientos que se utilizan cuando se trabaja con fracciones. Pero primero, repasemos algunos hechos básicos relacionados con las fracciones.

Hechos básicos acerca de las fracciones

1. Una fracción puede utilizarse para indicar una división. Como hemos visto, la fracción $\frac{8}{4}$ representa la división de $8 \div 4$. Por tanto,

$$\begin{matrix}\text{Dividendo} \longrightarrow \\ \text{Divisor} \longrightarrow\end{matrix} \frac{8}{4} = 2 \longleftarrow \text{Cociente}$$

2. Una fracción se puede utilizar para indicar partes iguales de un entero. En nuestras actividades diarias, a menudo tenemos que trabajar con partes de un entero. Por ejemplo, hablamos de las partes de una hora, partes de una pulgada y partes de una libra.

media hora tres octavos de pulgada de agua de lluvia
una hamburguesa de un cuarto de libra

3. Una fracción está integrada por un numerador, denominador y una barra fraccionaria.

$$\text{Barra fraccionaria} \longrightarrow \frac{3}{4} \begin{matrix}\longleftarrow \text{Numerador} \\ \longleftarrow \text{Denominador}\end{matrix}$$

El denominador (en este caso, 4) nos indica que un entero se dividió en cuatro partes iguales. El numerador nos dice que estamos considerando tres de éstas partes iguales.

4. Las fracciones pueden ser propias e impropias. Si el numerador de una fracción es menor que su denominador, la fracción se llamará **fracción propia**. Una fracción propia es menor que 1. Las fracciones cuyos numeradores son mayores o iguales que su denominador se conocen como **fracciones impropias**, y son mayores o iguales que 1.

Fracciones propias	**Fracciones impropias**
$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$, y $\frac{98}{99}$	$\frac{7}{2}, \frac{98}{97}, \frac{16}{16}$, y $\frac{5}{1}$

5. El denominador de una fracción no puede ser 0. $\frac{7}{0}, \frac{23}{0}$, y $\frac{0}{0}$ son expresiones sin sentido. (Recuerda que $\frac{7}{0}, \frac{23}{0}$, y $\frac{0}{0}$ representan una división entre 0, y un número no puede dividirse entre 0.) Sin embargo, $\frac{0}{7} = 0$ y $\frac{0}{23} = 0$.

6. Las fracciones pueden ser negativas. En ciertos casos se necesita una fracción negativa para describir una cantidad. Por ejemplo, si un terremoto causa un hundimiento en el camino de media pulgada, la cantidad del movimiento será representado por $-\frac{1}{2}$ pulg.

Las fracciones negativas pueden escribirse en tres formas. Los signos negativos pueden aparecer en el numerador, en el denominador o en frente de la fracción.

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{-15}{8} = \frac{15}{-8} = -\frac{15}{8}$$

EJEMPLO 1 **a.** En la figura 3.1, ¿qué parte fraccionaria del barril está llena? **b.** ¿Qué parte fraccionaria está vacía?

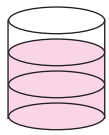


FIGURA 3.1

Solución El barril se ha dividido en tres partes iguales.

a. Dos de las tres partes están llenas. En consecuencia el barril tiene $\frac{2}{3}$ lleno.

b. Una de las tres partes no está llena. El barril está $\frac{1}{3}$ vacío.

Las dos fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ son fracciones propias.

Autoevaluación 1

a. Con base en el calendario que se muestra abajo, ¿que parte fraccionaria del mes ha pasado? **b.** ¿Cuál es la parte fraccionaría restante?

DICIEMBRE

X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Respuesta: **a.** $\frac{11}{31}$, **b.** $\frac{20}{31}$

A menudo a las fracciones se les conoce como **números racionales**. Todos los enteros son números racionales, ya que cada entero puede escribirse como una fracción cuyo denominador es 1. Por ejemplo:

$$2 = \frac{2}{1}, \qquad -5 = \frac{-5}{1}, \qquad \text{y} \qquad 0 = \frac{0}{1}$$

Como cada entero es también un número racional, los enteros son un subconjunto de los números racionales.

COMENTARIO Observe que no todos los números racionales son enteros. Por ejemplo, el número racional $\frac{7}{8}$ no es un entero.

Fracciones equivalentes

Dos fracciones pueden parecer diferentes y no obstante representan el mismo número. Por ejemplo, dividamos al rectángulo de la figura 3.2(a) en dos formas. En la figura 3.2 (b) lo dividimos en mitades (2 partes iguales). En la figura 3.2 (c) lo dividimos en cuartos (4 partes iguales). Observe que una mitad de la figura es del mismo tamaño que dos cuartos de la figura.

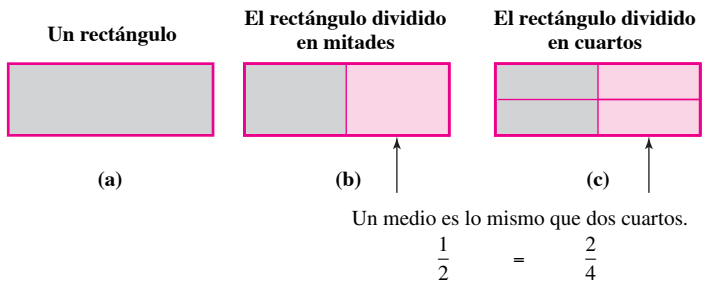


FIGURA 3.2

Las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ parecen diferentes, pero la figura 3.2 muestra que representan la misma cantidad. Se dice que ambas son **fracciones equivalentes**.

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son **equivalentes** si representan el mismo número.

Simplificación de una fracción

Si reemplazamos una fracción con otra equivalente que contenga números más pequeños, se dice que estamos **simplificando** o **reduciendo la fracción**. Al simplificar una fracción aplicamos el siguiente hecho.

Propiedad fundamental de las fracciones

Si se multiplica o divide tanto el numerador como el denominador de una fracción por el mismo número (diferente cero) el valor de la fracción no cambia.

Consideramos como ejemplo $\frac{24}{28}$. Es claro que 24 y 28 tienen un factor común, que es 4. Por la propiedad fundamental de las fracciones, podemos dividir el numerador y el denominador de esta fracción entre 4.

$$\frac{24}{28} = \frac{24 \div \mathbf{4}}{28 \div \mathbf{4}}$$

Se divide el numerador entre 4.

Se divide el denominador entre 4.

$$= \frac{6}{7}$$

Se realiza cada división: $24 \div 4 = 6$ y $28 \div 4 = 7$

Por tanto, $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$. Decimos que $\frac{24}{28}$ y $\frac{6}{7}$ son fracciones equivalentes, pues representan el mismo número.

En la práctica, mostramos la simplificación anterior en una forma ligeramente diferente.

$$\frac{24}{28} = \frac{\mathbf{4} \cdot 6}{\mathbf{4} \cdot 7}$$

Una vez que se observa un factor común del numerador y del denominador, se factoriza a cada uno de ellos de tal manera que se muestre. En este caso, 24 y 28 comparten un factor común de 4.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot 6}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 7}$$

Se divide el numerador y el denominador entre 4 dibujando diagonales que cruzan a los factores comunes. Utilice un número 1 pequeño para representar el resultado de cada una de las divisiones de 4 entre 4. Observe que $\frac{4}{4} = 1$.

$$= \frac{6}{7}$$

Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador: $1 \cdot 6 = 6 \cdot$ y $1 \cdot 7 = 7$.

En el segundo paso de la simplificación anterior, decimos que se *dividió (canceló) el factor común 4.*

Simplificación de una fracción

Podemos **simplificar** una fracción al factorizar su numerador y denominador, para luego dividir todos los factores comunes en el numerador y denominador a fin de cancelarlos.

Cuando una fracción ya no puede simplificarse más, se dice que está escrita en sus **términos mínimos.**

Términos mínimos

Una fracción está en sus **términos mínimos** si el factor común en el numerador y el denominador es 1.

EJEMPLO 2

Simplifique hasta los términos mínimos: $\frac{25}{75}$.

Solución El numerador y el denominador tienen un factor común de 25.

$$\frac{25}{75} = \frac{25 \cdot 1}{3 \cdot 25}$$ Se factoriza 25 como $25 \cdot 1 = 25$ y 75 como $3 \cdot 25$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{25}} \cdot 1}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{25}}}$$ Se divide el factor común de 25.

$$= \frac{1}{3}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador: $1 \cdot 1 \cdot = 1$ y $1 \cdot 3 = 3$.

Autoevaluación 2

Simplifique a los términos mínimos: $\frac{60}{80}$

Respuesta: $\frac{3}{4}$

EJEMPLO 3

Simplifique: $\frac{90}{126}$.

Solución Para encontrar los factores comunes que se dividirán, se obtienen los factores primos de 90 y 126.

$$\frac{90}{126} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$$ Se utiliza el método del árbol o el método de la división para obtener los factores primos de 90 y 126: $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ y $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot 7}$$ Se dividen los factores comunes de 2, 3 y 3.

$$= \frac{5}{7}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador.

Autoevaluación 3

Simplifique: $\frac{42}{150}$

Respuesta: $\frac{7}{25}$

COMENTARIO Las fracciones negativas se simplifican al igual que las fracciones positivas. Sólo recuerde escribir un signo negativo (–) frente cada uno de los pasos de la solución.

$$-\frac{45}{72} = -\frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{9}}}{8 \cdot \underset{1}{\cancel{9}}} = -\frac{5}{8}$$

EJEMPLO 4

Simplifique: $-\frac{225}{150}$.

Solución Para encontrar los factores comunes que se dividirán, se encuentran los factores primos de 225 y 150.

$$-\frac{225}{150} = -\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}$$ Se factoriza 225 como $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ y 150 como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

$$= -\frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$ Se dividen los factores comunes de 3, 5, y 5.

$$= -\frac{3}{2}$$ Se realizan las multiplicaciones el numerador y el denominador.

Autoevaluación 4

Simplifique: $-\frac{88}{12}$

Respuesta: $-\frac{22}{3}$

Expresión de una fracción en términos superiores

A veces es necesario reemplazar una fracción por otra equivalente que incluya números más grandes. Esto se llama **expresar la fracción en términos superiores** o **construir la fracción**.

Por ejemplo, para escribir $\frac{3}{8}$ como una fracción equivalente con un denominador de 40, podemos utilizar la propiedad fundamental de las fracciones y multiplicar el numerador y el denominador por 5.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot \mathbf{5}}{8 \cdot \mathbf{5}}$$

Se multiplica el numerador por 5.

Se multiplica el denominador por 5.

$$= \frac{15}{40}$$

Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

Por tanto, $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$.

Autoevaluación 5
Escriba $\frac{2}{3}$ como una fracción equivalente con un denominador de 24.

Respuesta $\frac{16}{24}$

EJEMPLO 5 Escriba $\frac{5}{7}$ como una fracción equivalente con un denominador de 28.

Solución Necesitamos multiplicar el denominador por 4 para obtener 28. Por la propiedad fundamental de las fracciones, también debemos multiplicar el numerador por 4.

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot \mathbf{4}}{7 \cdot \mathbf{4}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por 4.

$$= \frac{20}{28}$$

Se realiza la multiplicación en el numerador y el denominador.

Autoevaluación 6
Escriba 5 como una fracción con un denominador de 3.

Respuesta $\frac{15}{3}$

EJEMPLO 6 Escriba -4 como una fracción cuyo denominador es 6.

Solución Primero se expresa -4 como una fracción: $-4 = -\frac{4}{1}$. Para obtener un denominador de 6, necesitamos multiplicar el numerador y el denominador por 6.

$$-\frac{4}{1} = -\frac{4 \cdot \mathbf{6}}{1 \cdot \mathbf{6}}$$

$$= -\frac{24}{6}$$

Se realiza la multiplicación: $4 \cdot 6 = 24$ y $1 \cdot 6 = 6$.

Sección 3.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. En la fracción $\frac{7}{8}$, 7 es el _____ y 8 es el _____.
2. Cuando expresamos 15 como $5 \cdot 3$, decimos que hemos _____ el número 15.
3. Una fracción _____ es menor que 1. Una fracción _____ es mayor a o igual a 1.
4. Se dice que fracción esta en términos _____ si el único factor común para el numerador y el denominador es 1.

5. Dos fracciones son _____ si tienen el mismo valor.

6. Una _____ puede utilizarse para indicar el número de partes iguales de un entero.

7. Al hecho de multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un número, para obtener una fracción equivalente que incluya números mayores, se llama expresar la fracción en términos _____ o _____ la fracción.

8. Podemos _____ una fracción que no está en términos mínimos al aplicar la propiedad fundamental de las fracciones. Nosotros _____ los factores comunes del numerador y del denominador.

CONCEPTOS

9. ¿Qué factor común (distinto de 1) tienen el numerador y el denominador?

a. $\frac{2}{16}$ **b.** $\frac{6}{9}$ **c.** $\frac{10}{15}$ **d.** $\frac{14}{35}$

10. Se tiene: $\frac{15}{35} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}$.

En este trabajo, ¿qué significan las líneas diagonales y los números 1?

11. ¿Qué concepto estudiado en esta sección se representa abajo?

12. ¿Por qué no se puede decir que $\frac{2}{5}$ de la figura está sombreada?

13. **a.** Explique la diferencia entre los dos procedimientos que se utilizaron para simplificar $\frac{20}{28}$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 7} \quad \text{y} \quad \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 7}$$

b. ¿Son iguales los resultados?

14. ¿Qué concepto estudiado en esta sección ilustra la siguiente ecuación?

$$\frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

15. ¿Por qué motivo la igualdad siguiente no es una aplicación válida de la propiedad fundamental de las fracciones?

$$\frac{10}{11} = \frac{2+8}{2+9} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}+8}{\underset{1}{\cancel{2}}+9} = \frac{9}{10}$$

16. Escriba la fracción $\frac{7}{-8}$ en dos formas diferentes.

17. Escriba cada número como una fracción.

a. 8 **b.** -25

18. Llene los espacios con los números faltantes en la siguiente igualdad.

$$\frac{\square \cdot 5}{\square \cdot 9} = \frac{15}{27}$$

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

19. Simplifique: $\frac{18}{24}$.

$$\frac{18}{24} = \frac{2 \cdot \square \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot \square \cdot 3}$$
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\square}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{\square}}}{\underset{1}{\cancel{\square}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{\square}}}$$
$$= \frac{3}{4}$$

20. Simplifique: $\frac{60}{90}$.

$$\frac{60}{90} = \frac{2 \cdot \square}{3 \cdot \square}$$
$$= \frac{\square \cdot \overset{1}{\cancel{30}}}{\square \cdot \underset{1}{\cancel{30}}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

PRÁCTICA *Simplifique cada fracción hasta sus términos inferiores, de ser posible.*

21. $\frac{3}{9}$ **22.** $\frac{5}{20}$

23. $\frac{7}{21}$ **24.** $\frac{6}{30}$

25. $\frac{20}{30}$ **26.** $\frac{12}{30}$

27. $\frac{15}{6}$ **28.** $\frac{24}{16}$

29. $-\frac{28}{56}$ **30.** $-\frac{45}{54}$

31. $-\frac{90}{105}$ **32.** $-\frac{26}{78}$

33. $\frac{60}{108}$ **34.** $\frac{75}{125}$

35. $\frac{180}{210}$ **36.** $\frac{76}{28}$

37. $\frac{55}{67}$ **38.** $\frac{41}{51}$

39. $\frac{36}{96}$ **40.** $\frac{48}{120}$

41. $\frac{25}{35}$ **42.** $\frac{16}{20}$

43. $\frac{12}{15}$ **44.** $\frac{10}{15}$

45. $\frac{16}{17}$ **46.** $\frac{14}{25}$

47. $\frac{77}{88}$ **48.** $\frac{10}{210}$

49. $-\frac{10}{30}$ **50.** $-\frac{14}{28}$

51. $\frac{150}{250}$ **52.** $\frac{160}{240}$

53. $\frac{3500}{2800}$ **54.** $\frac{3500}{2500}$

55. $\frac{56}{28}$ **56.** $\frac{32}{8}$

Escriba cada fracción como una fracción equivalente con el denominador indicado.

57. $\frac{7}{8}$, denominador 40 **58.** $\frac{3}{4}$, denominador 24

59. $\frac{4}{5}$, denominador 35 **60.** $\frac{5}{7}$, denominador 49

61. $\frac{5}{6}$, denominador 54 **62.** $\frac{11}{16}$, denominador 32

63. $\frac{1}{2}$, denominador 30 **64.** $\frac{1}{3}$, denominador 60

65. $\frac{2}{7}$, denominador 14 **66.** $\frac{3}{10}$, denominador 50

67. $\frac{9}{10}$, denominador 60 **68.** $\frac{2}{3}$, denominador 27

69. $-\frac{5}{4}$, denominador 20 **70.** $-\frac{9}{4}$, denominador 44

71. $-\frac{2}{15}$, denominador 45 **72.** $-\frac{5}{12}$, denominador 36

Escriba cada número como una fracción con el denominador indicado.

73. 3 como quintos **74.** 4 como tercios

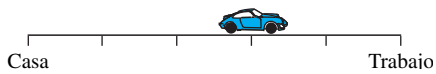
75. 6 como octavos **76.** 3 como sextos

77. 4 como novenos **78.** 7 como cuartos

79. -2 como mitades **80.** -10 como novenos

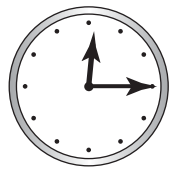
APLICACIONES *Aplique el concepto de fracción para responder cada pregunta.*

81. VIAJE AL TRABAJO ¿Qué parte del trayecto ha viajado el automovilista de su casa al trabajo?



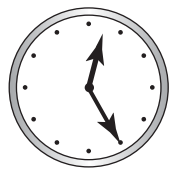
82. RELOJES Para cada reloj, ¿qué parte de la hora ha pasado?

a.



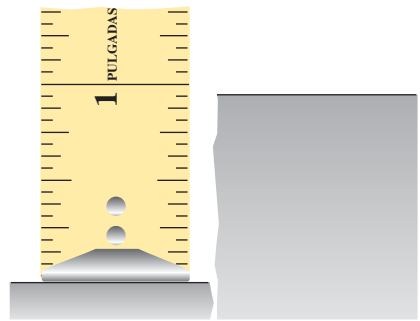
b.

c.



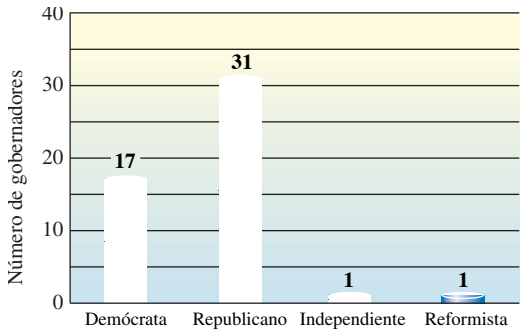
d.

83. REGISTRO En la ilustración se demuestra la vista lateral de una depresión en la acera cerca de un registro subterráneo. Describa el desplazamiento de la acera utilizando un número con signo. (En la cinta métrica, una pulgada está dividida en 16 partes iguales).



84. PARTIDOS POLÍTICOS La ilustración de la página siguiente muestra la afiliación de los gobernadores de 50 estados a varios partidos políticos, datos actualizados al primero de enero de 2000.

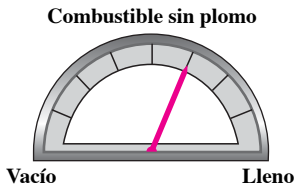
a. ¿Qué fracción eran demócratas?
b. ¿Qué fracción eran de republicanos?
c. ¿Qué fracción no eran ni demócratas ni republicanos?



85. REGISTROS DEL PERSONAL Complete la tabla al encontrar la fracción del trabajo que realizará cada persona que trabaja sola, de acuerdo a la cantidad de horas que se indican.

Nombre	Tiempo total para realizar el trabajo individual	Tiempo de trabajo individual	Cantidad de trabajo terminado
Bob	10 horas	7 horas	
Ali	8 horas	1 hora	

86. TANQUES DE GASOLINA ¿Qué nivel de llenado indica el medidor del tanque de gasolina? ¿Qué parte de la gasolina del tanque se ha utilizado?

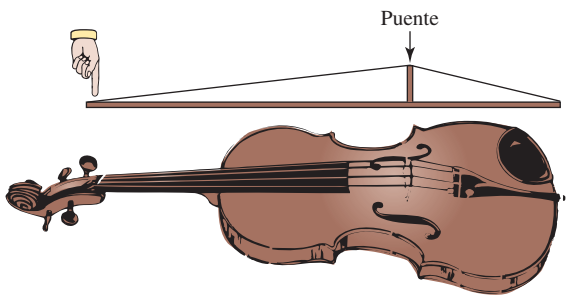


87. MÚSICA La ilustración demuestra una vista lateral de la posición del dedo para producir una longitud de la cuerda (medida desde el puente hasta la yema del dedo) que proporcione la nota C bajo en el violín. Para tocar otras notas, ¿qué fracciones de longitud se utilizan? Localice esas posiciones del dedo en la ilustración.

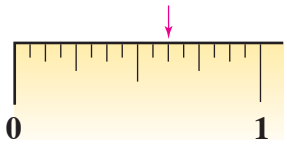
a. $\frac{1}{2}$ de la longitud da una nota media de C.

b. $\frac{3}{4}$ de la longitud da una F sobre una C baja.

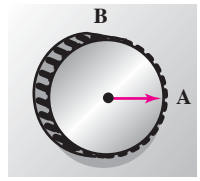
c. $\frac{2}{3}$ de la longitud da la nota G.



88. REGLAS La ilustración muestra una regla. Indique primero cuántos espacios hay entre los números 0 y 1. Después mencione qué número señala la flecha.



89. MAQUINARIA El operador de una máquina debe dar vuelta a la perilla para girarla desde la posición A hasta la posición B. Exprese lo anterior en dos formas diferentes, utilizando fracciones de una revolución completa.



90. ROTACIÓN DE LA TIERRA La Tierra gira alrededor de su eje vertical una vez cada 24 horas.

a. ¿Cuál es el significado de $\frac{1}{24}$ de la rotación de la Tierra para nosotros?

b. ¿Qué significado tiene $\frac{24}{24}$ de una revolución?

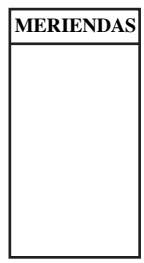
91. EXHIBIDOR DE SUPERMERCADO En el caso de la exhibición de meriendas en el supermercado, la cantidad de espacio disponible para cada una de ellas se expresa como una fracción. Termine el modelo del exhibidor, mostrando en dónde se deben localizar los estantes ajustables y marque dónde debería almacenarse cada una de las meriendas.

$\frac{3}{8}$: papas fritas

$\frac{2}{8}$: cacahuates

$\frac{1}{8}$: pretzels

$\frac{2}{8}$: doritos



92. CENTROS MÉDICOS Los diseñadores del hospital han colocado la estación de enfermeras en el centro de un edificio circular. Indique cómo dividir el espacio circundante de modo que cada departamento médico tenga asignada una cantidad fraccionaria independiente. (Utilice el gráfico del círculo). Identifique cada uno de los departamentos.

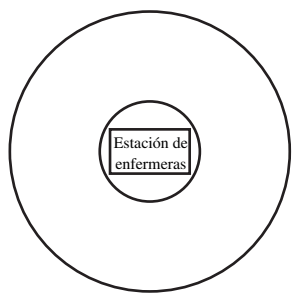
$\frac{2}{12}$: Radiología

$\frac{5}{12}$: Pediatría

$\frac{1}{12}$: Laboratorio

$\frac{3}{12}$: Ortopedia

$\frac{1}{12}$: Farmacia



93. CÁMARAS FOTOGRÁFICAS Cuando el obturador de una cámara fotográfica permanece abierto por más de $\frac{1}{125}$ segundo, probablemente cualquier movimiento de la cámara fotográfica velará la fotografía. Considerando lo anterior, si un fotógrafo está tomando una fotografía de un objeto que se mueve con rapidez, ¿deberá seleccionar una velocidad del obturador de $\frac{1}{60}$ o $\frac{1}{250}$?

94. El PIB El Producto Interno Bruto (Gross Domestic Product, GDS, por sus siglas en inglés) es la medida oficial de la economía de Estados Unidos. Representa el valor del mercado de todos los bienes y servicios que se han adquirido durante un período determinado. El PIB para el segundo trimestre del 2004 se muestra a continuación. ¿Cuál es el significado de la frase *segundo trimestre* del 2004?

Segundo trimestre del 2004	$11 657 500 000 000

POR ESCRITO

95. Explique el concepto de fracciones equivalentes.

96. ¿Qué significa que una fracción esté en los términos mínimos?

97. Explique la diferencia entre tres-cuartos y tres-quintos de una pizza.

98. Explique las dos partes de la propiedad fundamental de las fracciones.

REPASO

99. Evalúe: $3 + 4 \cdot 2$.

100. Multiplique: $(-3)(-4)$.

101. Redondee 564,112 al millar más cercano.

102. Indique la definición de número primo.

103. Sume: $2 + (-3) + (-5)$.

104. Evalúe la potencia de: $(-10)^2$.

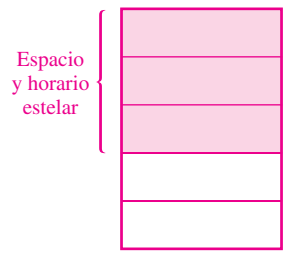
3.2 Multiplicación de fracciones

- Multiplicación de fracciones
- Simplificación cuando se multiplican fracciones
- Potencias de una fracción
- Aplicaciones

En las tres secciones siguientes, veremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Comenzamos con la operación de multiplicación.

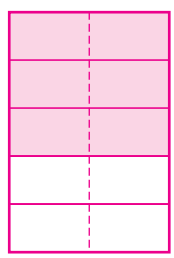
Multiplicación de fracciones

Supongamos que una televisora va a contratar una página entera (en un diario) para anunciar su programación de otoño. Los programas que se transmiten en el horario estelar tendrán $\frac{3}{5}$ del espacio y la programación del día el resto. Del espacio dedicado a la programación estelar, la $\frac{1}{2}$ se utilizará para promover los programas que se transmiten el fin de semana. ¿Qué espacio de la página del periódico se utilizará para anunciar los programas de horario estelar que se transmiten el fin de semana?



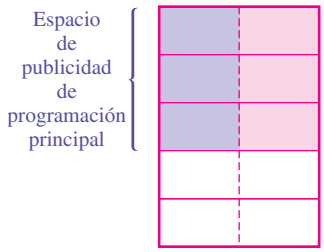
El anuncio para la programación estelar que se transmite los fines de semana ocupará la $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ de la página. Esto se puede expresar como $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$. Este producto de fracciones $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ se puede resolver en tres pasos.

Paso 1: Dividimos la página en quintas partes y sombreamos tres $\frac{3}{5}$, que es la porción de la página que se utiliza para anunciar programas que se transmiten en horario estelar.



Paso 2: Después, calculamos la $\frac{1}{2}$ de la parte sombreada de la página, para esto se divide en mitades, utilizando una línea vertical.

Paso 3: Finalmente, destacamos (en color púrpura) la $\frac{1}{2}$ de las partes sombreadas que se determinaron en el paso 2. Las secciones destacadas son 3 de 10, o $\frac{3}{10}$ en la página, que representan la cantidad de la página utilizada para anunciar la programación que se transmite en horario estelar los fines de semana. Esto nos lleva a la conclusión que $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.



Del resultado anterior se obtienen dos observaciones:

- El numerador de la respuesta es el producto de los numeradores de las fracciones originales.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$1 \cdot 3 = 3$ (numeradores) — Respuesta

$2 \cdot 5 = 10$ (denominadores)

- El denominador de la respuesta es el producto de los denominadores de las fracciones originales.

Estas observaciones sugieren la siguiente regla para la multiplicación de dos fracciones.

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos fracciones, primero se multiplican los numeradores y después se multiplican los denominadores. Luego, si es posible, se simplifica el resultado.

EJEMPLO 1

Multiplique: $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}$.

Solución

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 5}$$ Se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$= \frac{21}{40}$$ Se realizan las multiplicaciones: $7 \cdot 3 = 21$ and $8 \cdot 5 = 40$.

Autoevaluación 1

Multiplique: $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3}$

Respuesta $\frac{10}{27}$

Las reglas que rigen la multiplicación de enteros también se aplican en la multiplicación de fracciones. Cuando multiplicamos dos fracciones con signos *iguales*, el producto es positivo. Cuando multiplicamos dos fracciones con signos *diferentes*, el producto es negativo.

EJEMPLO 2

Multiplique: $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)$.

Solución

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 8}$$ Se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores. Como las fracciones tienen signos diferentes el producto es negativo.

$$= -\frac{3}{32}$$ Se realizan las multiplicaciones siguientes: $3 \cdot 1 = 3$ y $4 \cdot 8 = 32$.

Autoevaluación 2

Multiplique: $\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)$

Respuesta $-\frac{5}{18}$

Simplificación cuando se multiplican fracciones

Después de multiplicar dos fracciones, el resultado se debe simplificar, siempre que sea posible.

Autoevaluación 3

Multiplique: $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{6}$

Respuesta $\frac{1}{5}$

EJEMPLO 3 Multiplique: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}$.

Solución

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 5}$$ Se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$= \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 2 \cdot 5}$$ En el denominador, 8 se factoriza como $4 \cdot 2$ de manera que podamos simplificar la fracción.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$ Se dividen (cancelan) los factores comunes de 4 y 5.

$$= \frac{1}{2}$$ Se realizan las multiplicaciones: $1 \cdot 1 = 1$ y $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$.

EJEMPLO 4 Multiplique: $45\left(-\frac{1}{14}\right)\left(-\frac{7}{10}\right)$.

Solución Esta expresión incluye tres factores y uno de ellos es un entero. Cuando multiplicamos fracciones y enteros, expresamos cada entero como una fracción con un denominador de 1.

Cabe recordar que, de acuerdo con la sección 2.4, un producto es positivo cuando existe una cantidad par de factores negativos. Como $45(-\frac{1}{14})(-\frac{7}{10})$ tienen *dos* factores negativos, el producto es positivo.

$$45\left(-\frac{1}{14}\right)\left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{45}{1}\left(\frac{1}{14}\right)\left(\frac{7}{10}\right)$$ Se escribe 45 como una fracción: $45 = \frac{45}{1}$. Como el producto tiene un número par de factores negativos, la respuesta es positiva. Se pueden suprimir los dos signos –, y continuar.

$$= \frac{\mathbf{45} \cdot 1 \cdot 7}{1 \cdot \mathbf{14} \cdot \mathbf{10}}$$ Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{\mathbf{5 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 1 \cdot 7}{1 \cdot \mathbf{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2}}$$ Se factoriza 45 como $5 \cdot 3 \cdot 3$, se factoriza 14 como $7 \cdot 2$, y 10 como $5 \cdot 2$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{7}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2}$$ Se dividen (cancelan) los factores comunes de 5 y 7.

$$= \frac{9}{4}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador.

Potencias de una fracción

Si la base de una expresión exponencial es una fracción, el exponente indica cuántas veces se escribe esa fracción como factor. Por ejemplo,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$ $\frac{2}{3}$ Se utiliza como factor 2 veces.

EJEMPLO 5 Encuentre cada potencia: **a.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ y **b.** $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Solución Los exponentes se utilizan para indicar la multiplicación repetida.

a. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$ Se escribe $-\frac{2}{3}$ como un factor 2 veces.

$= \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}$ El producto de dos fracciones con signos iguales es positivo. Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$= \frac{4}{9}$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador.

b. $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ Se escribe $\frac{2}{3}$ como factor 2 veces.

$= -\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}$ Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$= -\frac{4}{9}$

Autoevaluación 5

Encuentre cada potencia:

a. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ y **b.** $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

Respuestas **a.** $-\frac{27}{64}$, **b.** $-\frac{9}{16}$

Aplicaciones

EJEMPLO 6 **Cámara de representantes.** En la cámara de representantes de Estados Unidos se presentó una iniciativa de ley que requería $\frac{3}{5}$ del voto de los 435 miembros para autorizar cualquier aumento de impuestos. Con este requisito, ¿cuántos representantes tienen que votar para aumentar el impuesto antes que la iniciativa se convierta en ley?

Solución Para resolver este problema, debemos hallar $\frac{3}{5}$ de 435.

$\frac{3}{5}$ de $435 = \frac{3}{5} \cdot \frac{435}{1}$ Aquí la palabra de significa multiplicar. Se escribe 435 como una fracción: $435 = \frac{435}{1}$.

$= \frac{3 \cdot 435}{5 \cdot 1}$ Se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29}{5 \cdot 1}$ Se obtiene el factor primo de 435 como $3 \cdot 5 \cdot 29$.

$= \frac{3 \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 29}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 1}$ Se divide el factor común entre 5.

$= \frac{261}{1}$ Se multiplica en el numerador: $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 29 = 261$.
Se multiplica en el denominador: $1 \cdot 1 = 1$.

$= 261$ Se simplifica: $\frac{261}{1} = 261$.

Se necesitan 261 votos a favor de los representantes para que se acepte la iniciativa de ley de aumento a los impuestos.

Como muestra la figura 3.3, un triángulo tiene tres lados. La longitud de la base del triángulo se representa con la letra b y la altura se representa con la letra h. La altura de un triángulo siempre es perpendicular (forma una esquina cuadrada) respecto de la base. Esto se indica con el símbolo ⌝.

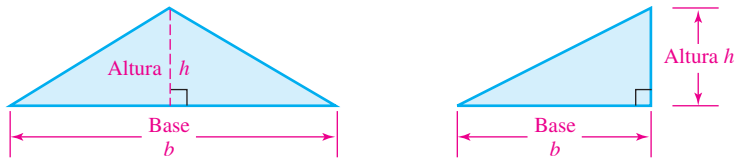


FIGURA 3.3

Recuerde que el área de una figura es la cantidad de superficie que esta encierra. El área de un triángulo se puede encontrar mediante la siguiente fórmula.

Área de un triángulo

El área A de un triángulo es la mitad del producto de su base b y su altura h.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

La fórmula $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ puede escribirse de una forma más simple como $A = \frac{1}{2}bh$.

La fórmula para el área de un triángulo se puede escribir también como $A = \frac{bh}{2}$.

EJEMPLO 7 **Geografía.** Calcule el área aproximada del estado de Virginia utilizando el triángulo de la figura 3.4.

Solución Podemos calcular el área aproximada del estado si determinamos primero el área del triángulo.

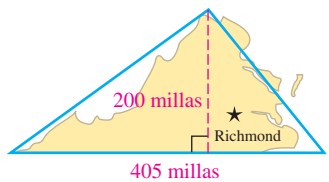


FIGURA 3.4

$$A = \frac{1}{2}bh$$ Esta es la fórmula para calcular el área del triángulo.

$$= \frac{1}{2} \cdot 405 \cdot 200$$ $\frac{1}{2}bh$ significa $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$. Se substituye b por 405 y h por 200.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{405}{1} \cdot \frac{200}{1}$$ Se escriben 405 y 200 como fracciones.

$$= \frac{1 \cdot 405 \cdot 200}{2}$$ Se multiplican los numeradores. Se multiplican los denominadores.

$$= \frac{1 \cdot 405 \cdot 100 \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$ Se factoriza 200 como $100 \cdot 2$. Después se divide el factor común de 2.

$$= 40\,500$$ $405 \cdot 100 = 40\,500$.

El área del estado de virginia es aproximadamente de 40 500 millas cuadradas.

Sección 3.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco*

1. La palabra *de* en matemáticas generalmente significa _____.
2. El _____ de un triángulo es la cantidad de superficie que éste encierra.
3. El resultado de un problema de multiplicación se llama _____.
4. _____ una fracción significa dividir los factores comunes del numerador y del denominador.
5. Cuando se trabaja con triángulos, la letra b representa la longitud de la _____ y la h denota la _____.
6. El _____ para el área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$.

CONCEPTOS

7. Encuentre el resultado cuando se multiplica $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$.
8. Escriba los números siguientes como fracciones.
   a. 4 **b.** -3
9. Utilice el siguiente rectángulo para encontrar $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

   a. Utilice líneas verticales, divida el rectángulo en cuatro partes iguales y sombree ligeramente una de ellas. ¿Qué parte fraccionaria del rectángulo se sombreó?
   b. Para encontrar $\frac{1}{3}$ de la porción sombreada, utilice dos líneas horizontales para dividir el rectángulo en tres partes iguales y sombree con colores ligeramente una de ellas. ¿En cuántas partes iguales está dividido el rectángulo? ¿Cuántas partes se sombrearon dos veces? ¿Qué es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$?
10. En la solución siguiente, ¿qué error inicial cometió el alumno que provocó que se trabajara con números tan grandes?

$$\frac{44}{63} \cdot \frac{27}{55} = \frac{44 \cdot 27}{63 \cdot 55} = \frac{1188}{3465}$$

11. **a.** ¿El producto de dos números con signos diferentes es positivo o negativo?
    b. ¿El producto de dos números con signos iguales, es positivo o negativo?
12. **a.** Multiplique $\frac{9}{10}$ y 20.
    b. Cuando se multiplican dos números, ¿el producto siempre es mayor que ambos números?
13. Determine si cada ecuación es verdadera o falsa.
    a. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
    b. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
14. ¿Cuál es el numerador del resultado para el problema de multiplicación mostrado a continuación?

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{3}}{5 \cdot \underset{1}{3} \cdot \underset{1}{4}}$$

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

15. Multiplique: $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$.

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15} = \frac{5 \cdot \square}{8 \cdot \square} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 5 \cdot \square} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{8 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \square} = \frac{7}{24}$$

16. Multiplique: $\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21}$.

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{4}{21} = \frac{7 \cdot 4}{\square \cdot \square} = \frac{7 \cdot 4}{4 \cdot \square \cdot \square \cdot 3} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{7} \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

PRÁCTICA *Multiplique y escriba las respuestas en sus términos mínimos.*

17. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$
18. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$
19. $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{16}$
20. $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{7}$
21. $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7}$
22. $\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4}$
23. $\frac{14}{15} \cdot \frac{11}{8}$
24. $\frac{5}{16} \cdot \frac{8}{3}$

25. $-\frac{15}{24}\cdot\frac{8}{25}$

26. $-\frac{20}{21}\cdot\frac{7}{16}$

27. $\left(-\frac{11}{21}\right)\left(-\frac{14}{33}\right)$

28. $\left(-\frac{16}{35}\right)\left(-\frac{25}{48}\right)$

29. $\frac{7}{10}\left(\frac{20}{21}\right)$

30. $\left(\frac{7}{6}\right)\frac{9}{49}$

31. $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$

32. $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}$

33. $\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{4}{25}$

34. $\frac{3}{15}\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{14}{27}$

35. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

36. $\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{12}{27}\right)$

37. $\frac{5}{6}\cdot 18$

38. $6\left(-\frac{2}{3}\right)$

39. $15\left(-\frac{4}{5}\right)$

40. $-2\left(-\frac{7}{8}\right)$

41. $\frac{3}{16}\cdot 4\cdot\frac{2}{3}$

42. $5\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{14}$

43. $\frac{5}{3}\left(-\frac{6}{15}\right)(-4)$

44. $\frac{5}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)(-12)$

45. $-\frac{2}{3}\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{20}{3}\right)$

46. $-\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{12}{5}\right)$

47. $-\frac{11}{12}\cdot\frac{18}{55}\cdot 5$

48. $-\frac{24}{5}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{14}$

49. $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)$

50. $-\frac{5}{4}\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$

Encuentre cada potencia.

51. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

52. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

53. $\left(-\frac{5}{9}\right)^2$

54. $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$

55. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$

56. $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

57. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

58. $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

59. Complete la tabla de multiplicación de fracciones.

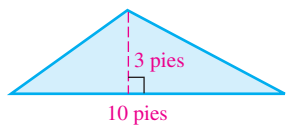
·	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$					
$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{5}$					
$\frac{1}{6}$					

60. Termine la tabla, para esto determine la fracción original a partir de su cuadrado.

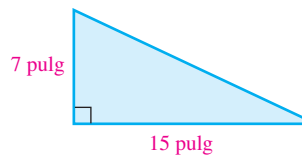
Fracción original al cuadrado	Fracción original
$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{100}$	
$\frac{4}{25}$	
$\frac{16}{49}$	
$\frac{81}{36}$	
$\frac{9}{121}$	

Encuentre el área de cada triángulo.

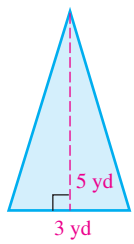
61.



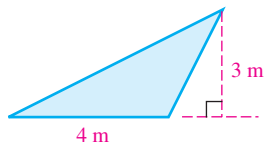
62.



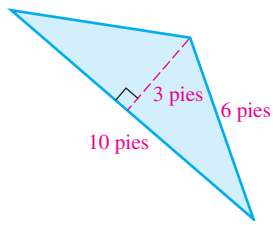
63.



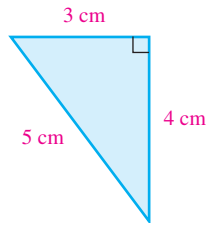
64.



65.



66.

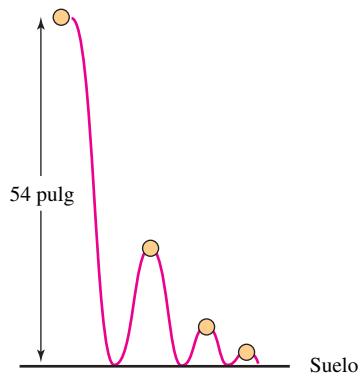


APLICACIONES

67. LA CONSTITUCIÓN El artículo V de la constitución de Estados Unidos requiere dos tercios de votos de La Cámara de Representantes para proponer una enmienda constitucional. La cámara tiene 435 miembros. Encuentre el número de votos necesarios para cumplir con este requisito.

68. GENÉTICA Gregor Mendel (1822-1884), monje Agustino a quien se le atribuye el desarrollo de un modelo de herencia que se convirtió en el fundamento de la genética moderna. En sus experimentos, cruzó plantas de flores púrpuras con plantas de flores blancas y encontró que $\frac{3}{4}$ de las plantas descendientes tenían flores púrpuras y $\frac{1}{4}$ tenían flores blancas. Según este concepto, cuando el grupo descendiente de la planta florezca, ¿cuántas plantas tendrán flores púrpuras?

69. PELOTAS DE TENIS Una pelota de tenis fue arrojada de una altura de 54 pulgadas. Cada vez que golpea el suelo, rebota un tercio de la altura anterior. Encuentre las tres alturas que faltan del rebote.



70. ELECCIONES la ilustración muestra el resultado de la elección final para una medida de bonos de la ciudad.

a. ¿Cuántos votos fueron se contabilizaron?

b. Calcule dos tercios del número de votos contados.

c. ¿La medida de bonos prosperó?

Medida 1

100% de los reportes del recinto
Bonos obligatorios generales para Bomberos Policías paramédicos (Requiere dos tercios de los votos)

Sí 125 599 No 62 801

71. COCINA Utilice la receta de abajo y aplique el concepto de la multiplicación con las fracciones para determinar cuántas tazas de azúcar y melaza se necesitan para hacer una docena de galletas de pan de jengibre.

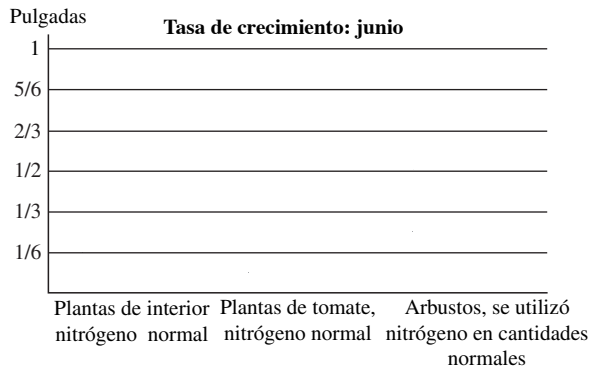
Galletas de jengibre

$\frac{3}{4}$ de taza de azúcar	$\frac{1}{2}$ taza de agua
2 tazas de harina	$\frac{2}{3}$ de taza de mantequilla
$\frac{1}{8}$ de cucharita de especias	$\frac{1}{4}$ de cucharadita de sal
$\frac{1}{3}$ de melaza oscura	$\frac{3}{4}$ de taza de ginger

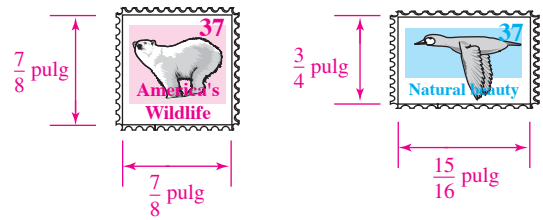
Alcanza para preparar dos docenas de galletas de jengibre.

72. SUPERFICIE DE LA TIERRA La superficie de la Tierra cubre una área aproximada de 196 800 000 de millas cuadradas. Cerca de $\frac{3}{4}$ de esa área está cubierta por agua. Encuentre el número de millas cuadradas de la superficie cubierta por agua.

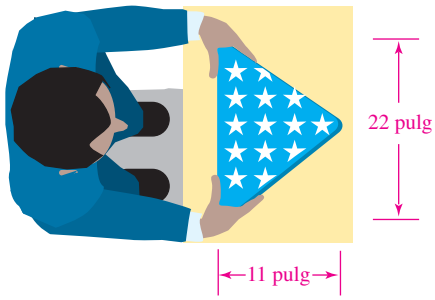
73. BOTÁNICA En un experimento, la tasa de crecimiento mensual de tres tipos de plantas aumentó al doble cuando se le agregó nitrógeno a la tierra. Complete la ilustración escribiendo la tasa de aumento de crecimiento mejorado al lado de cada tasa de crecimiento normal.



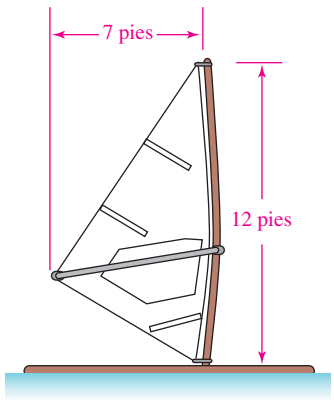
74. ESTAMPILLAS DE CORREO A continuación se muestran los mejores diseños de una competencia para crear estampillas de correo con motivos de la vida silvestre. Para ahorrar los costos de papel, el servicio postal ha decidido elegir la estampilla que tiene la menor área. ¿Cuál estampilla eligió el servicio postal?



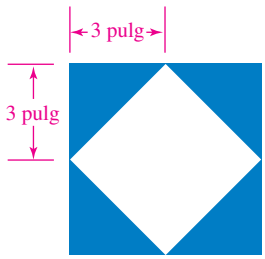
75. ESTRELLAS Y RAYAS La ilustración muestra cómo se dobla la bandera de Estados Unidos. Cuando se coloca en una mesa como parte de una exhibición, ¿qué área ocupará?



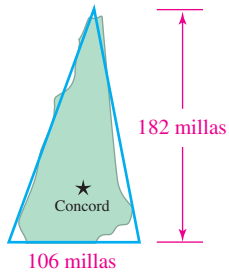
76. VELERO Calcule el área de la vela del velero.



77. DISEÑO CON AZULEJOS Se muestra un diseño de mosaico para el cuarto de baño. Encuentre la cantidad de área de un azulejo que sea azul.



78. GEOGRAFÍA Calcule el área del estado de New Hampshire, utilizando el triángulo de la ilustración.



POR ESCRITO

79. En matemáticas, la palabra *de* significa generalmente multiplicación. Indique tres ejemplos de la vida real de este hecho.

80. Explique cómo podría multiplicar el número 5 y otro número y obtener una respuesta que sea menor de 5.

81. UNA MAYORÍA La definición de la palabra *mayoría* es la siguiente: "un número mayor a la mitad del total." Explique lo que significa cuando un profesor dice, "La mayoría de la clase votó para posponer el examen hasta el lunes". Brinde un ejemplo.

82. ¿Qué indica el área?

REPASO

83. Redondee 6 794 al ciento más cercano.

84. Encuentre la distancia que cubre un automovilista que viaja 60 millas por hora por 3 horas.

85. Evalúe: $5 + 7 \cdot 3$.

86. Multiplique:
$$\begin{array}{r} 324 \\ \times\ 45 \end{array}$$

87. Encuentre la factorización prima de 125.

88. Evalúe: $-2(-3)(-4)$.

3.3 División de fracciones

• División de fracciones • Recíprocos • Regla para dividir fracciones

En esta sección veremos cómo dividir las fracciones. Examinaremos varios problemas relacionados con fracciones tanto positivas como negativas. Las habilidades que se aprendieron en la sección 3.2 serán de utilidad para esta sección.

División de fracciones

Supongamos que el encargado de una tienda de caramelos compra barras grandes de chocolate para venderlas, para esto divide cada una en cuatro partes iguales, ¿cuántos cuartos de barra se pueden obtener a partir de 5 barras?

Estamos preguntando, ¿cuántos $\frac{1}{4}$'hay en 5? Para responder esta pregunta, necesitamos utilizar la operación de división. Podemos representar esta división como $5 \div \frac{1}{4}$. Véase a la figura 3.5.

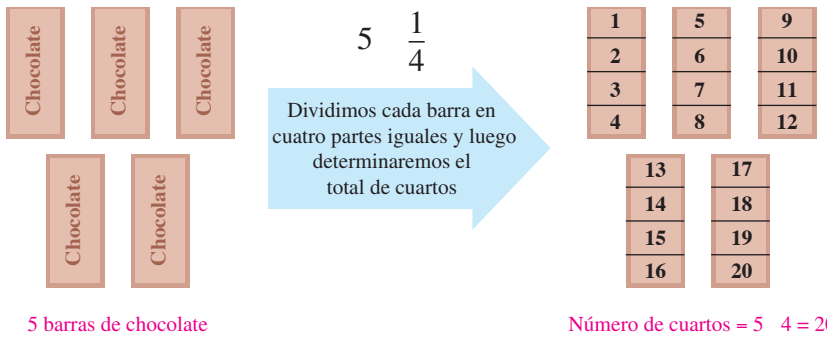


FIGURA 3.5

En 5 barras de chocolate hay 20 cuartos, este resultado nos lleva a las siguientes observaciones.

- En este problema de división interviene una fracción: $5 \div \frac{1}{4}$.
- Aunque se nos pidió encontrar $5 \div \frac{1}{4}$, resolvemos el problema utilizando la *multiplicación* en vez de la *división*: $5 \cdot 4 = 20$.

Más adelante en esta sección, veremos que estas observaciones sugieren una regla para dividir fracciones. Pero antes de considerar esa regla, necesitamos introducir un nuevo término.

Recíprocos

La división con fracciones implica el trabajo con **recíprocos**. Para presentar el concepto de recíprocos, consideremos el problema $\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7}$.

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 7}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$$ Se divide el factor común de 7 y 8.

$$= \frac{1}{1}$$ Se efectúan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador.

$$= 1$$ $\frac{1}{1} = 1$.

El producto de $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{7}$ es 1.

Siempre que el producto de dos números sea 1, decimos que esos números son *recíprocos*. En consecuencia, $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{7}$ son recíprocos. Para determinar los recíprocos de una fracción, *invertimos el numerador y el denominador*.

Recíprocos

Dos números se conocen como **recíprocos** cuando su producto es 1.

COMENTARIO El cero no tiene recíproco, ya que el producto de 0 y un número nunca puede ser 1.

Autoevaluación 1
Encuentre el recíproco de cada número y demuestre que su producto es 1.

a. $\frac{3}{5}$

b. $-\frac{5}{6}$

c. 8

Respuestas **a.** $\frac{5}{3}$, **b.** $-\frac{6}{5}$, **c.** $\frac{1}{8}$

EJEMPLO 1 Encuentre el recíproco para cada número y muestre que su producto es 1: **a.** $\frac{2}{3}$, **b.** $-\frac{3}{4}$, y **c.** 5.

Solución

a. El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}}=1$$

b. El recíproco de $-\frac{3}{4}$ es $-\frac{4}{3}$.

$$-\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}}=1$$

El producto de dos fracciones con signos iguales es positivo.

c. $5=\frac{5}{1}$, así que el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$.

$$5\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot 1}{1\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=1$$

Regla para dividir fracciones

En el ejemplo de la tienda de dulces, vimos que podemos encontrar $5\div\frac{1}{4}$ al calcular $5\cdot 4$. Esto es, dividir entre $\frac{1}{4}$ (una fracción) es lo mismo que multiplicar por 4 (su recíproco).

$$5\div\frac{1}{4}=5\cdot 4$$

Esta observación sugiere una regla general para dividir fracciones.

División de fracciones

Para dividir fracciones, se multiplica la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción.

Por ejemplo, para determinar $\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}$, multiplicamos $\frac{5}{7}$ por el recíproco de $\frac{3}{4}$.

Se cambia la división por multiplicación.

$$\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}$$

El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

$$=\frac{5\cdot 4}{7\cdot 3}$$

Se multiplican los numeradores.
Se multiplican los denominadores

$$=\frac{20}{21}$$

Se realizan la multiplicaciones en el numerador y el denominador: $5\cdot 4=20$ y $7\cdot 3=21$.

Por tanto, $\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{20}{21}$.

EJEMPLO 2 Divida: $\frac{1}{3} \div \frac{4}{5}$.

Solución

$$\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}$$ Multiplique $\frac{1}{3}$ por el recíproco de $\frac{4}{5}$, que es $\frac{5}{4}$.

$$= \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 4}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{5}{12}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

Respuesta $\frac{16}{21}$

Autoevaluación 2

Divida: $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8}$

EJEMPLO 3 Divida: $\frac{9}{16} \div \frac{3}{20}$.

Solución

$$\frac{9}{16} \div \frac{3}{20} = \frac{9}{16} \cdot \frac{20}{3}$$ Multiplique $\frac{9}{16}$ por el recíproco de $\frac{3}{20}$, que es $\frac{20}{3}$.

$$= \frac{9 \cdot 20}{16 \cdot 3}$$ Realice las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 4 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Factorice 9 como 3 · 3, factorice 20 como 5 · 4, y factorice 16 como 4 · 4. Después divida los factores comunes de 3 y de 4.

$$= \frac{15}{4}$$ Realice las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

Respuesta $\frac{5}{2}$

Autoevaluación 3

Divida: $\frac{4}{5} \div \frac{8}{25}$

EJEMPLO 4 Diseño de la tabla para practicar surfing.

La mayor parte de las tablas que se utilizan para surfear están fabricadas con espuma plástica recubierta con varias capas de fibra de vidrio, a fin de mantenerlas impermeables. ¿Cuántas capas se necesitan para obtener un acabado de tres octavos de pulgada de espesor si cada capa de fibra de vidrio tiene un grosor de un dieciseisavo de pulgada?

Solución Necesitamos saber cuantos dieciseisavos de pulgada hay en tres octavos de pulgada. Para responder a esta pregunta utilizamos la división y calculamos $\frac{3}{8} \div \frac{1}{16}$.

$$\frac{3}{8} \div \frac{1}{16} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{1}$$ Se multiplica $\frac{3}{8}$ por el recíproco de $\frac{1}{16}$, que es $\frac{16}{1}$.

$$= \frac{3 \cdot 16}{8 \cdot 1}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{8}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot 1}$$ Se factoriza 16 como 8 · 2. Después se divide el factor común de 8.

$$= \frac{6}{1}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= 6$$ Se simplifica: $\frac{6}{1} = 6$.

Se deben aplicar 6 capas de fibra de vidrio.

Autoevaluación 5

Divida: $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{7}{6}\right)$

Respuesta $-\frac{4}{7}$

EJEMPLO 5

Divida: $\frac{1}{6} \div \left(-\frac{1}{18}\right)$.

Solución Cuando trabajamos con divisiones que contienen fracciones negativas, utilizamos las mismas reglas que rigen la multiplicación de números con signos iguales o diferentes.

$$\frac{1}{6} \div \left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{18}{1}\right)$$ Se multiplica $\frac{1}{6}$ por el recíproco de $-\frac{1}{18}$, el cual es $-\frac{18}{1}$.

$$= -\frac{1 \cdot 18}{6 \cdot 1}$$ El producto de dos fracciones con signos distintos es negativo. Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= -\frac{1 \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot 1}$$ Se factoriza 18 como $6 \cdot 3$. Después se divide (cancela) el factor común de 6.

$$= -\frac{3}{1}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= -3$$

Autoevaluación 6

Divida: $-\frac{35}{16} \div (-7)$

Respuesta $\frac{5}{16}$

EJEMPLO 6

Divida: $-\frac{21}{36} \div (-3)$.

Solución

$$-\frac{21}{36} \div (-3) = -\frac{21}{36}\left(-\frac{1}{3}\right)$$ Se multiplica $-\frac{21}{36}$ por el recíproco de -3, que es $-\frac{1}{3}$.

$$= \frac{21 \cdot 1}{36 \cdot 3}$$ El producto de dos fracciones con signos iguales es positivo. Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{7 \cdot 3 \cdot 1}{36 \cdot 3}$$ Se factoriza 21 como $7 \cdot 3$.

$$= \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 1}{36 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Se divide (cancela) el factor común de 3.

$$= \frac{7}{36}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador.

Sección 3.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Dos números se llaman _____ si su producto es 1.
2. El resultado de un problema de división se llama _____.

CONCEPTOS

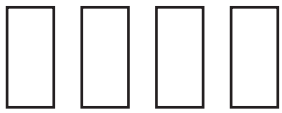
3. Complete la siguiente operación

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \square \cdot \square$$

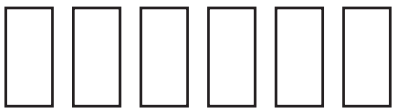
4. Encuentre el recíproco de cada número.

a. $\frac{2}{5}$ **b.** -3

5. Con la ayuda de líneas horizontales, divida cada rectángulo de la derecha en tercios. ¿Qué problema de división se ilustra?, ¿cuál es el cociente de ese problema?



6. Utilice líneas horizontales y divida cada rectángulo en quintos. ¿Qué problema de división se ilustra?, ¿cuál es el cociente de ese problema?



7. Multiplique $\frac{4}{5}$ y su reciproco, ¿cuál es el resultado?

8. Multiplique $-\frac{3}{5}$ y su recíproco, ¿cuál es el resultado?

9. a. Encuentre $15 \div 3$.

b. Escriba nuevamente $15 \div 3$ como multiplicación por el recíproco de 3 y encuentre el resultado.

c. Complete la siguiente expresión: dividir entre 3 es lo mismo que multiplicar por.

10. a. Encuentre $10 \div \frac{1}{5}$.

b. Complete esta expresión: dividir entre $\frac{1}{5}$ es lo mismo que multiplicar por $\square$.

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

11.
$$\frac{25}{36} \div \frac{10}{9} = \frac{25}{36} \cdot \frac{\square}{\square}$$
$$= \frac{25 \cdot \square}{36 \cdot \square}$$
$$= \frac{5 \cdot \square \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5}$$
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{9}} \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{\square}}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{\square}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{\square}}}$$
$$= \frac{5}{8}$$

12.
$$\frac{4}{9} \div \frac{8}{27} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\square}{\square}$$
$$= \frac{4 \cdot \square}{9 \cdot \square}$$
$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 9}{9 \cdot 4 \cdot 2}$$
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}} \cdot 2}$$
$$= \frac{3}{2}$$

PRÁCTICA *Encuentre cada cociente.*

13. $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$

14. $\frac{5}{7} \div \frac{5}{6}$

15. $\frac{3}{16} \div \frac{1}{9}$

16. $\frac{5}{8} \div \frac{2}{9}$

17. $\frac{4}{5} \div \frac{4}{5}$

18. $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$

19. $\left(-\frac{7}{4}\right) \div \left(-\frac{21}{8}\right)$

20. $\left(-\frac{15}{16}\right) \div \left(-\frac{5}{8}\right)$

21. $3 \div \frac{1}{12}$

22. $9 \div \frac{3}{4}$

23. $120 \div \frac{12}{5}$

24. $360 \div \frac{36}{5}$

25. $-\frac{4}{5} \div (-6)$

26. $-\frac{7}{8} \div (-14)$

27. $\frac{15}{16} \div 180$

28. $\frac{7}{8} \div 210$

29. $-\frac{9}{10} \div \frac{4}{15}$

30. $-\frac{3}{4} \div \frac{3}{2}$

31. $\frac{9}{10} \div \left(-\frac{3}{25}\right)$

32. $\frac{11}{16} \div \left(-\frac{9}{16}\right)$

33. $-\frac{1}{8} \div 8$

34. $-\frac{1}{15} \div 15$

35. $\frac{15}{32} \div \frac{15}{32}$

36. $-\frac{1}{64} \div \left(-\frac{1}{64}\right)$

37. $\frac{4}{5} \div \frac{3}{2}$

38. $\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}$

39. $\frac{1}{8} \div \frac{3}{4}$

40. $\frac{1}{9} \div \frac{3}{5}$

41. $\frac{13}{16} \div \frac{1}{2}$

42. $\frac{7}{8} \div \frac{6}{7}$

43. $-\frac{15}{32} \div \frac{3}{4}$

44. $-\frac{7}{10} \div \frac{4}{5}$

45. $-\frac{15}{32} \div \frac{5}{64}$

46. $-\frac{28}{15} \div \frac{21}{10}$

47. $\frac{25}{7} \div \left(-\frac{30}{21}\right)$

48. $\frac{39}{25} \div \left(-\frac{13}{10}\right)$

APLICACIONES

49. MARATONES Cada vuelta alrededor de un estadio, es de $\frac{1}{4}$ de milla. ¿Cuántas vueltas tendría que dar un corredor para completar una sesión de entrenamiento de 26 millas?

50. COCINA Una receta de cocina requiere de $\frac{3}{4}$ de taza de harina y el único recipiente para medir que se tiene es de $\frac{1}{8}$ taza. ¿Cuántos $\frac{1}{8}$ de taza de harina se tienen que agregar para seguir la receta?

51. TECNOLOGÍA LÁSER Un técnico utiliza un láser para cortar secciones delgadas del extremo de una barra de aluminio de $\frac{7}{8}$ de pulgadas de largo.

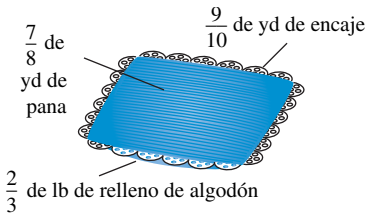
¿Cuántos cortes de $\frac{1}{64}$-de pulgada de ancho se pueden obtener de esta barra?

52. MUEBLES El proceso de producción aplica varias capas de recubrimiento de acrílico transparente a muebles para exteriores a fin de protegerlos contra las inclemencias del tiempo. Si cada capa protectora tiene un espesor de $\frac{3}{32}$ de pulgada, ¿cuántas capas serán necesarias para cubrir $\frac{3}{8}$ de pulgada de acabado transparente?

53. CABLEADO SUBTERRÁNEO En la ilustración, ¿qué propuesta de construcción requerirá el mínimo número de días, para instalar un cable subterráneo de TV desde la estación emisora hasta la subdivisión?

Propuesta	*Cantidad de cable instalado por día*	*Comentarios*
Ruta 1	$\frac{3}{5}$ de una milla	Más largo que la ruta 2
Ruta 2	$\frac{2}{5}$ de una milla	Terreno muy rocoso

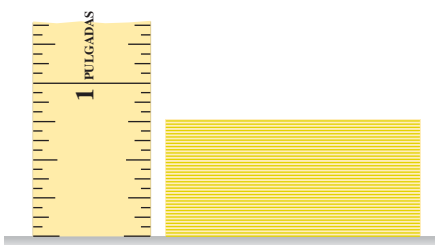
54. PLANEACIÓN DE LA PRODUCCIÓN A continuación se muestran los materiales que se utilizan para fabricar una almohada. Examine la lista de inventario para determinar cuántas almohadas se pueden fabricar en una corrida de producción con los materiales que se tienen.



Lista del inventario de fábrica

Materiales	*Cantidad en almacén*
Encaje	135 yd
Pana	154 yd
Relleno de algodón	98 lb

55. TARJETAS DE 3×5 Se apilan noventa tarjetas de 3×5 pulgadas y se colocan al lado de una regla como se muestra en la figura.

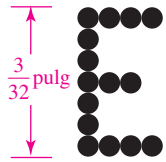


a. ¿En cuántas partes se divide 1 pulgada en la regla?

b. ¿Qué espesor tiene la pila de tarjetas?

c. ¿Qué espesor tiene una tarjeta de 3×5

56. IMPRESORA PARA COMPUTADORA La siguiente ilustración muestra como se forma la letra E en una impresora de matriz de puntos. ¿Cuál es la altura de un punto?



57. SILVICULTURA Un grupo de mapas forestales dividen los 6284 acres de un bosque con árboles plantados hace mucho tiempo en secciones de 4/5 de acre. ¿Cuántas secciones contienen los mapas?

58. FERRETERÍA Una cadena de ferreterías adquirió una gran cantidad de clavos y los empacó en bolsas de $\frac{9}{16}$ libras para su venta. ¿Cuántas bolsas de clavos pueden obtenerse de 2871 libras de clavos?

POR ESCRITO

59. Explique cómo dividir dos fracciones.

60. Indique por qué 0 no tiene recíproco.

61. Escriba un problema de aplicación que pueda resolverse al encontrar $10 \div \frac{1}{5}$.

62. Explique por qué motivo el hecho de dividir una fracción entre 2 es lo mismo que calcular la $\frac{1}{2}$ de ella.

REPASO *Llene los espacios en blanco.*

63. El símbolo $<$ significa _____ _____.

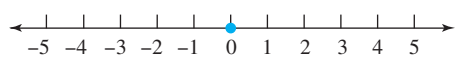
64. La ecuación $9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$ ilustra la _____ de la propiedad de la multiplicación.

65. El cero no es ni _____ ni negativo.

66. La suma de dos números negativos es _____.

67. Conteste verdadero o falso: si se restan cantidades iguales del numerador y el numerador de una fracción, entonces el resultado será una fracción equivalente.

68. Grafique los siguientes números en la recta numérica: $-2, 0, |-4|$, y el opuesto de 1.



69. Evalúe: $-5 + (-3)(8)$.

70. Calcule las potencias

a. 3^5 **b.** $(-2)^5$

3.4 Suma y resta de fracciones

- Fracciones con el mismo denominador
- Fracciones con diferentes denominadores
- Determinación del mcd
- Comparación de fracciones

En aritmética, sólo podemos sumar o restar objetos que sean similares. Por ejemplo, podemos sumar dólares a dólares, pero no podemos sumar dólares con naranjas. Este concepto es importante cuando se suman o restan fracciones.

Fracciones con el mismo denominador

Considera el problema $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$. Cuando lo escribimos con palabras, es claro que estamos sumando objetos similares.

tres **quintos** + un **quinto**

Objetos similares

Como los denominadores $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$ son iguales, se puede decir que tenemos un **común denominador**. Puesto que tenemos un común denominador, podemos sumar las fracciones. La figura 3.6 muestra el proceso de adición o suma.

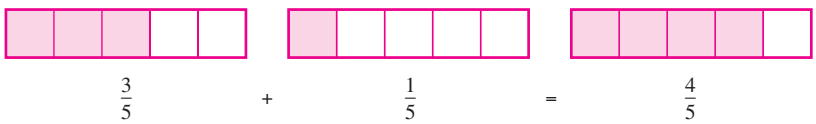


FIGURA 3.6

Podemos hacer algunas observaciones acerca de la adición mostrada en la figura.

La *suma* de los numeradores es el numerador del resultado.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

El resultado es una fracción que tiene el mismo denominador que las dos fracciones que se sumaron.

Estas observaciones sugieren la siguiente regla.

Suma o resta de fracciones con los mismos denominadores

Para sumar (o restar) fracciones que tienen los mismos denominadores, se suman los numeradores, se escribe ese resultado sobre el denominador común, y se simplifica el resultado siempre que sea posible.

Autoevaluación 1

Sume: $\frac{5}{12} + \frac{1}{12}$

Respuesta $\frac{1}{2}$

EJEMPLO 1

Sume: $\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$.

Solución

$\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{1+5}{8}$ Se suman los numeradores. Se escribe la suma sobre el común denominador de 8.

$= \frac{6}{8}$ Se realiza la suma: $1 + 5 = 6$. La fracción se puede simplificar.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 4}$ Se factoriza 6 como $2 \cdot 3$ y 8 como $2 \cdot 4$. Se divide el factor común de 2.

$= \frac{3}{4}$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

Autoevaluación 2

Resta: $-\frac{9}{11} - \left(-\frac{3}{11}\right)$

Respuesta $-\frac{6}{11}$

EJEMPLO 2

Reste: $-\frac{7}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$.

Solución

$-\frac{7}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}$ Se suma el opuesto de $-\frac{2}{3}$, el cual es $\frac{2}{3}$.

$= \frac{-7}{3} + \frac{2}{3}$ Se escribe $-\frac{7}{3}$ como $\frac{-7}{3}$.

$= \frac{-7+2}{3}$ Se suman los numeradores. Se escribe la suma sobre el común denominador 3.

$= \frac{-5}{3}$ Se realiza la suma: $-7 + 2 = -5$.

$= -\frac{5}{3}$ Se vuelve a escribir la fracción: $\frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$.

Autoevaluación 3

Realice las operaciones:

$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$

Respuesta $\frac{2}{3}$

EJEMPLO 3

Realice las operaciones: $\frac{18}{25} - \frac{2}{25} - \frac{1}{25}$.

Solución

$\frac{18}{25} - \frac{2}{25} - \frac{1}{25} = \frac{16}{25} - \frac{1}{25}$ Trabaje de izquierda a derecha. Realice la resta: $\frac{18}{25} - \frac{2}{25} = \frac{16}{25}$.

$= \frac{15}{25}$ Realice la resta.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 5}$ Factorice 15 como $5 \cdot 3$ y 25 como $5 \cdot 5$. Divida (cancele) el factor común de 5.

$= \frac{3}{5}$ Simplifique.

Fracciones con diferentes denominadores

Ahora consideraremos el problema $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$. Como los denominadores son diferentes, no podemos sumar esas fracciones en su forma actual.

tres **quintos** + un **tercio**

↑ No son objetos similares ↑

Para sumar estas fracciones, necesitamos encontrar un común denominador. El común denominador más pequeño (llamado el **menor** o **mínimo común denominador**) es generalmente el común denominador más simple con el que puede trabajarse.

El mínimo común denominador

El **mínimo común denominador (mcd)** de un conjunto de fracciones es el número mínimo que dividirá exactamente a cada denominador.

En el problema $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$, los denominadores son 5 y 3. Los números 5 y 3 dividen exactamente a muchos números: 30, 45 y 60, por nombrar algunos. Pero el número más pequeño que dividen exactamente los números 5 y 3 es 15. Este es el mcd. Ahora construimos cada fracción en una fracción con un denominador igual a 15 mediante la aplicación de la propiedad fundamental de las fracciones.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot \mathbf{3}}{5 \cdot \mathbf{3}} + \frac{1 \cdot \mathbf{5}}{3 \cdot \mathbf{5}}$$

Necesitamos multiplicar este denominador por 3 para obtener 15

Necesitamos multiplicar este denominador por 5 para obtener 15.

$$= \frac{9}{15} + \frac{5}{15}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= \frac{9 + 5}{15}$$ Se suman los numeradores y se escribe la suma sobre el común denominador de 15.

$$= \frac{14}{15}$$ Se realiza la suma: 9 + 5 = 14.

La figura 3.7 muestra que $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$ están expresados como fracciones equivalentes con un denominador que es 15. Como los denominadores son iguales, las fracciones se pueden sumar fácilmente.

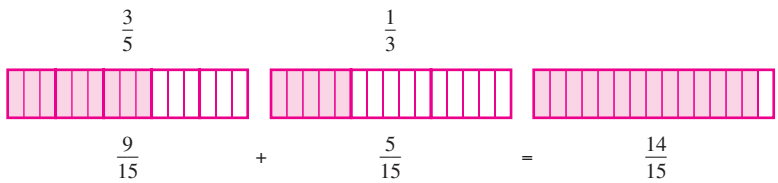


FIGURA 3.7

Para sumar o restar fracciones con distintos denominadores, debemos seguir los pasos que se indican a continuación:

Suma o resta de fracciones con denominadores diferentes

1. Encuentre el mcd.
2. Exprese cada fracción como una fracción equivalente con un denominador que es el mcd.
3. Sume o reste las fracciones resultantes. Simplifique el resultado siempre que sea posible.

Autoevaluación 4

Sume: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

Respuesta $\frac{9}{10}$

EJEMPLO 4 Sume: $\frac{1}{8} + \frac{2}{3}$.

Solución Puesto que el número menor que divide exactamente a los denominadores 8 y 3 es 24, el mcd es 24.

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot \mathbf{3}}{8 \cdot \mathbf{3}} + \frac{2 \cdot \mathbf{8}}{3 \cdot \mathbf{8}}$$ Se expresa cada fracción en términos de 24s.

$$= \frac{3}{24} + \frac{16}{24}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{3 + 16}{24}$$ Se suman los numeradores y se escribe la suma sobre el común denominador de 24.

$$= \frac{19}{24}$$ Se efectúa la suma en el numerador: 3 + 16 = 19.

Autoevaluación 5

Reste: $\frac{6}{7} - \frac{3}{5}$

Respuesta $\frac{9}{35}$

EJEMPLO 5 Reste: $\frac{7}{16} - \frac{1}{3}$.

Solución Como el número mínimo que divide exactamente a los denominadores 16 y 3 es 48, el mcd es 48.

$$\frac{7}{16} - \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot \mathbf{3}}{16 \cdot \mathbf{3}} - \frac{1 \cdot \mathbf{16}}{3 \cdot \mathbf{16}}$$ Se expresa cada fracción en términos de 48s.

$$= \frac{21}{48} - \frac{16}{48}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{21 - 16}{48}$$ Se restan los numeradores y se mantiene el denominador común.

$$= \frac{5}{48}$$ Se realiza la resta.

Autoevaluación 6

Sume: $-6 + \frac{2}{9}$

Respuesta $-\frac{52}{9}$

EJEMPLO 6 Sume: $-5 + \frac{1}{4}$.

Solución

$$-5 + \frac{1}{4} = \frac{-5}{1} + \frac{1}{4}$$ Se escribe -5 como $\frac{-5}{1}$. El mínimo número que divide exactamente a 1 y 4 es 4, de manera que el mcd es 4.

$$= \frac{-5 \cdot \mathbf{4}}{1 \cdot \mathbf{4}} + \frac{1}{4}$$ Se expresa $\frac{-5}{1}$ en términos de 4s.

$$= \frac{-20}{4} + \frac{1}{4}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= \frac{-20 + 1}{4}$$ Se escribe la suma de los numeradores sobre el común denominador 4.

$$= \frac{-19}{4}$$ Se realiza la suma: $-20 + 1 = -19$.

$$= -\frac{19}{4}$$ Se reescribe: $\frac{-19}{4} = -\frac{19}{4}$.

Determinación del mcd

Cuado sumamos o restamos fracciones con diferentes denominadores, el mínimo común denominador no siempre es obvio. A continuación desarrollaremos un método que permitirá determinar el mcd.

Encontremos ahora el mínimo común denominador de $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{10}$. Hemos aprendido que tanto 8 como 10 deben dividir al mcd exactamente. Por consiguiente, el mcd debe incluir la factorización prima de 8, la cual es $2 \cdot 2 \cdot 2$, y la factorización prima de 10, la cual es $2 \cdot 5$. En la figura 3.8, vemos que $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ es el número menor que cumple con los requisitos. Observe que el factor común de 2 está "compartido" por las dos factorizaciones primas.

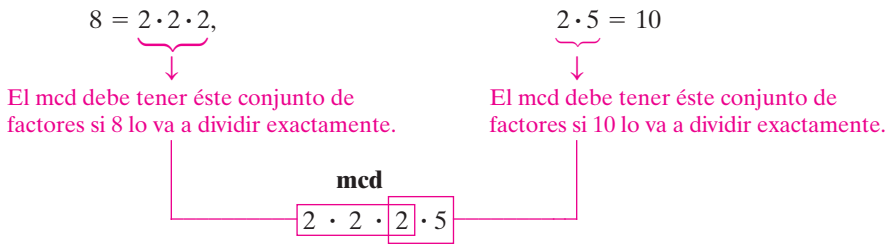

8 = 2 · 2 · 2,
2 · 5 = 10
El mcd debe tener éste conjunto de factores si 8 lo va a dividir exactamente.
El mcd debe tener éste conjunto de factores si 10 lo va a dividir exactamente.
mcd
2 · 2 · 2 · 5

FIGURA 3.8

Determinación del mcd

Para hallar el mcd en un conjunto de fracciones.

1. Calcule los factores primos de cada uno de los denominadores.
2. Seleccione una de las factorizaciones primas y compare las otras con ésta, una a la vez. Debe contener cada una de las factorizaciones restantes. En caso contrario, multiplíquela por cualquiera de los factores primos que carezca.
3. El mcd es el producto de los factores primos que resultan de esta comparación.

Encontrará que el producto que genera el mcd contiene cada uno de los factores primos la máxima cantidad de veces que aparecen en cualquier factorización prima individual.

EJEMPLO 7 Sume: $\frac{11}{15} + \frac{3}{10}$.

Solución Para encontrar el mcd, factorizamos cada denominador: $15 = 3 \cdot 5$ y $10 = 2 \cdot 5$. Después se comparan. La factorización $3 \cdot 5$ no contiene la factorización de $2 \cdot 5$; esta carece del factor 2. En consecuencia, multiplicamos $3 \cdot 5$ por 2 para obtener el mcd.

$15 = 3 \cdot 5$ —— $3 \cdot 5 \cdot 2$ —— $2 \cdot 5 = 10$

mcd = 30

$$\frac{11}{15} + \frac{3}{10} = \frac{11 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3}$$ Se expresa cada fracción en términos de 30avos.

$$= \frac{22}{30} + \frac{9}{30}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{22 + 9}{30}$$ Se escribe la suma de los numeradores sobre el común denominador de 30.

$$= \frac{31}{30}$$ Se realiza la suma: $22 + 9 = 31$.

Autoevaluación 7

Sume: $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

Respuesta $\frac{29}{24}$

Autoevaluación 8

Reste: $\frac{33}{35} - \frac{11}{14}$

Respuesta $\frac{11}{70}$

EJEMPLO 8

Reste: $\frac{20}{21} - \frac{5}{6}$.

Solución Para encontrar el mcd, factorizamos cada denominador: $21 = 7 \cdot 3$ y $6 = 3 \cdot 2$. Después los comparamos. La factorización $7 \cdot 3$ no contiene la factorización $3 \cdot 2$; ésta carece del factor 2. En consecuencia, multiplicamos $7 \cdot 3$ por 2 para obtener el mcd.

$21 = 7 \cdot 3$ —— $7 \cdot 3 \cdot 2$ —— $3 \cdot 2 = 6$

mcd = 42

$$\frac{20}{21} - \frac{5}{6} = \frac{20 \cdot \mathbf{2}}{21 \cdot \mathbf{2}} - \frac{5 \cdot \mathbf{7}}{6 \cdot \mathbf{7}}$$ Se expresa cada fracción en términos de 42s.

$$= \frac{40}{42} - \frac{35}{42}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= \frac{40 - 35}{42}$$ Se escribe la diferencia de los numeradores sobre el común denominador 42.

$$= \frac{5}{42}$$ Se realiza la resta: $40 - 35 = 5$.

EJEMPLO 9 Hábitos de los televidentes.

Se pidió a los alumnos de un campus universitario que estimaran a la hora más cercana cuánto tiempo estuvieron viendo programas de televisión cada día. Los resultados se muestran en la gráfica pastel de la figura 3.9. Por ejemplo, la gráfica nos dice que $\frac{1}{4}$ de aquéllos que respondieron veían la televisión 1 hora diaria. Encuentre la fracción del total de los alumnos que ven televisión de 0 a 2 horas diariamente.

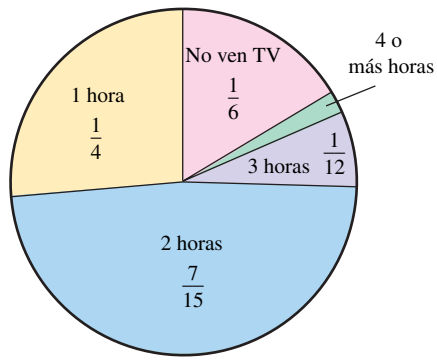


FIGURA 3.9

Solución Para responder esta pregunta, necesitamos sumar $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{7}{15}$. Para encontrar el mcd, encontramos el factor primo de los denominadores.

$4 = 2 \cdot 2$ —— $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ —— $3 \cdot 5 = 15$

$6 = 2 \cdot 3$

mcd = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{15} = \frac{1 \cdot \mathbf{10}}{6 \cdot \mathbf{10}} + \frac{1 \cdot \mathbf{15}}{4 \cdot \mathbf{15}} + \frac{7 \cdot \mathbf{4}}{15 \cdot \mathbf{4}}$$ Se expresa cada fracción en términos de 60avos.

$$= \frac{10}{60} + \frac{15}{60} + \frac{28}{60}$$ Se realiza la multiplicación en los numeradores y denominadores.

$$= \frac{10 + 15 + 28}{60}$$ Se suman los numeradores. Se escribe la suma sobre el común denominador 60.

$$= \frac{53}{60}$$ Se realiza la suma: $10 + 15 + 28 = 53$.

La fracción correspondiente al total de estudiantes que ve de 0 a 2 horas de televisión diariamente es: $\frac{53}{60}$.

Comparación de fracciones

Si las fracciones tienen el mismo denominador, la fracción con el mayor numerador es la fracción mayor. Si sus denominadores son diferentes, necesitamos escribir las fracciones con un denominador común antes de poder realizar cualquier comparación.

Comparación de fracciones

Para comparar fracciones distintas, escribimos las fracciones como fracciones equivalentes con el mismo denominador, de preferencia con el mcd. Después comparamos sus numeradores. La fracción que tiene el numerador más grande es la fracción mayor.

EJEMPLO 10 ¿Cuál es la fracción mayor: $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$?

Solución Para comparar estas fracciones, expresamos cada una con el mcd de 24.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot \mathbf{4}}{6 \cdot \mathbf{4}} \qquad \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot \mathbf{3}}{8 \cdot \mathbf{3}}$$

Se expresa cada fracción en términos de 24avos.

$$= \frac{20}{24} \qquad = \frac{21}{24}$$

Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y denominadores.

Luego, se comparan los numeradores. Como $21 > 20$, concluimos que $\frac{21}{24}$ es mayor que $\frac{20}{24}$. Por tanto, $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$.

Autoevaluación 10

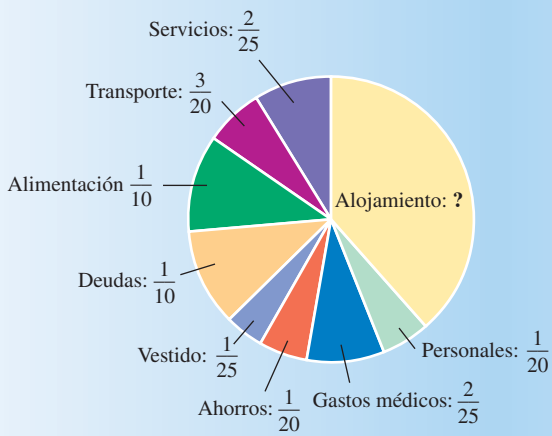
¿Cuál de las fracciones es mayor: $\frac{7}{12}$ o $\frac{3}{5}$?

Respuesta $\frac{3}{5}$

Presupuestos PARA PENSAR A DETALLE

"La elaboración de un presupuesto es crucial si no deseas poner tu vida en serios problemas. Al hacerlo estarás desarrollando un habito que puede servir para toda la vida." Liz Pulliam Weston, MSN Money

La gráfica circular que se presenta a continuación muestra un presupuesto sugerido para los nuevos graduados universitarios, de acuerdo con las recomendaciones de la junta directiva, la cual es un servicio no lucrativo de consultoría relacionada con créditos de consumo. ¿Qué fracción del sueldo líquido neto debería gastarse en el hospedaje o alojamiento?



Sección 3.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. El _____ común denominador para un conjunto de fracciones es el mínimo número que dividirá exactamente a cada denominador.

2. Las fracciones _____ como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, son fracciones que representan la misma cantidad.

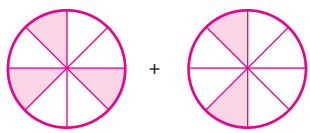
3. Para expresar una fracción en términos de _____ multiplicamos el numerador y el denominador por el mismo numero.

4. El _____ de una fracción es el proceso de multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número.

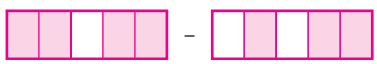
CONCEPTOS

5. Llene los espacios en blanco. Para sumar dos fracciones con un común denominador, sumamos los _____ y después escribimos ese resultado sobre el denominador _____ .

6. a. Sume las fracciones que se indican.



b. Reste las fracciones indicadas.



7. ¿Por qué debemos realizar un trabajo preliminar antes de realizar la siguiente suma?

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{5}$$

8. ¿Por qué debemos realizar un trabajo preliminar antes de realizar la siguiente resta?

$$\frac{5}{6}-\frac{5}{18}$$

9. ¿Por qué razón se multiplican los numeradores y los denominadores de las siguientes fracciones?

a. $\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}$ **b.** $\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}$

10. Considere $\frac{3}{4}$. ¿Por qué deberíamos multiplicar el numerador y el denominador de $\frac{3}{4}$ para expresarlo como una fracción equivalente con los siguientes denominadores?

a. 12 **b.** 36

11. Considere las siguientes factorizaciones primas.

$$24 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$
$$90 = 5\cdot 3\cdot 3\cdot 2$$

Para una de esas factorizaciones, ¿cuál es el máximo número de veces que,

a. aparece 5?

b. aparece 3?

c. aparece 2?

12. a. Mencione los primeros diez múltiplos de 9 y los primeros diez múltiplos de 12.

b. Encuentre el número menor que divide exactamente a 9 y 12.

13. Los denominadores de dos fracciones incluidas en un problema de resta tienen factor primo de $2\cdot 2\cdot 5$ y $2\cdot 3\cdot 5$. ¿Cuál es el mcd de las fracciones?

14. Los denominadores de las tres fracciones incluidas en el problema de resta tienen las formas de factorización prima de $2\cdot 2\cdot 5$, $2\cdot 3\cdot 5$, y $2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$. ¿Cuál es mcd de las fracciones?

15. a. Divida en cuartos la figura de la izquierda y sombree una parte. Divida la figura de la derecha en tercios y sombree una parte. ¿Cuál es la parte sombreada más grande?

b. Exprese la parte sombreada de cada figura del inciso a) como una fracción. Muestre que una de esas fracciones es mayor que la otra al expresarlas en términos de un común denominador, después de hacer lo anterior compárelas.

16. Coloque el símbolo que corresponda $>$ o $<$ en los espacios en blanco para que el enunciado sea cierto.

a. $\frac{32}{35}$ ☐ $\frac{31}{35}$ **b.** $\frac{7}{8}$ ☐ $\frac{31}{32}$

NOTACIÓN *Complete cada problema.*

17. $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2\cdot\square}{5\cdot\square}+\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}$

$=\frac{\square}{15}+\frac{\square}{15}$

$=\frac{\square+\square}{15}$

$=\frac{11}{15}$

18. $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7\cdot 3}{\square\cdot 3}-\frac{2\cdot 8}{\square\cdot 8}$

$=\frac{21}{\square}-\frac{16}{\square}$

$=\frac{21-16}{\square}$

$=\frac{5}{24}$

PRÁCTICA *A continuación se indican los denominadores de dos fracciones. Encuentre el mínimo común denominador.*

19. 18, 6

20. 15, 3

21. 8, 6

22. 10, 4

23. 8, 20

24. 14, 21

25. 15, 12

26. 25, 30

Realice cada operación. Simplifique cuando sea necesario.

27. $\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$

28. $\frac{16}{25}-\frac{9}{25}$

29. $\frac{37}{103}-\frac{17}{103}$

30. $\frac{54}{53}-\frac{52}{53}$

31. $\frac{12}{25}-\frac{1}{25}-\frac{1}{25}$

32. $\frac{7}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$

33. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$

34. $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

35. $\frac{13}{20}-\frac{1}{5}$

36. $\frac{71}{100}-\frac{1}{10}$

37. $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$

38. $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$

39. $\frac{1}{8}+\frac{2}{7}$

40. $\frac{1}{6}+\frac{5}{9}$

41. $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

42. $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}$

43. $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$

44. $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}$

45. $\frac{16}{25}-\left(-\frac{3}{10}\right)$

46. $\frac{3}{8}-\left(-\frac{1}{6}\right)$

47. $-\frac{7}{16}+\frac{1}{4}$

48. $-\frac{17}{20}+\frac{4}{5}$

49. $\frac{1}{12}-\frac{3}{4}$

50. $\frac{11}{60}-\frac{13}{20}$

51. $-\frac{5}{8}-\frac{1}{3}$

52. $-\frac{7}{20}-\frac{1}{5}$

53. $-3+\frac{2}{5}$

54. $-6+\frac{5}{8}$

55. $-\frac{3}{4}-5$

56. $-2-\frac{7}{8}$

57. $\frac{5}{24}+\frac{3}{16}$

58. $\frac{17}{20}-\frac{4}{15}$

59. $-\frac{11}{15}-\frac{2}{9}$

60. $-\frac{19}{18}-\frac{5}{12}$

61. $\frac{7}{25}+\frac{1}{15}$

62. $\frac{11}{20}-\frac{1}{8}$

63. $\frac{4}{27}+\frac{1}{6}$

64. $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}$

65. $\frac{27}{50}+\frac{5}{16}$

66. $\frac{49}{50}-\frac{15}{16}$

67. $\frac{7}{30}-\frac{19}{75}$

68. $\frac{73}{75}-\frac{31}{30}$

69. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

70. $\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}$

71. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

72. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$

73. $-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{1}{6}$

74. $-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{6}$

75. Encuentre la diferencia de $\frac{11}{60}$ y $\frac{2}{45}$.

76. Encuentre la suma de $\frac{9}{48}$ y $\frac{7}{40}$.

77. Reste $\frac{5}{12}$ de $\frac{2}{15}$.

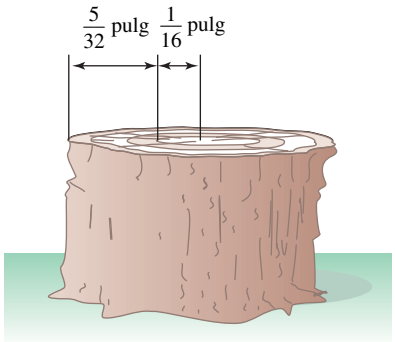
78. ¿Cuál es la suma de $\frac{11}{24}$ y $\frac{7}{36}$ incrementado por $\frac{5}{48}$?

APLICACIONES

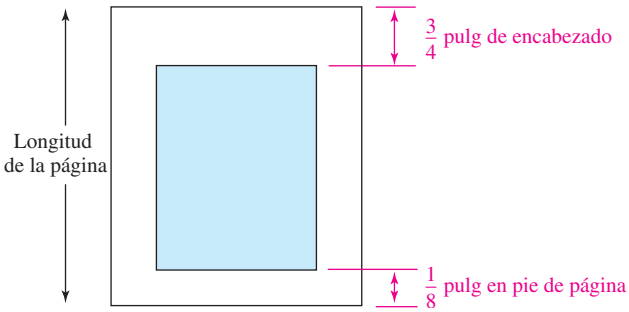
79. BOTÁNICA Para valorar los efectos de la contaminación ambiental en el desarrollo de árboles, los botánicos cortaron un árbol de pino y midieron la anchura de los anillos de crecimiento para los dos últimos años?

a. ¿Cuál ha sido su crecimiento en este periodo de dos años?

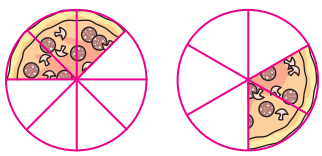
b. ¿Cual es la diferencia en la anchura de los dos anillos?



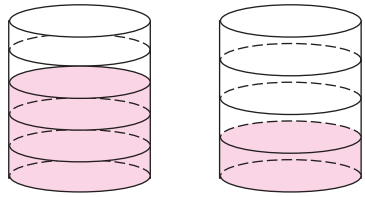
80. LA PRESENTACION DE UNA REVISTA El diseño de página para una revista incluye espacio en blanco en la parte superior llamado encabezado, y una franja blanca en la parte inferior, llamado pie de página. En la ilustración, ¿qué longitud se está desperdiciando por el encabezado y el pie de página?



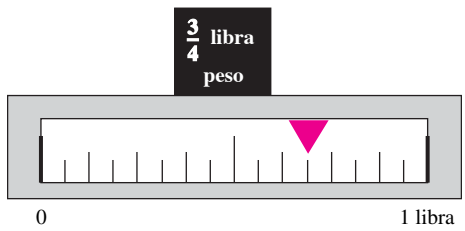
81. CENAS Una familia compró dos pizzas grandes para la cena. Algunas rebanadas de cada pizza no se comieron, como se muestra. ¿Cuánto quedó de la pizza? Podría haberse alimentado toda la familia con sólo una pizza?



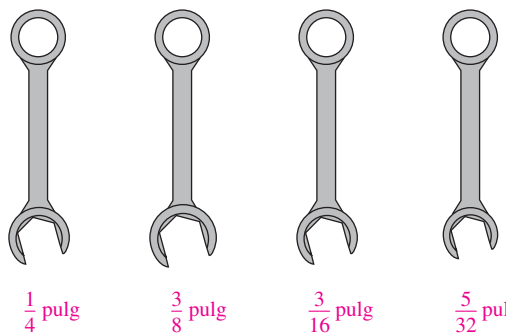
82. BARRILES DE GASOLINA En la siguiente figura se muestra el contenido de dos barriles con tamaños idénticos. Si el contenido de los dos barriles se vacía dentro de un tercer barril vacío que tiene el mismo tamaño, ¿qué porción del tercer barril se llenará?



83. PESOS Y MEDIDAS Una agencia de protección al consumidor verifica la precisión de las básculas de una carnicería colocándole unos pesos conocidos de tres cuartos de libra en la báscula, y después las compara con la indicación de la báscula. De acuerdo con la ilustración, ¿por cuánto está desajustada esta báscula? ¿Cómo resultado de lo anterior, se cobra menos o se cobra más a los clientes en sus compras?

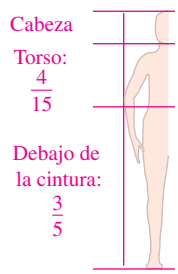


84. LLAVES INGLESAS A un mecánico le gusta colgar sus llaves inglesas arriba de su banco de herramientas, para esto las coloca en el orden de la más estrecha a la más ancha. ¿Cuál es el orden apropiado de las llaves en la ilustración?

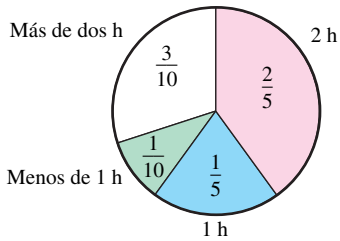


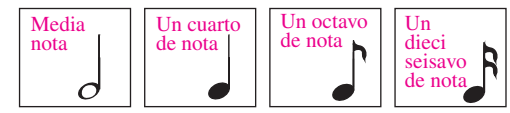
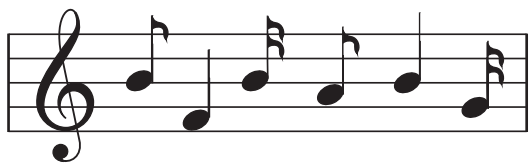
85. CAMINATA La ilustración muestra la longitud de cada sección de la trayectoria de una caminata de tres partes. Clasifique las longitudes de la más larga a la más corta.

86. DIBUJO DE FIGURA Como ayuda para dibujar el cuerpo humano, los artistas dividen el cuerpo en tres partes. Cada parte se expresa como una fracción de la altura total del cuerpo humano. Por ejemplo, el torso es $\frac{4}{15}$ de la altura corporal. ¿Qué fracción de la altura del cuerpo le corresponde a la cabeza?



87. HÁBITOS DE ESTUDIO A varios alumnos universitarios de tiempo completo se les pidió que indicaran el número aproximado de horas diarias que dedican al estudio. Los resultados se muestran en la grafica. ¿Qué fracción de los alumnos estudian 2 o más horas al día?



88. NOTAS MUSICALES Las notas que se utilizan en música tienen valores fraccionales. Sus nombres y los símbolos que se utilizan para representarlas se muestran en la ilustración (a). Con frecuencia, los valores de las notas en cada medida deben sumar un total de 1. ¿La medida en la ilustración (b) está completa?

(a)

(b)

89. PUERTAS ELÉCTRICAS PARA GARAGE ¿Cuál es la diferencia en potencia entre una puerta eléctrica de $\frac{1}{3}$-hp y una de $\frac{1}{2}$-hp?

90. CAMIONES DE ENTREGA Un camión puede llevar con seguridad una tonelada de carga. ¿Puede utilizarse este camión para entregar media tonelada de arena, un tercio de tonelada de grava y un quinto de tonelada de cemento en un viaje hasta el sitio de la obra?

POR ESCRITO

91. ¿Cuáles son los procedimientos para expresar una fracción en términos mayores y simplificar una fracción a términos mínimos similares, y cuál es su diferencia?

92. A partir de dos fracciones, ¿cómo podemos encontrar su mínimo común denominador?

93. ¿Cómo podemos comparar los tamaños relativos de dos fracciones con distintos denominadores?

94. ¿Cuál es la diferencia entre un común denominador y el mínimo común denominador?

REPASO

95. Evalúe: $|6 - 10|$.

96. Redondee 674 a la decena más cercana.

97. Evalúe: $3^2 \cdot 4^3$.

98. Encuentre los factores primos de 100.

99. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo que tiene una longitud de 7 pulgadas y una anchura de 8 pulgadas?

100. ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un rectángulo?

El MCM y el MFC

Como hemos visto, los **múltiplos** de un número se pueden determinar al multiplicar el número por 1, 2, 3, 4, 5 y así sucesivamente. A continuación se muestran los múltiplos de 4 y los múltiplos de 6.

$1 \cdot 4 = 4$	$1 \cdot 6 = 6$
$2 \cdot 4 = 8$	$2 \cdot 6 = \mathbf{12}$
$3 \cdot 4 = \mathbf{12}$	$3 \cdot 6 = 18$
$4 \cdot 4 = 16$	$4 \cdot 6 = \mathbf{24}$
$5 \cdot 4 = 20$	$5 \cdot 6 = 30$
$6 \cdot 4 = \mathbf{24}$	$6 \cdot 6 = \mathbf{36}$
$7 \cdot 4 = 28$	$7 \cdot 6 = 42$
$8 \cdot 4 = 32$	$8 \cdot 6 = 48$
$9 \cdot 4 = \mathbf{36}$	$9 \cdot 6 = 54$

Los múltiples comunes de 4 y de 6 están escritos en color rojo.

Como 12 es el mínimo número que es un múltiplo tanto de 4 como de 6, éste se llama **mínimo común múltiplo (MCM)** de 4 y de 6.

El hecho de realizar listas similares a la anterior puede resultar tedioso. Un método más eficiente para hallar el mínimo común múltiplo de varios números es el siguiente:

Para hallar el mínimo común múltiplo

1. Se escribe cada uno de los números en forma de factores primos.
2. El mínimo común múltiplo es un producto de los factores primos, donde cada factor primo se utiliza el máximo número de veces que éste aparece en cualquier factorización encontrada en el paso 1.

Autoevaluación 1
Encuentre el MCM de 18 y 84.

EJEMPLO 1 Encuentre el MCM de 24 y de 36.

Solución

Paso 1: Primero, encontramos los factores primos de 24 y 36.

$$24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Paso 2: Las factorizaciones de 24 y 36 contienen los factores primos de 3 y 2. Utilizamos cada uno de esos factores el máximo número de veces que éstos aparecen en cualquier factorización.

El máximo número de veces que aparece el 3 en cualquier factorización es dos veces. El máximo número de veces que aparece el 2 en cualquier factorización es tres veces.

$$\text{MCM} = \underset{\downarrow}{3} \cdot \underset{\downarrow}{3} \cdot \underset{\downarrow}{2} \cdot \underset{\downarrow}{2} \cdot \underset{\downarrow}{2} = 72$$

El mínimo común múltiplo de 24 y de 36 es 72.

Respuesta 252

Como 2 divide exactamente a 36, y puesto que 2 divide exactamente a 120, el 2 es **factor común** de 36 y de 120.

$$\frac{36}{2} = 18 \qquad \frac{120}{2} = 60$$

Los números 36 y 120 tienen otros factores comunes, como 3 y 6. El **máximo factor común (MFC)** de 36 y 120 es el máximo número que es factor de ambos. Seguimos estos pasos para hallar el máximo factor común de varios números.

Para hallar el máximo común factor.

1. Se escriben cada uno de los números en forma de factor primo.
2. El máximo factor común es el producto de los factores primos que son comunes a los factores que se determinaron en el paso 1. Si los números no tienen factores en común, el MFC es 1.

Autoevaluación 2
Calcule el MFC de 60 y 150.

EJEMPLO 2 Calcule el MFC de 36 y de 120.

Solución

Paso 1: Encontramos los factores primos de 36 y 120.

$$36 = \mathbf{3} \cdot 3 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2}$$
$$120 = 5 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2$$

Paso 2: Un factor de 3 (resaltado en rojo) y dos factores de 2 (resaltado en azul) son comunes en las factorizaciones de 36 y de 120. Para encontrar el MFC formamos su producto.

$$\text{MFC} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

El máximo factor común de 36 y 120 es 12. Respuesta 30

EJERCICIOS DE ESTUDIO EL MCM Y EL MFC

Encuentre el mínimo común múltiplo de los siguientes números

1. 3, 5
2. 7, 11
3. 8, 14
4. 8, 12
5. 14, 21
6. 16, 20
7. 6, 18
8. 3, 9
9. 44, 60
10. 36, 60
11. 100, 120
12. 120, 180
13. 6, 24, 36
14. 6, 10, 18
15. 18, 54, 63
16. 16, 30, 84

Encuentre el máximo factor común de los siguientes números.

17. 6, 9
18. 8, 12
19. 22, 33
20. 15, 20
21. 16, 20
22. 18, 24
23. 25, 100
24. 16, 80
25. 100, 120
26. 120, 180
27. 48, 108
28. 60, 96
29. 18, 24, 36
30. 30, 50, 90
31. 18, 54, 63
32. 28, 42, 84

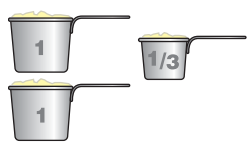
33. ENFERMERÍA Una enfermera, trabaja en una unidad de cuidados intensivos, tiene que tomar los signos vitales de un paciente cada 45 minutos. Otra enfermera tiene que dar al mismo paciente su medicamento cada 2 horas. Si ambas enfermeras se encuentran en la habitación del paciente ahora, ¿cuánto tiempo pasará para que coincidan de nuevo en la habitación del paciente ?

34. HOT DOGS A LA PARRILLA Cierta marca de "hot dogs" se comercializa en paquetes de 10. Cierta marca de panes para "hot dogs" se vende en paquetes de 12. Para una reunión familiar, ¿cuántos paquetes de "hot dogs" y cuántos paquetes de pan para "hot dogs" se tendrían que adquirir para que no se desperdicien ni los "hot dogs" ni los panes?

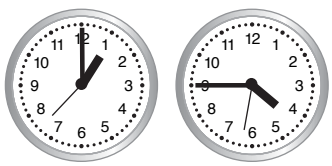
3.5 Multiplicación y división de números mixtos

- Números mixtos • Escritura de números mixtos como fracciones impropias
- Escritura de fracciones impropias como números mixtos
- Graficación de fracciones y números mixtos
- Multiplicación y división de números mixtos

En las dos secciones siguientes mostraremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir *números mixtos*. Estos números se utilizan ampliamente en la vida diaria.



La receta pide $2\frac{1}{3}$ de tazas de harina.



Necesitó $3\frac{3}{4}$ horas para pintar la sala.

La entrada al parque está a $1\frac{1}{2}$ millas.

Números mixtos

Un **número mixto** es la *suma* de un número entero y una fracción propia. Por ejemplo, $3\frac{3}{4}$ es un número mixto.

$$3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

Número mixto — Número entero — Fracción propia

COMENTARIO Observe que $3\frac{3}{4}$ significa $3 + \frac{3}{4}$, aunque el símbolo + no esté escrito. No confundir $3\frac{3}{4}$ con $3 \cdot \frac{3}{4}$ o $3(\frac{3}{4})$, lo cual indica la multiplicación de 3 y $\frac{3}{4}$.

En esta sección, trabajaremos con números mixtos negativos y positivos. Por ejemplo, el número mixto negativo $-4\frac{3}{4}$ podría utilizarse para representar $4\frac{3}{4}$ pies bajo el nivel del mar. Pensamos en $-4\frac{3}{4}$ como $-4 - \frac{3}{4}$.

Escritura de números mixtos como fracciones impropias

Para confirmar que los números mixtos están relacionados con las fracciones impropias, considere $3\frac{3}{4}$. Para escribir $3\frac{3}{4}$ como una fracción impropia, necesitamos averiguar cuántos *cuartos* representa. Una forma es utilizar la propiedad fundamental de las fracciones.

$$3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$ Se escribe el número mixto $3\frac{3}{4}$ como una suma.

$$= \frac{3}{1} + \frac{3}{4}$$ Se escribe 3 como una fracción: $3 = \frac{3}{1}$.

$$= \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4}$$ Se utiliza la propiedad fundamental de las fracciones para expresar $\frac{3}{1}$ como una fracción con denominador de 4.

$$= \frac{12}{4} + \frac{3}{4}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y denominador.

$$= \frac{15}{4}$$ Se suman los numeradores: $12 + 3 = 15$. Se escribe la suma sobre el común denominador 4.

Por tanto, $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

Podemos obtener el mismo resultado con mucho menos trabajo. Para cambiar $3\frac{3}{4}$ a una fracción impropia, simplemente multiplicamos 3 por 4 y sumamos 3 para obtener el numerador y conservar el denominador de 4.

$$3\frac{3}{4} = \frac{3(4) + 3}{4} = \frac{12 + 3}{4} = \frac{15}{4}$$

Este ejemplo ilustra la siguiente regla general.

Escritura de un número mixto como una fracción impropia

Para escribir un número mixto como una fracción impropia, multiplicamos la parte del número entero por el denominador de la fracción, y luego sumamos el resultado al numerador. La suma se escribe sobre el denominador.

EJEMPLO 1 Escriba el número mixto $5\frac{1}{6}$ como una fracción impropia.

Solución

$$5\frac{1}{6} = \frac{5(6) + 1}{6}$$ Se multiplica 5 por el denominador 6. Se suma el numerador 1. Se escribe esta suma sobre el denominador 6.

$$= \frac{30 + 1}{6}$$ Se realiza la multiplicación: $5(6) = 30$.

$$= \frac{31}{6}$$ Se realiza la suma: $30 + 1 = 31$.

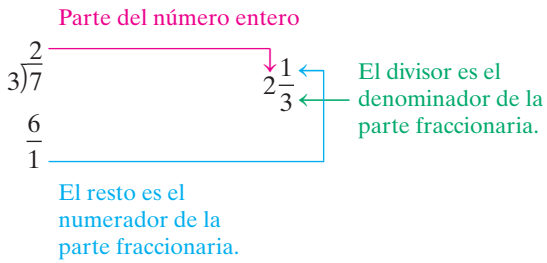
Autoevaluación 1
Escriba el número mixto $3\frac{3}{8}$ como una fracción impropia.

Respuesta $\frac{27}{8}$

Para escribir un número mixto negativo en forma fraccionaria, ignore el signo – y utilice el método mostrado en el ejemplo 1 sobre el número mixto positivo. Una vez realizado el procedimiento, escriba un signo – frente al resultado. Por ejemplo, $-3\frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$.

Escritura de fracciones impropias como números mixtos

Para escribir una fracción impropia como un número mixto, primero debemos hallar dos cosas: la *parte del numero entero* y la parte *fraccionaria* del número mixto. Para desarrollar un procedimiento que permita realizar lo anterior, consideremos la fracción impropia $\frac{7}{3}$. Para hallar el número de grupos de 3 en 7, debemos dividir 7 entre 3. Esto determinará la parte del número entero del número mixto. El residuo es el numerador de la parte fraccionaria del número mixto.



Este ejemplo sugiere la siguiente regla.

Escritura de una fracción impropia como un número mixto.

Para escribir una fracción impropia como un número mixto, se divide el numerador entre el denominador para obtener la parte del número entero. El residuo sobre el divisor es la parte fraccionaria.

Horas de sueño — PARA PENSAR A DETALLE

"La falta de sueño entre los alumnos universitarios es un problema antiguo, pero uno que parece empeorarse, según algunas investigaciones nacionales." CBSnews.com

En un estudio realizado en el año 2001 en más de 1500 alumnos universitarios indicó que los alumnos dormían un promedio de seis horas y cuarenta minutos por noche (Holy Cross Health Survey). James Maas, profesor de la Universidad de Cornell y autor del libro *Poder del Sueño*, recomienda como mínimo ocho horas para dormir por noche para el caso de los alumnos universitarios. Encuentre la diferencia entre la recomendación del profesor Mass y el promedio de la encuesta realizada a los alumnos universitarios. Exprese el resultado como número mixto.

Autoevaluación 2

Escriba $\frac{43}{5}$ como número mixto.

Respuesta $8\frac{3}{5}$

EJEMPLO 2 Escriba $\frac{29}{6}$ como un número mixto.

Solución

$6\overline{)29}$ $\quad\frac{4}{}$ Se divide el numerador entre el denominador.

$\frac{24}{5}$ El resultado es 5.

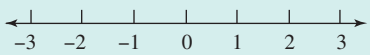
Por tanto, $\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$.

Graficación de fracciones y números mixtos

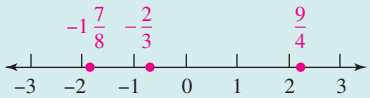
Anteriormente, graficamos números enteros positivos y enteros en la recta numérica. Las fracciones y los números mixtos también se pueden graficar en la recta numérica.

Autoevaluación 3

Grafique: $-1\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \text{y } \frac{9}{4}$



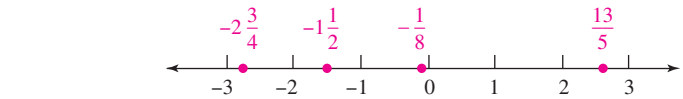
Respuesta



EJEMPLO 3 Grafique: $-2\frac{3}{4}, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \text{y } \frac{13}{5}$.

Solución

- Como $-2\frac{3}{4} < -2$, la gráfica de $-2\frac{3}{4}$ está a la izquierda de -2 sobre la recta numérica.
- El número $-1\frac{1}{2}$ está entre -1 y -2.
- El número $-\frac{1}{8}$ es menor a 0.
- Expresado como número mixto, $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.



Multiplicación y división de números mixtos

Multiplicación y división de números mixtos

Para multiplicar o dividir números mixtos, primero se cambian los números mixtos a fracciones impropias. Después se realiza la multiplicación o división de las fracciones.

Autoevaluación 4

Multiplique: $9\frac{3}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$

EJEMPLO 4 Multiplique: $5\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{13}$.

Solución

$5\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{13} = \frac{26}{5} \cdot \frac{15}{13}$ Se escribe cada número mixto como una fracción impropia.

$= \frac{26 \cdot 15}{5 \cdot 13}$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{13 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 13}$$ Se factoriza 26 como $13 \cdot 2$ y 15 como $5 \cdot 3$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{13}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{13}}}$$ Se dividen (cancelan) los factores comunes de 13 y 5.

$$= \frac{6}{1}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= 6$$ Se simplifica: $\frac{6}{1} = 6$.

Respuesta 36

EJEMPLO 5

Divida: $-3\frac{3}{8} \div 2\frac{1}{4}$.

Autoevaluación 5

Divida: $3\frac{4}{15} \div \left(-2\frac{1}{10}\right)$

Solución

$$-3\frac{3}{8} \div 2\frac{1}{4} = -\frac{27}{8} \div \frac{9}{4}$$ Se escribe cada número mixto como una fracción impropia.

$$= -\frac{27}{8} \cdot \frac{4}{9}$$ Se multiplica por el reciproco de $\frac{9}{4}$.

$$= -\frac{27 \cdot 4}{8 \cdot 9}$$ El producto de dos fracciones con signos distintos es negativo. Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{9}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{9}}}$$ Se factoriza 27 como $9 \cdot 3$ y 8 como $4 \cdot 2$. Se dividen los factores comunes de 9 y 4.

$$= -\frac{3}{2}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y denominador.

$$= -1\frac{1}{2}$$ Se escribe $-\frac{3}{2}$ como un número mixto.

Respuesta $-1\frac{5}{9}$

EJEMPLO 6

Concesiones gubernamentales. Si se desea dividir $\$12\frac{1}{2}$ millones de dólares en forma equitativa entre cinco ciudades para fondos de programas de esparcimiento, ¿cuánto recibirá cada ciudad?

Solución

Para encontrar la cantidad recibida por cada ciudad, dividimos la cantidad donada entre 5.

$$12\frac{1}{2} \div 5 = \frac{25}{2} \div \frac{5}{1}$$ Se escribe $12\frac{1}{2}$ como una fracción impropia y escribe 5 como una fracción.

$$= \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{5}$$ Se multiplica por el recíproco de $\frac{5}{1}$.

$$= \frac{25 \cdot 1}{2 \cdot 5}$$ Se realzan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$ Se factoriza 25 como $5 \cdot 5$. Se divide (cancela) el factor común de 5.

$$= \frac{5}{2}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= 2\frac{1}{2}$$ Se escribe $\frac{5}{2}$ como un número mixto.

Cada ciudad recibirá $\$2\frac{1}{2}$ millones de dólares.

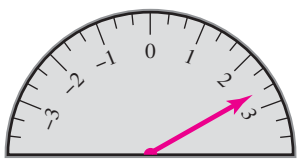
Sección 3.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

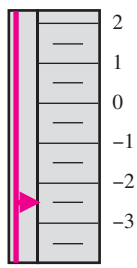
1. Un número _____ es la suma de un número entero positivo y de una fracción propia.
2. Una fracción _____ es una fracción con un numerador que es mayor que (o igual que) su denominador.
3. El hecho de _____ un número significa localizar su posición en la recta numérica y marcarlo utilizando un punto.
4. Multiplicar o dividir el _____ y el _____ de una fracción por el mismo número distinto de 0 no cambia el valor de la fracción.

CONCEPTOS

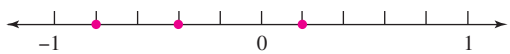
5. ¿Qué número con signo podría utilizarse para describir cada situación?
   - **a.** Una temperatura de cinco y un medio grado sobre cero.
   - **b.** Un sistema de aspersión que está $6\frac{7}{8}$ pulgadas debajo de la acera.
6. ¿Qué número con signo podría utilizarse para describir cada situación?
   - **a.** La lluvia total es de dos y tres décimos de pulgada menor que el promedio.
   - **b.** Tres y medio minutos después del despegue.
7. **a.** En la ilustración, las divisiones de la carátula del medidor representan fracciones. ¿Qué valor registra la flecha?
   - **b.** Si la flecha se mueve cuatro marcas hacia la izquierda, qué valor registraría?



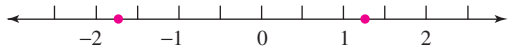
8. **a.** En la ilustración, las divisiones de la carátula del medidor representan fracciones. ¿Qué valor registra la flecha?
   - **b.** Si la flecha se mueve hacia arriba una marca, qué valor registraría?



9. ¿Qué fracciones se han graficado en la recta numérica?

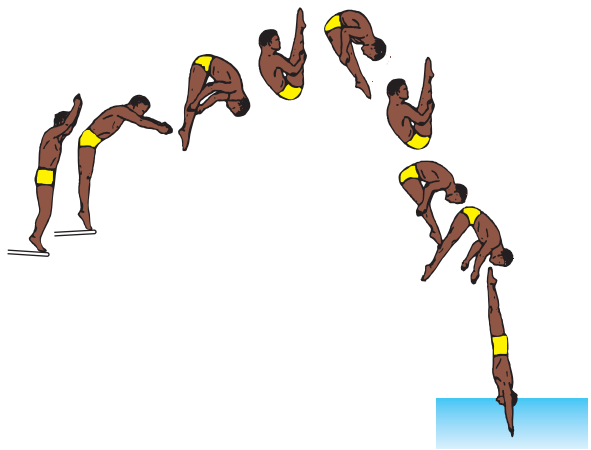


10. ¿Qué números mixtos se han graficado en la recta numérica?



11. CLAVADOS Complete la descripción del clavado llenando el espacio en blanco con un número mixto.

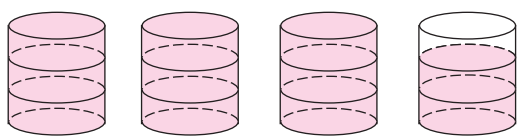
Hacia adelante ___ saltos



12. ETIQUETADO DE UN PRODUCTO La Siguiente etiqueta utiliza números mixtos. Escriba cada uno de ellos como una fracción impropia.

Canasta de Lavandería
1 3/4 medida
El bordeado del asa está reforzado
para soportar cargas más grandes
23 1/4" L X 18 7/8 " A X 10 1/2 " A

13. Dibuje $\frac{17}{8}$ pizzas.
14. **a.** ¿Qué número mixto está representado en la ilustración de abajo?
   - **b.** ¿Qué fracción impropia se muestra en la ilustración?



NOTACIÓN *Complete cada solución.*

15. Multiplique: $-5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7}$

$$-5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7} = -\frac{21}{4} \cdot \frac{\square}{7}$$
$$= -\frac{21 \cdot \square}{4 \cdot 7}$$
$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{\square}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{\square}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}$$
$$= -\frac{\square}{1}$$
$$= -6$$

16. Divida: $-5\frac{5}{6} \div 2\frac{1}{12}$.

$$-5\frac{5}{6} \div 2\frac{1}{12} = -\frac{\square}{6} \div \frac{25}{12}$$
$$= -\frac{35}{6} \cdot \frac{12}{\square}$$
$$= -\frac{35 \cdot 12}{6 \cdot \square}$$
$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \square \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot \square}$$
$$= -\frac{\square}{5}$$
$$= -2\frac{4}{5}$$

PRÁCTICA *Escriba cada fracción impropia como un número mixto. Simplifique el resultado de ser posible.*

17. $\frac{15}{4}$ **18.** $\frac{41}{6}$

19. $\frac{29}{5}$ **20.** $\frac{29}{3}$

21. $-\frac{20}{6}$ **22.** $-\frac{28}{8}$

23. $\frac{127}{12}$ **24.** $\frac{197}{16}$

Escriba cada número mixto como una fracción impropia.

25. $6\frac{1}{2}$ **26.** $8\frac{2}{3}$

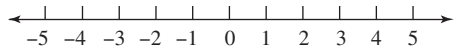
27. $20\frac{4}{5}$ **28.** $15\frac{3}{8}$

29. $-6\frac{2}{9}$ **30.** $-7\frac{1}{12}$

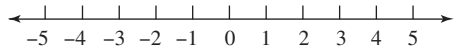
31. $200\frac{2}{3}$ **32.** $90\frac{5}{6}$

Grafique cada conjunto de números en la recta numérica.

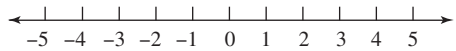
33. $\left\{-2\frac{8}{9}, 1\frac{2}{3}, \frac{16}{5}\right\}$



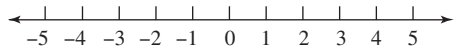
34. $\left\{-\frac{3}{4}, -3\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right\}$



35. $\left\{3\frac{1}{7}, -\frac{98}{99}, -\frac{10}{3}\right\}$



36. $\left\{-2\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{11}{3}\right\}$



Multiplique.

37. $1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{7}$ **38.** $2\frac{3}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$

39. $-7\frac{1}{2}\left(-1\frac{2}{5}\right)$ **40.** $-4\frac{1}{8}\left(-1\frac{7}{9}\right)$

41. $3\frac{1}{16} \cdot 4\frac{4}{7}$ **42.** $5\frac{3}{5} \cdot 1\frac{11}{14}$

43. $-6 \cdot 2\frac{7}{24}$ **44.** $-7 \cdot 1\frac{3}{28}$

45. $2\frac{1}{2}\left(-3\frac{1}{3}\right)$ **46.** $\left(-3\frac{1}{4}\right)\left(1\frac{1}{5}\right)$

47. $2\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{27}$ **48.** $3\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{32}$

49. Encuentre el producto de $1\frac{2}{3}$, 6, y $-\frac{1}{8}$.

50. Encuentre el producto de $-\frac{5}{6}$, -8, y $-2\frac{1}{10}$.

Encuentre cada potencia.

51. $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$

52. $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$

53. $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$

54. $\left(-1\frac{1}{5}\right)^3$

Divida.

55. $3\frac{1}{3} \div 1\frac{5}{6}$

56. $3\frac{3}{4} \div 5\frac{1}{3}$

57. $-6\frac{3}{5} \div 7\frac{1}{3}$

58. $-4\frac{1}{4} \div 4\frac{1}{2}$

59. $-20\frac{1}{4} \div \left(-1\frac{11}{16}\right)$

60. $-2\frac{7}{10} \div \left(-1\frac{1}{14}\right)$

61. $6\frac{1}{4} \div 20$

62. $4\frac{2}{5} \div 11$

63. $1\frac{2}{3} \div \left(-2\frac{1}{2}\right)$

64. $2\frac{1}{2} \div \left(-1\frac{5}{8}\right)$

65. $8 \div 3\frac{1}{5}$

66. $15 \div 3\frac{1}{3}$

67. Encuentre el cociente de $-4\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{4}$.

68. Calcule el cociente de 25 y $-10\frac{5}{7}$.

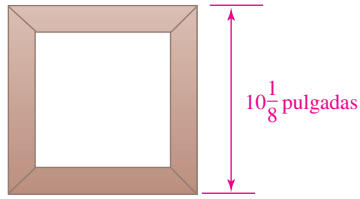
APLICACIONES

69. CALORÍAS Una compañía anuncia que sus mentas contienen sólo $3\frac{1}{5}$ calorías por pieza. ¿Cuál es la ingesta de calorías si se come un paquete completo de 20 piezas?

70. MEZCLADORAS DE CEMENTO Una mezcladora de cemento tiene una capacidad de $9\frac{1}{2}$ yardas cúbicas de concreto. ¿Si realiza 8 viajes a ese lugar de trabajo, cuánto concreto entregara?

71. COMPRAS En la ilustración, ¿cuál es el importe que se pagaría por la fruta en la báscula?

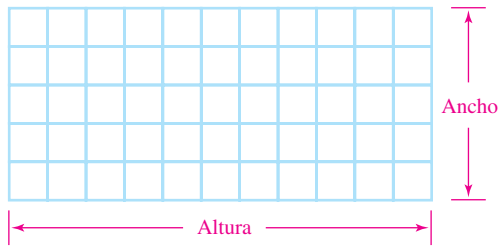
72. MARCOS PARA FOTOGRAFÍAS ¿Qué longitud de madera se debe cortar para fabricar el marco de la ilustración?



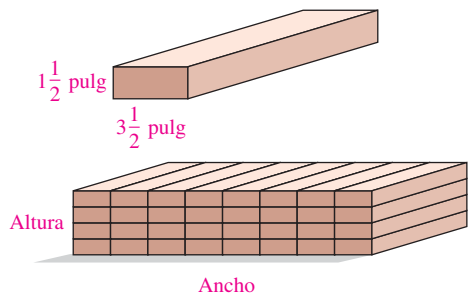
73. ACRES DONADOS Una desarrolladora inmobiliaria donó al condado 100 de los 1,000 acres de tierra que le pertenecían. Dividió la superficie que le quedaba en lotes de $1\frac{1}{3}$-acres. ¿Cuántos lotes resultaron?

74. ABASTECIMIENTO ¿A cuántas personas se les puede servir hamburguesas de $\frac{1}{3}$-libra si un proveedor adquiere 200 libras de carne fresca como materia prima para elaborar las hamburguesas?

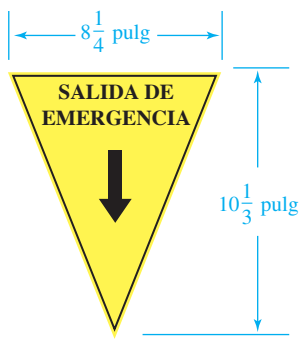
75. PAPEL CUADRICULADO Los *matemáticos* utilizan papel cuadriculado especial para dibujar figuras. Este papel tiene cuadros con una superficie de $\frac{1}{4}$-pulgada cuadrada. Encuentre la longitud y la altura de la hoja de papel cuadriculado que se muestra.



76. PANELES Como se muestra, una pieza de madera que se especifica como panel de madera de 2 por 4 no tiene las dimensiones reales de 2 por 4 pulgadas. ¿Qué anchura y qué altura tiene el conjunto de paneles de 2 por 4?

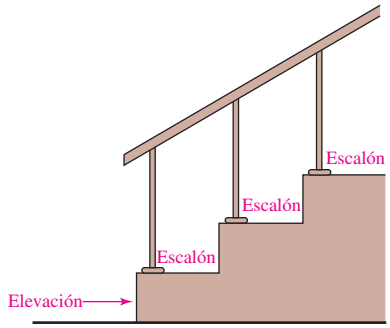


77. SALIDA DE EMERGENCIA A continuación se muestra una señal de salida de emergencia en un autobús escolar. Encuentre el área de la señal.

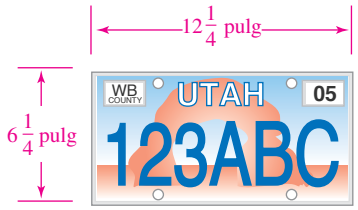


78. CARRERAS DE CABALLOS La pista de carreras donde corren los caballos pura raza está marcada por segmentos de $\frac{1}{8}$-de milla llamados furlongs. ¿Cuántos furlongs hay en $1\frac{1}{16}$-millas?

79. ESCALERAS DE INCENDIO Se muestran las escaleras de incendio en un edificio de oficinas. Cada escalón tiene una altura de $7\frac{1}{2}$ pulgadas. Si cada piso tiene una altura de 105 pulgadas y el edificio tiene 43 pisos, ¿cuántos escalones tiene la escalera?



80. PLACAS Encuentre el área de la placa que se muestra abajo.



81. DE COMPRAS EN INTERNET Una madre está ordenando un par de pantalones vaqueros para su hija desde una página de Internet. Si la altura de la hija es $60\frac{3}{4}$ pulg y su cintura mide $24\frac{1}{2}$ pulg, en que tamaño y en qué corte debería marcar y hacer clic?

Pantalones vaqueros para niña corte regular

Talla	7	8	10	12	14	16
Altura	50-52	52-54	54-56	$56^1/_2$-$58^1/_2$	59-61	61-62
Cintura	$22^1/_4$-$22^3/_4$	$22^3/_4$-$23^1/_4$	$23^3/_4$-$24^1/_4$	$24^3/_4$-$25^1/_4$	$25^3/_4$-$26^1/_4$	$26^1/_4$-28

Pantalones vaqueros para niña corte delgado

Talla	7	8	10	12	14	16
Altura	50-52	52-54	54-56	$56^1/_2$-$58^1/_2$	59-61	61-62
Cintura	$20^3/_4$-$21^1/_4$	$21^1/_4$-$21^3/_4$	$22^1/_4$-$22^3/_4$	$23^1/_4$-$23^3/_4$	$24^1/_4$-$24^3/_4$	25-$26^1/_2$

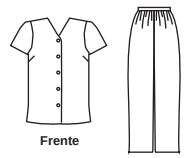
Para ordenar:
Dirija la flecha en la talla/corte apropiado y haga clic

82. COSTURA Utilice la siguiente tabla para determinar el número de yardas necesarias de tela.

a. Para fabricar una blusa talla 16, si la tela tiene un ancho de 60 pulgadas.

b. Para hacer un pantalón talla 18, si la tela tiene un ancho de 45 pulgadas.

Patrón 8767
cose fácil
por McCall's



TALLAS	8	10	12	14	16	18	20	
Blusa								
45"	$2^1/_4$	$2^3/_8$	$2^3/_8$	$2^3/_8$	$2^1/_2$	$2^5/_8$	$2^3/_4$	Yds
60"	2	2	$2^1/_8$	$2^1/_8$	$2^1/_8$	$2^1/_8$	$2^1/_8$	
Pantalón								
45"	$2^5/_8$	$2^5/_8$	$2^5/_8$	$2^5/_8$	$2^5/_8$	$2^5/_8$	$2^5/_8$	Yds
60"	$1^3/_4$	2	$2^1/_4$	$2^1/_4$	$2^1/_4$	$2^1/_4$	$2^1/_2$	

POR ESCRITO

83. Explique la diferencia entre $2\frac{3}{4}$ y $2(\frac{3}{4})$.

84. Dé tres ejemplos que muestren cómo se utilizan los números mixtos en la vida diaria.

85. Explique el procedimiento que se utiliza para escribir una fracción impropia como un número mixto.

86. Explique el procedimiento que se utiliza para multiplicar dos números mixtos.

REPASO

87. Evalúe: $3^2 \cdot 2^3$.

88. Indique los primeros ocho números naturales.

89. Escriba $8 + 8 + 8 + 8$ como una multiplicación.

90. Si la medida de un cuadro es de 1 pulgada por lado, ¿cuál es su área?

91. Simplifique: $\frac{115}{25}$.

92. Multiplique: $\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{35}{14}\right)$.

3.6 Suma y resta de números mixtos

- Suma de números mixtos
- Suma de números mixtos en forma vertical
- Resta de números mixtos

En esta sección, consideraremos los métodos que rigen la suma y resta de los números mixtos. El primer método funciona bien cuando las partes enteras de los números

mixtos son pequeñas. El segundo método trabaja bien cuando las partes enteras del número mixto son grandes. El tercer método utiliza columnas como una forma de organizar el trabajo.

Suma de números mixtos

Podemos sumar números mixtos escribiéndolos como fracciones impropias. Para realizarlo, seguiremos los pasos siguientes.

Suma de números mixtos: método 1

1. Se escribe cada número mixto como una fracción impropia.
2. Se escribe cada fracción impropia como una fracción equivalente con un denominador que sea el mcd.
3. Se suman las fracciones.
4. Se cambia el resultado a un número mixto si así lo desea.

Autoevaluación 1

Sume: $3\frac{2}{3} + 1\frac{1}{5}$

EJEMPLO 1

Sume: $4\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4}$.

Solución

$4\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4} = \frac{25}{6} + \frac{11}{4}$ Se escribe cada número mixto como una fracción impropia: $4\frac{1}{6} = \frac{25}{6}$ y $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

Por inspección, se observa que el mínimo común denominador es 12.

$= \frac{25 \cdot 2}{6 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 3}{4 \cdot 3}$ Se escribe cada fracción como una fracción con un denominador 12.

$= \frac{50}{12} + \frac{33}{12}$ Se realizan las multiplicaciones de los numeradores y denominadores.

$= \frac{83}{12}$ Se suman los numeradores: $50 + 33 = 83$. Se escribe la suma sobre el denominador común 12.

$= 6\frac{11}{12}$ Se escribe la fracción impropia como un número mixto: $\frac{83}{12} = 6\frac{11}{12}$.

Respuesta $4\frac{13}{15}$

También podemos sumar números mixtos al sumar sus partes enteras y sus partes fraccionarias. Para esto, seguimos los siguientes pasos.

Suma de números mixtos: método 2

1. Se escribe cada número mixto como la suma de un número entero y de una fracción.
2. Se utiliza la propiedad conmutativa de la suma para escribir los números enteros juntos y las fracciones juntas.
3. Se suman los números enteros y las fracciones en forma independiente.
4. Se escribe el resultado como un número mixto si fuera necesario.

Autoevaluación 2

Encuentre la suma: $275\frac{1}{6} + 81\frac{3}{5}$.

EJEMPLO 2

Encuentre la suma: $168\frac{3}{4} + 85\frac{1}{5}$.

Solución

$$168\frac{3}{4} + 85\frac{1}{5} = 168 + \frac{3}{4} + 85 + \frac{1}{5}$$ Se escribe cada número mixto como la suma de un entero y de una fracción.

$$= 168 + 85 + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$$ Se utiliza la propiedad conmutativa de la suma para cambiar el orden de la suma.

$$= 253 + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$$ Se suman los números enteros: 168 + 85 = 253.

$$= 253 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4}$$ Se escribe cada fracción como una fracción con denominador 20.

$$= 253 + \frac{15}{20} + \frac{4}{20}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= 253 + \frac{19}{20}$$ Se suman los numeradores y se escribe la suma sobre el común denominador 20.

$$= 253\frac{19}{20}$$ Se escribe la suma como un número mixto.

Respuesta $356\frac{23}{30}$

COMENTARIO Si utilizamos el método 1 para sumar los números mixtos del ejemplo 2, los números que encontramos son molestos o difíciles de manejar. Como era de esperarse, el resultado es el mismo: $253\frac{19}{20}$.

$$168\frac{3}{4} + 85\frac{1}{5} = \frac{675}{4} + \frac{426}{5}$$ Se escribe $168\frac{3}{4}$ y $85\frac{1}{5}$ como fracciones impropias.

$$= \frac{675 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{426 \cdot 4}{5 \cdot 4}$$ El mcd es 20.

$$= \frac{3375}{20} + \frac{1704}{20}$$

$$= \frac{5079}{20}$$

$$= 253\frac{19}{20}$$

Por lo general, cuanto más grande sea la parte de un número entero de los números mixtos, tanto más difícil se hace el sumar los números mixtos utilizando el método 1.

Suma de números mixtos en forma vertical

Al trabajar en columnas, podemos sumar números mixtos de forma más rápida. La estrategia es la misma que en el ejemplo 2: sume los números enteros a los números enteros, y sume las fracciones a las fracciones.

Se alinean verticalmente los números mixtos.

Se aplica la propiedad fundamental de las fracciones para obtener el mcd.

Se suman los números enteros y las fracciones, cada uno por separado.

$$\begin{array}{rcccc} 25\frac{3}{4} & = & 25\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} & = & 25\frac{15}{20} \\ +31\frac{1}{5} & = & +31\frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} & = & +31\frac{4}{20} \\ \hline & & & & 56\frac{19}{20} \end{array}$$

EJEMPLO **Puentes colgantes.** Calcule la longitud total del cable que debe ordenarse si se van a reemplazar los cables a, d y e del puente colgante de la figura 3.10. (Vea la tabla siguiente).

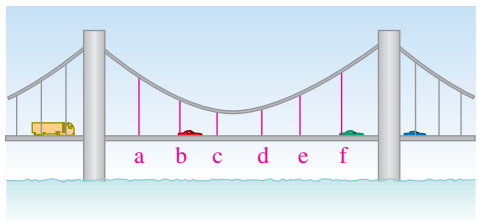


FIGURA 3.10

ESPECIFICACIONES DEL PUENTE			
Cable	a	b	c
Longitud (pies)	$75\frac{1}{12}$	$54\frac{1}{6}$	$43\frac{1}{4}$

Solución Para encontrar la longitud total del cable que se va a ordenar, sumamos las longitudes de los cables de a, d y e. Debido al diseño simétrico, los cables d y c y los cables e y b tienen la misma longitud.

Longitud del cable	más	longitud del cable d (o cable c)	más	longitud del cable e (o cable b)	igual a	la longitud total necesaria.

$$75\frac{1}{12} + 43\frac{1}{4} + 54\frac{1}{6} = \text{longitud total}$$

Sumamos los números mixtos utilizando el formato vertical.

$$\begin{aligned} 75\frac{1}{12} &= 75\frac{1}{12} &&= 75\frac{1}{12} \\ 43\frac{1}{4} &= 43\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3} &&= 43\frac{3}{12} \\ +54\frac{1}{6} &= +54\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2} &&= +54\frac{2}{12} \\ & & & 172\frac{6}{12} = 172\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Simplificando: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

La longitud total de cable necesario para remplazarlo es $172\frac{1}{2}$ pies.

Cuando sumamos números mixtos, la suma de las fracciones algunas veces produce una fracción impropia, como en el siguiente ejemplo.

Autoevaluación 4

Sume: $76\frac{11}{12} + 49\frac{5}{8}$

EJEMPLO 4 Sume: $45\frac{2}{3} + 96\frac{4}{5}$.

Solución

$$\begin{aligned} 45\frac{2}{3} &= 45\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} &&= 45\frac{10}{15} \\ +96\frac{4}{5} &= +96\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3} &&= +96\frac{12}{15} \\ & & & 141\frac{22}{15} \end{aligned}$$

La parte del número entero de la respuesta

La parte fraccionaria de la respuesta es una fracción impropia.

Ahora escriba la fracción impropia como un número mixto.

$$141\frac{22}{15} = 141 + \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{15}} = 141 + \mathbf{1}\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}} = 142\frac{7}{15}$$

Respuesta $126\frac{13}{24}$

Resta de números mixtos

La resta de números mixtos es similar a la suma de números mixtos.

EJEMPLO 5 **Cocina.** ¿Cuánta mantequilla queda de un tubo de 10 libras si se utilizan $2\frac{2}{3}$ de libras para elaborar un pastel de bodas?

Solución La frase "¿Cuánta queda?" sugiere una resta.

$$10 - 2\frac{2}{3} = \frac{10}{1} - \frac{8}{3}$$ Se escribe 10 como fracción: $10 = \frac{10}{1}$. Se escribe $2\frac{2}{3}$ como $\frac{8}{3}$.

Por inspección, vemos que el mcd es 3.

$$\frac{10}{1} - 2\frac{2}{3} = \frac{10 \cdot \mathbf{3}}{1 \cdot \mathbf{3}} - \frac{8}{3}$$ Se escribe la primera fracción con denominador 3.

$$= \frac{30}{3} - \frac{8}{3}$$ Se realizan las multiplicaciones en la primera fracción.

$$= \frac{30 - 8}{3}$$ Se restan los numeradores y se escribe la diferencia sobre el común denominador.

$$= \frac{22}{3}$$ Se realiza la resta: $30 - 8 = 22$.

$$= 7\frac{1}{3}$$ Se escribe $\frac{22}{3}$ como número mixto.

Quedan $7\frac{1}{3}$ libras de mantequilla en el tubo.

En el siguiente ejemplo, la fracción $\frac{1}{5}$ es menor que $\frac{2}{3}$. Debido a esto, tenemos que pedir prestado.

EJEMPLO 6 Reste: $34\frac{1}{5} - 11\frac{2}{3}$.

Solución Utilizaremos la forma vertical para restar. El mcd es 15, así que escribimos cada fracción como una fracción con denominador 15.

$$34\frac{1}{5} = 34\frac{1 \cdot \mathbf{3}}{5 \cdot \mathbf{3}} = 34\frac{3}{15}$$

$$-11\frac{2}{3} = -11\frac{2 \cdot \mathbf{5}}{3 \cdot \mathbf{5}} = -11\frac{10}{15}$$

Autoevaluación 6

Reste: $101\frac{3}{4} - 79\frac{15}{16}$

Como $\frac{10}{15}$ es mayor que $\frac{3}{15}$, tomamos 1 (en la forma de $\frac{15}{15}$) de 34 y lo sumamos a $\frac{3}{15}$ para obtener $33\frac{3}{15} + \frac{15}{15} = 33\frac{18}{15}$. Después restamos las fracciones y los números enteros por separado.

$$\begin{array}{rcl} 33\frac{3}{15} + \frac{15}{15} & = & 33\frac{18}{15} \\ \underline{-11\frac{10}{15}} & = & \underline{-11\frac{10}{15}} \\ & & 22\frac{8}{15} \end{array}$$

Respuesta $21\frac{13}{16}$

Autoevaluación 7

Reste: $2300 - 129\frac{31}{32}$.

Respuesta $2170\frac{1}{32}$

EJEMPLO 7

Reste: $419 - 53\frac{11}{16}$.

Solución Alineamos los números verticalmente y prestamos 1 (en la forma $\frac{16}{16}$) de 419. Después restamos las fracciones y sustraemos los números enteros por separado.

$$\begin{array}{rcl} 419 & = & 418\frac{16}{16} \\ \underline{-53\frac{11}{16}} & = & \underline{-53\frac{11}{16}} \\ & & 365\frac{5}{16} \end{array}$$

Sección 3.6 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Por la propiedad _____ de la adición o suma, podemos sumar números en cualquier orden.
2. Un número _____ como $1\frac{7}{8}$ contiene una parte entera y una parte fraccionaria.
3. Considere

$$\begin{array}{rcl} 80\frac{1}{3} & = & 79\frac{1}{3} + \frac{3}{3} \\ \underline{-24\frac{2}{3}} & = & \underline{-24\frac{2}{3}} \end{array}$$

Para realizar la sustracción, debemos _____ 1 en la forma de $\frac{3}{3}$.

4. Las fracciones mayores que 1, como $\frac{11}{8}$, se llaman fracciones _____.

CONCEPTOS

5. **a.** Para el caso de $76\frac{3}{4}$, indique la parte entera y la parte fraccionaria.
   b. Escriba $76\frac{3}{4}$ como una suma.
6. Utilice la propiedad conmutativa de la adición o suma para poner juntos los números enteros.

$$14 + \frac{5}{6} + 53 + \frac{1}{6}$$

7. ¿Qué propiedad esta resaltada en el siguiente ejercicio?

$$\begin{array}{rcl} & & 25\frac{3 \cdot \mathbf{5}}{4 \cdot \mathbf{5}} \\ \underline{+} & & \underline{+31\frac{1 \cdot \mathbf{4}}{5 \cdot \mathbf{4}}} \end{array}$$

8. **a.** Los denominadores de dos fracciones, expresadas en la forma de factores primos, son $5 \cdot 2$ y $5 \cdot 3$. Encuentre el mcd para las fracciones.
   b. Los denominadores de tres fracciones en forma de factores primos, son $3 \cdot 5$, $2 \cdot 3$, y $3 \cdot 3$. Encuentre el mcd para las fracciones.
9. Simplifique.
   a. $9\frac{17}{16}$ **b.** $1288\frac{7}{3}$
   c. $16\frac{12}{8}$ **d.** $45\frac{24}{20}$

10. Considere

$$\begin{array}{r} 108\frac{1}{3} \\ -\ 99\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

a. Explique por qué tenemos que pedir prestado si restamos números mixtos de esta manera.

b. ¿De qué forma pediremos prestado un 1 de 108?

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

11. $70\frac{3}{5} + 39\frac{2}{7} = \square + \frac{3}{5} + \square + \frac{2}{7}$

$= \square + \square + \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

$= 109 + \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

$= 109 + \frac{3 \cdot \square}{5 \cdot \square} + \frac{2 \cdot \square}{7 \cdot \square}$

$= 109 + \frac{21}{\square} + \frac{10}{\square}$

$= 109 + \frac{\square}{35}$

$= 109\frac{31}{35}$

12. $67\frac{3}{8} = 67\frac{3 \cdot \square}{8 \cdot \square} =$

$\underline{-23\frac{2}{3} = -23\frac{2 \cdot \square}{3 \cdot \square} =}$

$67\frac{9}{24} = \square\ \frac{9}{24} + \frac{\square}{\square} = 66\frac{\square}{24}$

$\underline{-23\frac{16}{24} = -23\frac{16}{24}} \qquad \underline{= -23\frac{16}{24}}$

$43\frac{\square}{24}$

PRÁCTICA *Encuentre cada suma o diferencia.*

13. $2\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5}$

14. $3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$

15. $8\frac{2}{7} - 3\frac{1}{7}$

16. $9\frac{5}{11} - 6\frac{2}{11}$

17. $3\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4}$

18. $2\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8}$

19. $4\frac{1}{6} + 1\frac{1}{5}$

20. $2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}$

21. $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$

22. $13\frac{5}{6} - 4\frac{2}{3}$

23. $2\frac{5}{6} - 1\frac{3}{8}$

24. $4\frac{5}{9} - 2\frac{1}{6}$

25. $5\frac{1}{2} + 3\frac{4}{5}$

26. $6\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$

27. $7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{7}$

28. $5\frac{3}{4} - 1\frac{3}{7}$

29. $56\frac{2}{5} + 73\frac{1}{3}$

30. $44\frac{3}{8} + 66\frac{1}{5}$

31. $380\frac{1}{6} + 17\frac{1}{4}$

32. $103\frac{1}{2} + 210\frac{2}{5}$

33. $228\frac{5}{9} + 44\frac{2}{3}$

34. $161\frac{7}{8} + 19\frac{1}{3}$

35. $778\frac{5}{7} - 155\frac{1}{3}$

36. $339\frac{1}{2} - 218\frac{3}{16}$

37. $140\frac{5}{6} - 129\frac{4}{5}$

38. $291\frac{1}{4} - 289\frac{1}{12}$

39. $422\frac{13}{16} - 321\frac{3}{8}$

40. $378\frac{3}{4} - 277\frac{5}{8}$

Encuentre cada una de las diferencias.

41. $16\frac{1}{4} - 13\frac{3}{4}$

42. $40\frac{1}{7} - 19\frac{6}{7}$

43. $76\frac{1}{6} - 49\frac{7}{8}$

44. $101\frac{1}{4} - 70\frac{1}{2}$

45. $140\frac{3}{16} - 129\frac{3}{4}$

46. $211\frac{1}{3} - 8\frac{3}{4}$

47. $334\frac{1}{9} - 13\frac{5}{6}$

48. $442\frac{1}{8} - 429\frac{2}{3}$

Determine la suma o diferencia.

49. $7 - \frac{2}{3}$

50. $6 - \frac{1}{8}$

51. $9 - 8\frac{3}{4}$

52. $11 - 10\frac{4}{5}$

53. $4\frac{1}{7} - \frac{4}{5}$

54. $5\frac{1}{10} - \frac{4}{5}$

55. $6\frac{5}{8} - 3$

56. $10\frac{1}{2} - 6$

57. $\frac{7}{3} + 2$

58. $\frac{9}{7} + 3$

59. $2 + 1\frac{7}{8}$

60. $3\frac{3}{4} + 5$

Encuentre cada suma.

61. $12\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4} + 35\frac{1}{6}$

62. $31\frac{1}{3} + 20\frac{2}{5} + 10\frac{1}{15}$

63. $58\frac{7}{8} + 340 + 61\frac{1}{4}$

64. $191 + 233\frac{1}{16} + 16\frac{5}{8}$

65. Reste $9\frac{1}{10}$ de la suma de $7\frac{3}{7}$ y $3\frac{1}{5}$.

66. Reste $3\frac{2}{3}$ de la suma de $2\frac{5}{12}$ y $1\frac{5}{8}$.

67. Sume $12\frac{11}{12}$ a la diferencia de $5\frac{1}{6}$ y $3\frac{7}{8}$.

68. Sume $18\frac{1}{3}$ a la diferencia de $11\frac{3}{5}$ y $9\frac{11}{15}$.

Encuentre cada suma o diferencia.

69. $-3\frac{3}{4} + \left(-1\frac{1}{2}\right)$

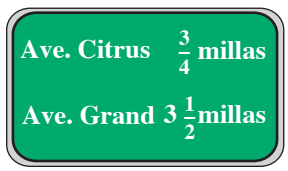
70. $-3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$

71. $-4\frac{5}{8} - 1\frac{1}{4}$

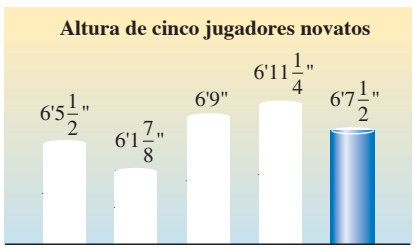
72. $-2\frac{1}{16} - 3\frac{7}{8}$

APLICACIONES

73. VIAJE POR LA AUTOPISTA
A continuación se muestra una señal de salida de la carretera. ¿Cuán lejos se hallan la Ave. Citrus y Ave. Grand una de otra?



74. BASKETBALL Observe la ilustración. ¿Cuál es la diferencia de altura entre el jugador más alto y el jugador más bajo?



75. LA MEZCLA Ver la receta. En un campamento se dobla la cantidad de semillas de girasol que pide la receta. ¿Qué cantidad de la mezcla se obtendrá con este ajuste de la receta?

Mezcla

Un bocadillo saludable para viajes de campamento

- $2\frac{3}{4}$ tazas de cacahuates
- $\frac{1}{3}$ taza de coco
- $\frac{1}{2}$ taza de semillas de girasol
- $2\frac{2}{3}$ hojuelas de avena
- $\frac{2}{3}$ taza de ciruelas pasas
- $\frac{1}{4}$ galletas

76. VIAJE AÉREO El vuelo de una mujer de negocios sale de los Ángeles a las 8.00 a.m. y llega a Seattle a las 9:45 a.m.

a. Exprese la duración del vuelo como número mixto.

b. A la llegada, aborda otro avión a las 11.15 a.m. y llega a su destino final a las 11.45 a.m. Exprese la duración de este vuelo como fracción.

c. Calcule el tiempo total de ambos vuelos.

77. REPARACIÓN DE MANGUERAS Para reparar un conector defectuoso Ming Lin quita $1\frac{1}{2}$ del extremo de una manguera de jardín de 50 pies. ¿Qué longitud tiene la manguera después de haberla reparado?

78. COSTURA Para elaborar unas cortinas, Liz necesita $12\frac{1}{4}$ yardas de material para el cuarto de estudio y $8\frac{1}{2}$ para la sala. Si el material viene en rollos de 21 yardas, ¿cuánto le habrá quedado después de confeccionar las dos cortinas?

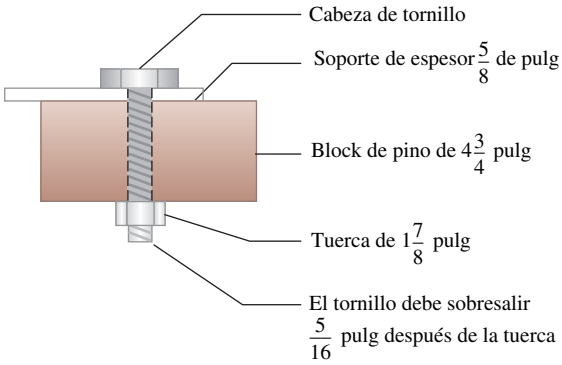
79. EMBARCACIÓN Un barco de pasajeros y uno de carga salieron de la Bahía de San Diego a la media noche. Durante la primera hora la embarcación de pasajeros navegó al sur a $16\frac{1}{2}$ millas por hora, mientras que el carguero navegó hacia el norte a razón de $5\frac{1}{5}$ millas por hora.

a. Complete la siguiente tabla.

b. ¿Qué distancia hay entre ellos a la 1:00 a.m.?

	Promedio · (mph)	Tiempo de viaje = (h)	Distancia recorrida (mi)
Barco de pasajeros		1	
Buque de carga		1	

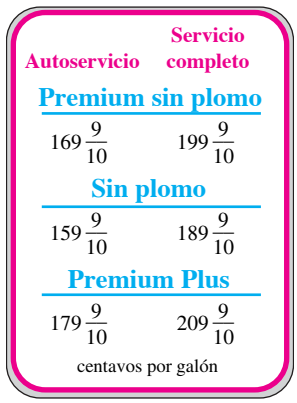
80. FERRETERÍA Observe la siguiente ilustración, ¿Cuál deberá ser la longitud de la parte con roscas del tornillo?


Cabeza de tornillo
Soporte de espesor $\frac{5}{8}$ de pulg
Block de pino de $4\frac{3}{4}$ pulg
Tuerca de $1\frac{7}{8}$ pulg
El tornillo debe sobresalir $\frac{5}{16}$ pulg después de la tuerca

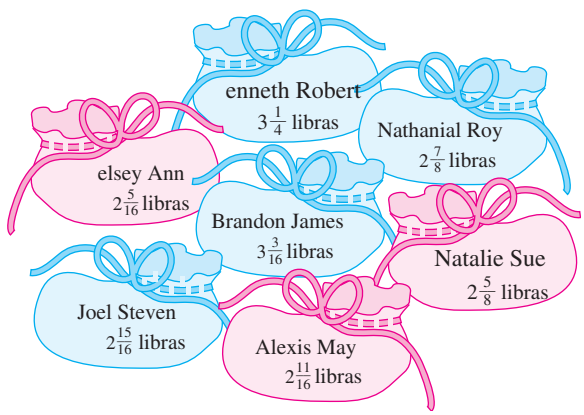
81. ESTACIÓN DE SERVICIO Utilice el letrero de la estación de servicio para responder las preguntas.

a. ¿Cuál es la diferencia en el precio entre los tipos más baratos y más caros de gasolina que se venden en la estación de servicio?

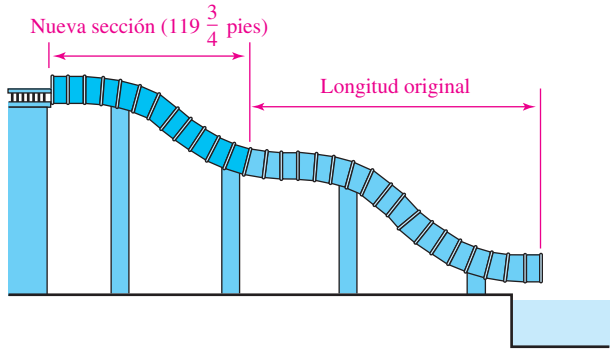
b. ¿Cuánto más es el costo por galón en el servicio completo?



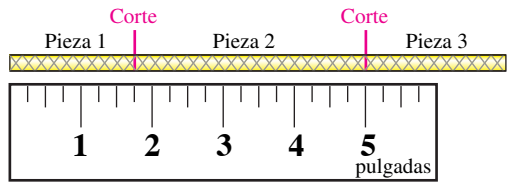
82. SEPTILLIZOS En noviembre 19 de 1977, en el Centro Médico Metodista de Iowa, Bobbie McCaughey tuvo siete bebés. A partir de la siguiente información, encuentre los pesos combinados de los bebés.



83. TOBOGÁN ACUÁTICO En un parque de diversiones se añadió una nueva sección a un tobogán acuático para obtener una longitud de $311\frac{5}{12}$ ¿Cuánto medía el tobogán antes de la ampliación?



84. JOYERÍA Un joyero va a cortar una barra de oro de 7 pulgadas de largo en tres piezas. Para esto hace coincidir una regla de 6 pulgadas de largo y la coloca justo debajo de la barra y realiza los cortes apropiados. Encuentre la longitud de la segunda barra.



POR ESCRITO

85. De los métodos estudiados para sumar números mixtos, ¿cuál piensa que es mejor y por qué?

86. En el proceso de resta de números mixtos, ¿cuándo se tiene que pedir prestado?, ¿cómo se hace?

87. Explique como sumar $1\frac{3}{8}$ y $2\frac{1}{4}$ si se escribe cada uno como una fracción impropia.

88. Explique el proceso de simplificar $12\frac{16}{5}$.

REPASO

89. Encuentre la media (promedio) de 36, 48 y 72.

90. Multiplique: $-3(-4)(-5)$.

91. Sume: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

92. ¿Qué fracción es mayor: $\frac{11}{13}$ o $\frac{6}{7}$?

93. Reste: $-2 - (-8)$.

94. Encuentre el área de un triangulo que tiene una base de 6 pulgadas de largo y una altura de 8 pulgadas.

95. ¿Qué mide el área?

96. Evalúe: $|-12|$.

3.7 Orden de las operaciones y fracciones complejas

- Orden de las operaciones • Evaluación de fórmulas • Fracciones complejas
- Simplificación de fracciones complejas

En esta sección calcularemos las expresiones que contienen fracciones y números mixtos. También consideramos las fracciones complejas y veremos cómo simplificarlas.

Orden de las operaciones

Las reglas para definir el orden de las operaciones (consideradas en la sección 1.7) se utilizan para evaluar expresiones numéricas que contienen más de una operación).

Autoevaluación 1

Calcule: $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2$.

Respuesta $\frac{31}{32}$

EJEMPLO 1 Evalúe: $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

Solución La expresión incluye operaciones de elevar a una potencia, multiplicación y suma. De acuerdo con las reglas del orden de las operaciones, primero debemos evaluar la potencia, la multiplicación se realiza en segundo lugar y por último la suma.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}}=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\right)$$ Se encuentra la potencia: $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$.

$$=\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{24}\right)$$ Se realiza la multiplicación: $\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{5}{24}$.

$$=\frac{3\cdot\mathbf{6}}{4\cdot\mathbf{6}}+\left(-\frac{5}{24}\right)$$ El mcd es 24. Se escribe primero la fracción como una fracción con un denominador 24.

$$=\frac{18}{24}+\left(-\frac{5}{24}\right)$$ Se multiplica el numerador: $3\cdot 6=18$. Se multiplica el denominador: $4\cdot 6=24$.

$$=\frac{13}{24}$$ Se suman los numeradores: $18+(-5)=13$. Se escribe la suma sobre el común denominador.

Si una expresión contiene símbolos de agrupación, primero se realizan las operaciones que se encuentran dentro de los símbolos de agrupación.

EJEMPLO 2 Evalúe: $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\right)\div\left(-2\frac{3}{16}\right)$.

Solución $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\right)\div\left(-2\frac{3}{16}\right)=\left(\frac{7}{8}-\frac{1\cdot\mathbf{2}}{4\cdot\mathbf{2}}\right)\div\left(-2\frac{3}{16}\right)$

Dentro del primer grupo de paréntesis, se escribe $\frac{1}{4}$ como una fracción con un denominador de 8.

$$=\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{8}\right)\div\left(-2\frac{3}{16}\right)$$

Se multiplica en el numerador: $1\cdot 2=2$. Se multiplica en el denominador: $4\cdot 2=8$.

$$= \frac{5}{8} \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$$ Se realiza la resta en los numeradores y se escribe la diferencia sobre el común denominador: $7 - 2 = 5$.

$$= \frac{5}{8} \div \left(-\frac{35}{16}\right)$$ Se escribe el número mixto como una fracción impropia.

$$= \frac{5}{8}\left(-\frac{16}{35}\right)$$ Se multiplica por el recíproco de $-\frac{35}{16}$.

$$= -\frac{5 \cdot 16}{8 \cdot 35}$$ El producto de dos fracciones con signos distintos es negativo. Se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}$$ Se factoriza 16 como $2 \cdot 8$ y 35 como $5 \cdot 7$. Se dividen los factores comunes de 8 y 5.

$$= -\frac{2}{7}$$ Se simplifica.

Evaluación de fórmulas

Para evaluar una formula, reemplazamos sus letras con números específicos y simplificamos aplicando las reglas que determinan el orden de las operaciones.

EJEMPLO 3 La fórmula para el área de un trapecio es $A = \frac{1}{2}h(a + b)$, donde A es el área, h la altura, a y b son las longitudes de sus bases. Encuentre A cuando $h = 1\frac{2}{3}$, $a = 2\frac{1}{2}$, y $b = 5\frac{1}{2}$.

Solución

$$A = \frac{1}{2}h(a + b)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1\frac{2}{3}\right)\left(2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}\right)$$ Se reemplaza h, a, y b con los valores dados.

$$= \frac{1}{2}\left(1\frac{2}{3}\right)(8)$$ Se realiza la suma dentro del paréntesis.: $2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 8$.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$$ Se escribe $1\frac{2}{3}$ como una fracción impropia y 8 como $\frac{8}{1}$.

$$= \frac{1 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 1}$$ Se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$= \frac{1 \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 4}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot 1}$$ Se factoriza 8 como $2 \cdot 4$ y se divide (cancela) el factor común de 2.

$$= \frac{20}{3}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y en el denominador.

$$= 6\frac{2}{3}$$ Se escribe $\frac{20}{3}$ como un número mixto.

El área del trapecio es $6\frac{2}{3}$ unidades cuadradas.

Autoevaluación 3

La formula para el área del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$. Encuentre el área de un triángulo cuya base sea $12\frac{1}{2}$ metros de largo y cuya altura es de $15\frac{1}{3}$.

Respuesta $95\frac{5}{6}\ \text{m}^2$

EJEMPLO 4 **Mampostería.** Para construir un muro, un albañil utilizará ladrillos que tienen una altura de $5\frac{3}{4}$ pulgadas, los ladrillos se unen con capas de cemento de $\frac{3}{8}$ de espesor (ver la figura 3.11). Si los planos requieren 8 capas de ladrillos, ¿cuál será la altura del muro cuando esté terminado?

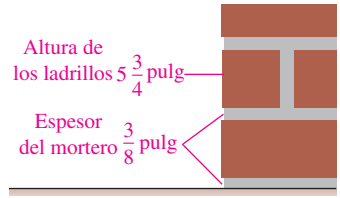


FIGURA 3.11

Solución Para encontrar la altura, debemos considerar 8 capas de ladrillos y 8 capas de cemento. Primero calculamos la altura de una capa de ladrillo y de una capa de cemento, y después multiplicamos ese resultado por 8.

8 veces	(altura de 1 ladrillo	más	la altura de 1 capa de cemento)	igual	altura del muro

$$8\left(5\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)=8\left(\frac{23}{4}+\frac{3}{8}\right)$$ Se escribe $5\frac{3}{4}$ como una fracción impropia $\frac{23}{4}$.

$$=8\left(\frac{23\cdot 2}{4\cdot 2}+\frac{3}{8}\right)$$ Se expresa $\frac{23}{4}$ en términos de octavos.

$$=8\left(\frac{46}{8}+\frac{3}{8}\right)$$ Se realiza la multiplicación de los numeradores y denominadores.

$$=\frac{8}{1}\left(\frac{49}{8}\right)$$ Se escribe 8 como $\frac{8}{1}$. Dentro del paréntesis, se escribe la suma de los numeradores sobre el común denominador de 8.

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{8}}\cdot 49}{1\cdot \underset{1}{\cancel{8}}}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores. Se divide el factor común de 8.

$$=49$$ Se simplifica: $\frac{49}{1}=49$.

El muro tendrá una altura de 49 pulgadas.

Fracciones complejas

Las fracciones cuyos numeradores y/o denominadores contienen fracciones se llaman *fracciones complejas*. He aquí un ejemplo:

Una fracción en el numerador ⟶ $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}$ ⟵ La barra fraccionaria principal

Una fracción en el denominador ⟶

Fracción compleja

Una **fracción compleja** es una fracción cuyo numerador o denominador, o ambos, contienen una o más fracciones o números mixtos.

Aquí hay más ejemplos de fracciones complejas.

$$\frac{-\frac{1}{4}-\frac{4}{5}}{2\frac{4}{5}} \qquad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$$

⟵ Numerador ⟶
⟵ Barra fraccionaria principal ⟶
⟵ Denominador ⟶

Simplificación de fracciones complejas

Simplificar fracciones complejas significa expresarlas como fracciones en forma simplificada.

Simplificación de una fracción compleja

Se escribe el numerador y el denominador de la fracción compleja como una fracción simple. Después se realiza la división que se indica en ambas fracciones y se simplifica.

Este método se basa en el hecho de que la barra fraccionaria principal de una fracción compleja indica división.

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$$ ← La barra fraccionaria principal significa "divide la fracción en el numerador entre la fracción en el denominador." → $\frac{1}{4} \div \frac{2}{5}$

EJEMPLO 5

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$.

Solución Como el numerador y el denominador de esta fracción compleja son fracciones simples, se puede realizar la división indicada.

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4} \div \frac{2}{5}$$ Se expresa la fracción compleja como un problema de división equivalente.

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}$$ Se multiplica por el reciproco de $\frac{2}{5}$.

$$= \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{5}{8}$$

Autoevaluación 5

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}$

Respuesta $\frac{4}{9}$

EJEMPLO 6

Simplifique: $\dfrac{-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{5}}$.

Solución Necesitamos escribir el numerador y el denominador de la fracción compleja como fracciones simples. Para hacerlo, encontramos que $-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$.

$$\frac{-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4}}{\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2}}$$ En el numerador de la fracción compleja, se expresan las dos fracciones en términos de su mcd, que es 20. En el denominador, se expresan las dos fracciones en términos de su mcd, que es 10.

$$= \frac{-\frac{5}{20} + \frac{8}{20}}{\frac{5}{10} - \frac{8}{10}}$$ Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{\frac{3}{20}}{-\frac{3}{10}}$$ En el numerador de la fracción compleja, se suman las fracciones. En el denominador, se restan las fracciones.

$$= \frac{3}{20} \div \left(-\frac{3}{10}\right)$$ Se expresa la fracción compleja como un problema de división equivalente.

$$= \frac{3}{20}\left(-\frac{10}{3}\right)$$ Se multiplica por el recíproco de $-\frac{3}{10}$.

$$= -\frac{3 \cdot 10}{20 \cdot 3}$$ El producto de dos fracciones con signos distintos es negativo. Se realizan las multiplicaciones en los numeradores y en los denominadores.

$$= -\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{10}}}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{10}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}}$$ Se factoriza 20 como $2 \cdot 10$. Se dividen (cancelan) los factores comunes, 3 y 10.

$$= -\frac{1}{2}$$ Se simplifica.

Autoevaluación 7

Simplifique: $\dfrac{5 - \frac{3}{4}}{1\frac{7}{8}}$

EJEMPLO 7

Simplifique: $\dfrac{7 - \frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}}$.

Solución Para escribir el numerador de una fracción compleja como una fracción simple, necesitamos encontrar $7 - \frac{2}{3}$. Para escribir el denominador de la fracción compleja como una fracción simple, necesitamos escribir $4\frac{5}{6}$ como una fracción impropia..

$$\frac{7 - \frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}} = \frac{\frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3}}{\frac{29}{6}}$$ En el numerador de la fracción compleja, se escribe 7 como $\frac{7}{1}$. Después se expresa $\frac{7}{1}$ en términos de tercios. En el denominador, se escribe $4\frac{5}{6}$ como la fracción impropia $\frac{29}{6}$.

$$= \frac{\frac{21}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{29}{6}}$$ Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= \frac{\frac{19}{3}}{\frac{29}{6}}$$ Se restan las fracciones en el numerador de la fracción compleja,

$$= \frac{19}{3} \div \frac{29}{6}$$ Se expresa la fracción compleja como un problema de división equivalente.

$$= \frac{19}{3} \cdot \frac{6}{29}$$ Se multiplica por el recíproco de $\frac{29}{6}$.

$$= \frac{19 \cdot 6}{3 \cdot 29}$$ Se multiplican los numeradores. Se multiplican los denominadores.

$$= \frac{19 \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 29}$$ Se factoriza 6 como $2 \cdot 3$. Se divide el factor común de 3.

$$= \frac{38}{29}$$ Se simplifica.

$$= 1\frac{9}{29}$$ Se escribe $\frac{38}{29}$ como un número mixto.

Respuesta $2\frac{4}{15}$

Sección 3.7 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ es una fracción _____.

2. Para evaluar la formula como $A = \frac{1}{2}h(a + b)$, sustituimos _____ específicos por letras en la fórmula y la simplificamos.

CONCEPTOS

3. ¿Qué división esta representada por la siguiente fracción compleja?

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}}$$

4. Escriba la siguiente división como una fracción compleja.

$$-\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}$$

5. ¿Cuál es el mcd para las fracciones en el numerador de esta fracción compleja?

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}}$$

6. Escriba el denominador de esta fracción compleja como una fracción impropia.

$$\frac{\frac{1}{8} - \frac{3}{16}}{5\frac{3}{4}}$$

7. Cuando esta fracción compleja se simplifica, ¿el resultado será positivo o negativo?

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

8. Para evaluar $\frac{7}{8} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$, ¿qué operación deberá realizarse primero?

9. Para evaluar $\frac{7}{8} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2$, ¿que operación deberá efectuarse primero?

10. ¿Qué operaciones están incluidas en esta expresión numérica?

$$5\left(6\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

NOTACIÓN *Complete cada proceso.*

11.
$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8} \div \square$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \square$$
$$= \frac{1 \cdot \square}{8 \cdot 3}$$
$$= \frac{1 \cdot \cancel{\square}^{1}}{2 \cdot \cancel{\square}_{1} \cdot 3}$$
$$= \frac{1}{6}$$

12.
$$\frac{1}{12} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot \square}$$
$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{\square}$$
$$= \frac{1}{12} - \frac{1 \cdot \square}{6 \cdot \square}$$
$$= \frac{1}{12} - \frac{\square}{12}$$
$$= -\frac{1}{12}$$

PRÁCTICA *Evalúe cada expresión*

13. $\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$

14. $-\frac{7}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

15. $\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

16. $-\frac{3}{16} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

17. $-4\left(-\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

18. $(-3)\left(-\frac{2}{3}\right) - (-4)\left(-\frac{3}{4}\right)$

19. $1\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$

20. $2\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$

21. $\frac{7}{8} - \left(\frac{4}{5} + 1\frac{3}{4}\right)$

22. $\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6}\right)$

23. $\left(\frac{9}{20} \div 2\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

24. $\left(1\frac{2}{3} \cdot 15\right) + \left(\frac{7}{9} \div \frac{7}{81}\right)$

25. $\left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)$

26. $\left(\frac{8}{5} - 1\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{4}{5} \cdot 10\right)$

27. $\left|\frac{2}{3} - \frac{9}{10}\right| \div \left(-\frac{1}{5}\right)$

28. $\left|-\frac{3}{16} \div 2\frac{1}{4}\right| + \left(-2\frac{1}{8}\right)$

29. $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2$

30. $\left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\right)$

Encuentre $\frac{1}{2}$ del número dado y el cuadrado que resulte. Exprese su respuesta con una fracción impropia.

31. -7

32. -5

33. $\frac{11}{2}$

34. $\frac{7}{3}$

Calcule cada fórmula para $l = 12$, $w = 8\frac{1}{2}$, $b = 10$, y $h = 7\frac{1}{5}$.

35. $A = lw$

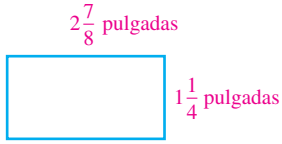
36. $P = 2l + 2w$

37. $A = \frac{1}{2}bh$

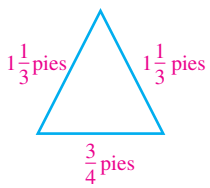
38. $V = lwh$

Encuentre el perímetro de cada figura.

39.



40.



Simplifique cada fracción compleja.

41. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

42. $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{25}}$

43. $\dfrac{-\frac{14}{15}}{\frac{7}{10}}$

44. $\dfrac{\frac{5}{27}}{-\frac{5}{9}}$

45. $\dfrac{5}{\frac{10}{21}}$

46. $\dfrac{6}{\frac{3}{8}}$

47. $\dfrac{-\frac{5}{6}}{-1\frac{7}{8}}$

48. $\dfrac{-\frac{4}{3}}{-2\frac{5}{6}}$

49. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$

50. $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$

51. $\dfrac{\frac{3}{8} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{8} - \frac{1}{4}}$

52. $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}$

53. $\dfrac{\frac{1}{5} + 3}{-\frac{4}{25}}$

54. $\dfrac{-5 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{2}{3}}$

55. $\dfrac{5\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$

56. $\dfrac{4\frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right)}$

57. $\dfrac{\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4} + \frac{4}{5}}$

58. $\dfrac{\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4} + \frac{3}{8}}$

59. $\dfrac{\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{6}\right)}{1\frac{1}{3}}$

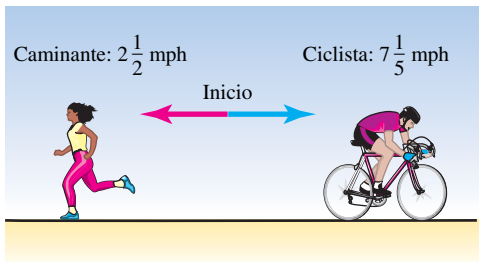
60. $\dfrac{\frac{3}{7} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{1\frac{3}{4}}$

APLICACIONES

61. TIENDA DELI Una tienda vende emparedados de $\frac{1}{2}$ libra hechos de pavo y de jamón. El propietario compra el pavo en paquetes de $1\frac{3}{4}$-libras y el jamón en paquetes de $2\frac{1}{2}$-libras. Si combina un paquete de cada una de las carnes, ¿cuántos emparedados obtiene de esa mezcla?

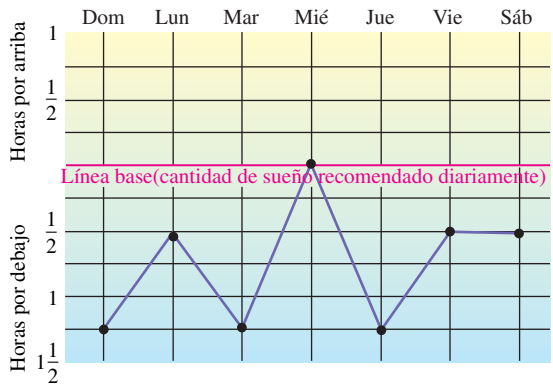
62. CREMAS CORPORALES Mediante una fórmula de $\frac{1}{2}$ onza de bloqueador solar, $\frac{2}{3}$ onza de crema humectante y $\frac{3}{4}$ de onza de lanolina, un especialista en belleza mezcla sus propios productos de crema para la piel. Los envasa en tubos de $\frac{1}{4}$-de onza. ¿Cuántos tubos puede producir utilizando esta fórmula?

63. EJERCICIO FÍSICO Dos personas empiezan sus entrenamientos desde el mismo punto de partida en un camino para bicicletas y recorren direcciones opuestas como se muestra. ¿Cuánto se han alejado después de $1\frac{1}{2}$ horas? Utilice la grafica para organizar su trabajo.

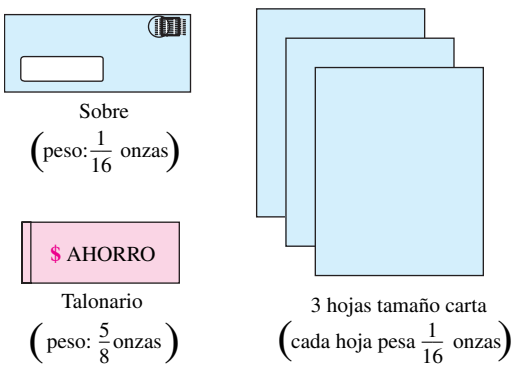


	Rapidez (mph) ·	Tiempo (h) =	Distancia (millas)
Caminante	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$
Ciclista	$7\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{2}$	$10\frac{4}{5}$

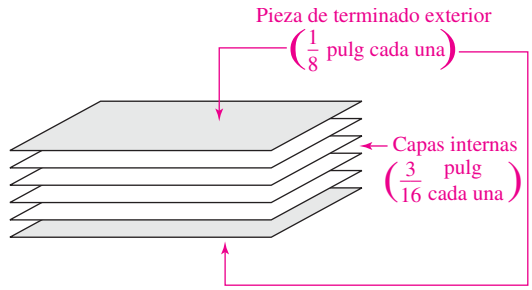
64. HORAS DE SUEÑO La ilustración compara la cantidad de horas de sueño que pasa un bebé de un mes de nacido, en comparación con las $15\frac{1}{2}$-horas que recomienda el Hospital Infantil de Orange County, en California. Para la semana, ¿qué tan bajo estaba el promedio diario de sueño del bebé?



65. TARIFAS POSTALES ¿Se podrá enviar el siguiente paquete de publicidad con una tarifa de 1 onza?



66. MADERA TERCIADA Para fabricar una hoja de madera terciada, se unen varias capas de delgadas láminas con pegamento, como se muestra en la figura. Después, una pieza de acabado exterior se une a la parte superior e inferior. ¿Qué espesor tiene el producto terminado?



67. TERAPIA FÍSICA Después de regresar de una cirugía, un paciente siguió un programa de caminata para rehabilitar los músculos de su espalda, como se especifica en la tabla. ¿Cuál es la distancia total que caminó por este período de tres semanas?

Semana	Distancia por día
#1	$\frac{1}{4}$ millas
#2	$\frac{1}{2}$ millas
#3	$\frac{3}{4}$ millas

68. PROGRAMAS DE LECTURA Para mejorar las habilidades de lectura en una escuela elemental, al final de un día escolar se lee en silencio durante $\frac{1}{4}$ de hora los lunes, y los viernes durante $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuántas horas totales de lectura en silencio tuvieron los niños, en clase, durante el mes de enero?

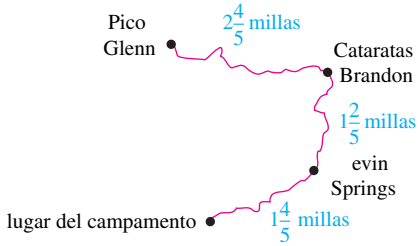
D	L	M	M	J	V	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

69. PARQUES DE DIVERSIONES Al final de una visita en un parque de diversiones, un bote salpica dentro de una piscina de agua. El tiempo (en segundos) que necesitan dos tuberías alimentadoras para llenar la piscina está determinado por

$$\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$$

Encuentre este tiempo.

70. EXCURSIONISMO Una tropa de exploradores planea una excursión del campamento al Pico Glenn. Como el terreno es empinado, los excursionistas planean detenerse a descansar después de cada $\frac{2}{3}$ de milla. Con este plan, ¿cuántas partes habrán de subir hasta llegar al lugar de la excursión?



POR ESCRITO

71. ¿Qué es una fracción compleja?

72. Explique el método para simplificar las fracciones complejas.

73. Escriba una problema de aplicación que contenga una fracción compleja y después resuélvalo.

74. ¿Cuáles son las reglas para el orden de las operaciones?

REPASO

75. Reste 879 de 1 023.

76. Multiplique 879 por 23.

77. Divida 1665 entre 45.

78. Mencione los factores de 24.

79. Calcule: $2 + 3[-3-(-4-1)]$

80. ¿Cuáles es el signo del cociente de dos números con signos distintos?

81. Encuentre el factor primo de 288.

82. Reste: $\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$.

CONCEPTO CLAVE

Propiedad fundamental de las fracciones

La **propiedad fundamental de las fracciones** establece que al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número diferente de cero, no se altera el valor de la fracción. Esta propiedad se utiliza para simplificar fracciones y para expresar las fracciones en términos superiores. Los siguientes problemas de repasan ambos procedimientos. Complete cada solución.

1. Simplifique: $\frac{15}{25}$.

Paso 1: El numerador y el denominador comparten un factor común de ____.

Paso 2: Se aplica la propiedad fundamental de las fracciones. Se divide el numerador y el denominador entre el factor común ____.

$$\frac{15}{25} = \frac{15 \div \square}{25 \div \square}$$

Paso 3: Se realizan las divisiones para simplificar la fracción.

$$= \frac{3}{\square}$$

2. En la práctica, a menudo mostramos el proceso de simplificación descrito en el problema 1 en forma diferente.

Paso 1: Se factoriza 15 como $3 \cdot$ ____ y 25 como ____ $\cdot 5$.

$$\frac{15}{25} = \frac{3 \cdot \square}{\square \cdot 5}$$

Paso 2: Las diagonales y los números 1 (en pequeño) indican que el numerador y el denominador se han dividido entre ____.

$$= \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 5}$$

Paso 3: Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

$$= \frac{\square}{5}$$

3. Cuando se suman o restan fracciones y números mixtos, a menudo necesitamos expresar una fracción en términos superiores. Esto se llama construir una fracción. Exprese $\frac{1}{5}$ como una fracción con denominador 35.

Paso 1: Debemos multiplicar el denominador 5 por ____ para obtener 35.

Paso 2: Se utiliza la propiedad fundamental de las fracciones. Se multiplica el numerador y el denominador por ____.

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{5 \cdot \square}$$

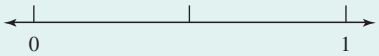
Paso 3: Se realizan las multiplicaciones en el numerador y el denominador.

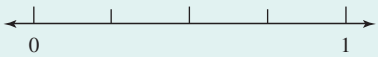
$$= \frac{\square}{35}$$

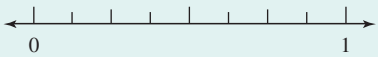
ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

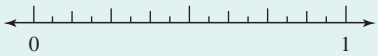
SECCIÓN 3.1

FRACCIONES EQUIVALENTES Termine el marcado en cada recta numérica utilizando fracciones con el mismo denominador.

a.  mitades

b.  cuartos

c.  octavos

d.  dieciseisavos

FRACCIONES Proporcione a cada alumno de su grupo una tira de papel que tenga la misma longitud. Determine las formas para doblar la tira de papel en:

a. cuartos **b.** octavos

c. tercios **d.** sextos

SECCIÓN 3.2

MULTIPLICACIÓN Cuando multiplicamos 2 y 4, la respuesta es mayor que 2 y mayor que 4. ¿Es éste siempre el caso? ¿Es el producto de dos números siempre mayor que cualquiera de los dos números? Explique su respuesta.

POTENCIAS Cuando elevamos al cuadrado el número 4, la respuesta es mayor que 4. ¿El cuadrado de un número es siempre mayor que el número mismo? Explique su respuesta.

SECCIÓN 3.3

DIVISIÓN DE BOCADILLOS Investigue la forma de dividir siete pastelillos de chocolate entre seis personas.

SECCIÓN 3.4

SUMA DE FRACCIONES Sin realizar ninguna suma, explique por qué $\frac{3}{7} + \frac{1}{4}$ debe ser menor que 1, y por qué $\frac{4}{7} + \frac{3}{4}$ debe ser mayor que 1:

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

a. Cuando se suma 1 al numerador de una fracción, ¿el resultado es mayor o menor que la fracción original? Explique su razonamiento.

b. Cuando se suma 1 al denominador de una fracción, ¿el resultado es mayor o menor que la fracción original? Explique su respuesta.

COMPARACIÓN DE FRACCIONES Piense en una fracción. Sume 1 a su numerador, y sume 1 a su denominador. ¿La fracción resultante es mayor, menor o igual que la fracción original? Explique su razonamiento.

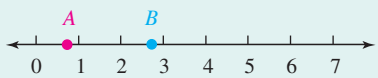
SECCIÓN 3.5

DIVISIÓN CON NÚMEROS MIXTOS Las divisiones pueden pensarse como una sustracción repetida. Utilice este concepto para resolver el siguiente problema.

> $5\frac{1}{4}$ yardas de listón necesitan cortarse en piezas que tengan una longitud de $\frac{3}{4}$ de una yarda para formar lazos. ¿Cuántos lazos pueden hacerse?

SECCIÓN 3.6

NÚMEROS MIXTOS Dos números mixtos, A y B, se grafican a continuación. Estime dónde debería graficarse $A + B$ en la recta numérica.



SECCIÓN 3.7

FRACCIONES COMPLEJAS Escriba un problema que pueda resolverse al simplificar la siguiente fracción compleja.

$$\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}}$$

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 3.1 *Fracciones*

CONCEPTOS

Las *fracciones* pueden utilizarse para indicar partes iguales de un todo.

Una fracción está compuesta de un *numerador*, un *denominador* y una *barra fraccionaria*.

Las fracciones equivalentes representan al mismo número.

La *propiedad fundamental de las fracciones:* al dividir el numerador y el denominador de una fracción entre el mismo número diferente de cero, no se modifica el valor de la fracción.

Para *simplificar* una fracción que no está en sus términos mínimos, divida el numerador y denominador entre el mismo número.

Una fracción está en sus *términos mínimos* si el único factor común al numerador y al denominador es 1.

La *propiedad fundamental de las fracciones:* al multiplicar el numerador y denominador de una fracción por el mismo número diferente de cero, no se altera su valor.

Expresar el resultado de una *fracción en términos superiores* produce una fracción equivalente que incluye números mayores o términos más complejos.

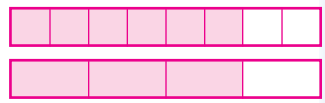
EJERCICIOS DE REPASO

1. ¿Si una mujer duerme siete horas cada noche, qué parte de un día completo pasa durmiendo?

2. ¿De acuerdo con la ilustración siguiente, por qué no podemos decir que $\frac{3}{4}$ de la ilustración está sombreada?

3. Escriba la fracción $\frac{2}{-3}$ en dos formas diferentes.

4. ¿Qué concepto relacionado con las fracciones representa la siguiente ilustración?



5. Explique el procedimiento que se muestra a continuación.

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

6. Explique qué significan las diagonales y el número 1.

$$\frac{4}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Simplifique cada fracción.

7. $\frac{15}{45}$ **8.** $\frac{20}{48}$ **9.** $-\frac{63}{84}$ **10.** $\frac{66}{108}$

11. Explique qué se ha hecho y por qué es válido.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{10}{16}$$

Escriba cada fracción o número entero con el denominador indicado.

12. $\frac{2}{3}$, 18 **13.** $-\frac{3}{8}$, 16 **14.** $\frac{7}{15}$, 45 **15.** 4, 9

SECCIÓN 3.2 *Multiplicación de fracciones*

Para *multiplicar dos fracciones,* se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

Multiplique.

16. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ **17.** $\frac{2}{5}\left(-\frac{7}{9}\right)$ **18.** $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{27}$ **19.** $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{25}$

20. $\frac{3}{5}\cdot 7$ **21.** $-4\left(-\frac{9}{16}\right)$ **22.** $3\left(\frac{1}{3}\right)$ **23.** $-\frac{6}{7}\left(-\frac{7}{6}\right)$

Determine si cada ecuación es verdadera o falsa.

24. $\frac{3}{4}(2) = \frac{3(2)}{4}$ **25.** $-\frac{5}{9}(3) = -\frac{5}{9(3)}$

Multiplique.

26. $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{27}$ **27.** $-\frac{2}{3}\left(\frac{4}{7}\right)$ **28.** $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{28}$ **29.** $9\left(-\frac{5}{81}\right)$

Un *exponente* indica una multiplicación repetida.

En matemáticas, la palabra *de* generalmente significa multiplicar.

Encuentre cada potencia.

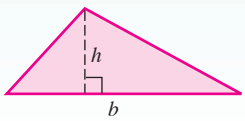
30. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ **31.** $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$ **32.** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **33.** $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

34. GRAVEDAD Los objetos en la Luna sólo pesan un sexto de lo que pesan en la Tierra. ¿Cuánto pesará en la Luna un astronauta si pesa 180 libras en la Tierra?

35. Encuentre el área del letrero triangular.

El *área de un triángulo:*

$$A = \frac{1}{2}bh$$



SECCIÓN 3.3 *División de fracciones*

Dos números se llaman *recíprocos* si su producto es 1.

Encuentre el recíproco de cada número.

36. $\frac{1}{8}$ **37.** $-\frac{11}{12}$ **38.** 5 **39.** $\frac{8}{7}$

Para *dividir dos fracciones,* se multiplica la primera por el recíproco de la segunda.

Divida.

40. $\frac{1}{6}\div\frac{11}{25}$ **41.** $-\frac{7}{8}\div\frac{1}{4}$

42. $-\frac{15}{16}\div(-10)$ **43.** $8\div\frac{16}{5}$

44. $-\frac{3}{8}\div\frac{1}{4}$ **45.** $\frac{4}{5}\div\frac{1}{2}$

46. $\frac{2}{3}\div\left(-\frac{3}{2}\right)$ **47.** $\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{9}\right)$

48. MONEDAS DE ORO ¿Cuántas monedas de oro de $\frac{1}{16}$ de onza pueden obtenerse a partir de una barra de oro que pesa $\frac{3}{4}$ de onza?

SECCIÓN 3.4 *Suma y resta de fracciones*

Para sumar (o restar) fracciones con denominadores iguales, se suman (o restan) sus numeradores, y se escribe el resultado sobre el común denominador.

El *mcd* debe incluir un conjunto de factores de cada uno de los denominadores.

Para sumar o restar las fracciones con denominadores distintos, exprese primero los denominadores como fracciones equivalentes con el mismo denominador, de preferencia con el mcd.

Para *comparar fracciones,* escríbalas como fracciones equivalentes, con el mismo denominador. Después la fracción con el denominador más grande será la fracción mayor.

Sume o reste.

49. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ **50.** $-\frac{3}{5}-\frac{3}{5}$ **51.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ **52.** $\frac{7}{8}+\frac{3}{8}$

53. Explique por qué no se puede sumar inmediatamente $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ sin realizar cierto trabajo preliminar.

54. Utilice la factorización prima para encontrar el mínimo común denominador para el caso de las fracciones con denominadores de 45 y 30.

Sume o reste.

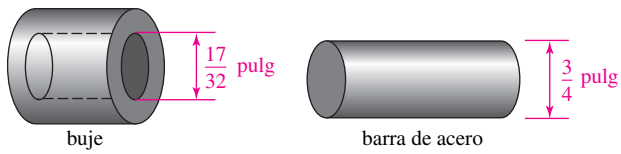
55. $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$ **56.** $\frac{2}{5}+\left(-\frac{3}{8}\right)$

57. $-\frac{3}{8}-\frac{5}{6}$ **58.** $3-\frac{1}{7}$

59. $\frac{2}{25}-\frac{3}{10}$ **60.** $\frac{1}{3}+\frac{7}{4}$

61. $\frac{13}{6}-6$ **62.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

63. TALLER DE MÁQUINAS HERRAMIENTA ¿Cuánto se deberá fresar una barra de acero que tiene un espesor de $\frac{3}{4}$ de pulgada, de tal manera que el buje se deslice sobre la barra?



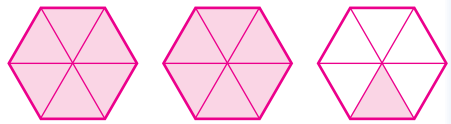
64. TELEMERCADEO En la primera hora laboral, una persona que realiza ventas por teléfono realizó 2 ventas de 9 llamadas. En la segunda hora, hizo 3 ventas de 11 llamadas. ¿Durante qué hora fue mejor el promedio de ventas?

SECCIÓN 3.5 *Multiplicación y división de números mixtos*

Un *número mixto* es la suma de su parte de número entero y su parte fraccionaria.

65. ¿Qué número mixto está representado en la ilustración?

66. ¿Qué fracción impropia está representada en la ilustración?



Para cambiar una *fracción impropia* a un número mixto, divida el numerador entre el denominador para obtener la parte del número entero. Escriba el residuo sobre el denominador para obtener la parte fraccionaria.

Para cambiar de un número mixto a una fracción impropia, multiplique el número entero por el denominador y sume el resultado al numerador. Escriba esta suma sobre el denominador.

Para *multiplicar* o *dividir números mixtos*, cambie los números mixtos a fracciones impropias y después realice las operaciones en forma normal.

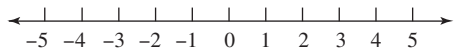
Exprese cada fracción impropia como un número mixto o un número entero.

67. $\frac{16}{5}$ **68.** $-\frac{47}{12}$ **69.** $\frac{6}{6}$ **70.** $\frac{14}{6}$

Escriba cada número mixto como una fracción impropia.

71. $9\frac{3}{8}$ **72.** $-2\frac{1}{5}$ **73.** $100\frac{1}{2}$ **74.** $1\frac{99}{100}$

75. Grafique: $-2\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$, y $\frac{59}{24}$.



Multiplique o divida. Escriba la respuesta como números mixtos cuando sea apropiado.

76. $-5\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{35}$ **77.** $\left(-3\frac{1}{2}\right)\div\left(-3\frac{2}{3}\right)$

78. $\left(-6\frac{2}{3}\right)(-6)$ **79.** $-8\div 3\frac{1}{5}$

80. SOPORTES PARA CÁMARA Los tres pies de un soporte para cámara pueden extenderse hasta aumentar $5\frac{1}{2}$ veces su longitud inicial. Si cada pie alcanza $8\frac{3}{4}$ pulgadas de largo cuando se cierra, ¿cuánto medirá un pie del soporte cuando está completamente extendido?

SECCIÓN 3.6 *Suma y resta de números mixtos*

Para sumar (o restar) números mixtos, podemos cambiar cada uno a una fracción impropia y luego utilizar el método de la sección 3.4.

Para sumar números mixtos, podemos sumar los números enteros y las fracciones por separado.

La forma vertical puede utilizarse para sumar o restar números mixtos.

Sume o reste.

81. $1\frac{3}{8}+2\frac{1}{5}$ **82.** $3\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}$

83. $2\frac{5}{6}-1\frac{3}{4}$ **84.** $3\frac{7}{16}-2\frac{1}{8}$

85. PRESUPUESTO DE PINTURA En un proyecto para restaurar una casa, los pintores utilizan $10\frac{3}{4}$ galones de recubrimiento primario, $21\frac{1}{2}$ galones de pintura de látex, y $7\frac{2}{3}$ galones de esmalte. Encuentre el número total de galones que se van a utilizar.

Sume o reste.

86.
$$\begin{array}{r} 133\frac{1}{9} \\ +\ 49\frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

87.
$$\begin{array}{r} 98\frac{11}{20} \\ +14\frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

88.
$$\begin{array}{r} 50\frac{5}{8} \\ -19\frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

89.
$$\begin{array}{r} 375\frac{3}{4} \\ -\ 59 \\ \hline \end{array}$$

Si la fracción que se va a restar es mayor que la primera fracción, necesitamos *"pedir prestado"* de un número entero.

Reste.

90. $23\frac{1}{3}-2\frac{5}{6}$ **91.** $39-4\frac{5}{8}$

SECCIÓN 3.7 *Orden de las operaciones y fracciones complejas*

Una *fracción compleja* es una fracción cuyo numerador o denominador, o ambos, contienen una o más fracciones o números mixtos.

Para simplificar una fracción compleja, se escribe el numerador y el denominador de la fracción compleja como una fracción simple. Después se realiza la división indicada en las dos fracciones y se simplifica.

Evalúe cada expresión numérica.

92. $\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)$

93. $\left(\frac{2}{3} \div \frac{16}{9}\right) - \left(1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{15}\right)$

Simplifique cada fracción compleja.

94. $\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{17}{20}}$

95. $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$

Calcule la formula $P = 2\ell + 2w$ para los siguientes valores de ℓ y w.

96. $\ell = \frac{3}{4}$ y $w = \frac{2}{5}$

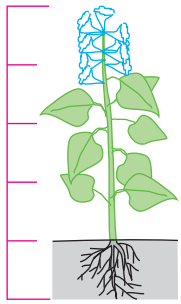
97. $\ell = 2\frac{1}{3}$ y $w = 3\frac{1}{4}$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3

1. Observe la siguiente ilustración.

a. ¿Qué parte fraccionaria de la planta sobresale de la tierra?

b. ¿Qué parte fraccional de la planta está debajo de la tierra?



2. Simplifique cada fracción.

a. $\frac{27}{36}$ **b.** $\frac{72}{180}$

3. Multiplique: $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)$.

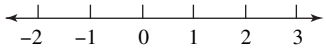
4. BEBEDORES DE CAFÉ Se aplicó una encuesta a 100 adultos. Del total $\frac{2}{5}$ dijeron haber comenzado su mañana con una taza de café. De las 100 personas, ¿cuántos serían los bebedores de café?

5. Divida: $\frac{4}{3} \div \frac{2}{9}$.

6. Reste: $\frac{5}{6} - \frac{4}{5}$.

7. Exprese $\frac{7}{8}$ como una fracción equivalente con el denominador 24.

8. Grafique: $2\frac{4}{5}$, $-1\frac{1}{7}$, y $\frac{7}{6}$.



9. CONTRATOS DEPORTIVOS Un jugador de basketball firmó un contrato por nueve años por la cantidad de $\$13\frac{1}{2}$ millones de dólares, ¿cuánto es por año?

10. Evalúe la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ cuando $b = \frac{7}{3}$ y $h = \frac{15}{4}$.

11. Sume: $157\frac{5}{9} + 103\frac{3}{4}$.

12. Reste: $67\frac{1}{4} - 29\frac{5}{6}$.

13. BOXEO Cuando Oscar De La Hoya peleó contra Pernell Whitaker, la tabla de medidas que se muestra a continuación apareció en la sección de deportes de muchos periódicos. ¿Cuál era la diferencia entre los luchadores respecto a sus

a. pesos?

b. pechos (expandidos)?

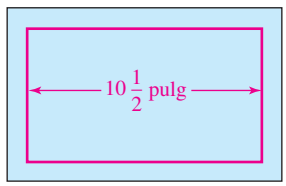
c. cinturas?

Tabla de medidas

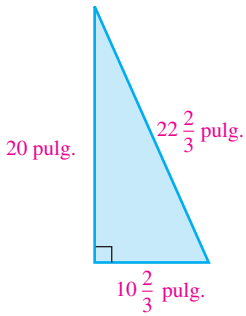
De La Hoya		Whitaker
24 años	Edad	33 años
146 1/2 lbs	Peso	146 1/2 lbs
5 11	Altura	5 6
72 pulg.	Alcance	69 pulg.
39 pulg.	Pecho (normal)	37 pulg.
42 1/4 pulg.	Pecho (expandido)	39 1/2 pulg.
31 3/4 pulg.	Cadera	28 pulg.

14. Sume: $-\frac{3}{7} + 2$.

15. COSTURA Cuando cortó el material para elaborar un mantel de $10\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho, la costurera le dejó $\frac{5}{8}$ de pulgada en cada extremo para formar el dobladillo. ¿De qué ancho debería cortarse el material?



16. Encuentre el perímetro y el área del siguiente triángulo.



17. NUTRICIÓN Una caja de pastillas "Tic Tac" contiene 40 pastillas de sabor menta para refrescar el aliento de $1\frac{1}{2}$ calorías. ¿Cuántas calorías hay en una caja de pastillas?

18. COCINA ¿Cuántas porciones hay en un asado de 8 libras, si la porción sugerida es de $\frac{2}{3}$ de libra?

19. Realice las operaciones.

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{16}\right) - \left(-1\frac{3}{5} \div 4\frac{4}{5}\right)$$

20. Simplifique la fracción compleja.

$$\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}$$

21. Simplifique la fracción compleja.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}$$

22. SOLICITANTES DE EMPLEO Tres cuartas partes de las personas que solicitaron empleo para ocupar un puesto tenían experiencia previa. Si 144 personas llenaron la solicitud, ¿cuántas tenían experiencia previa?, ¿cuántas no la tenían?

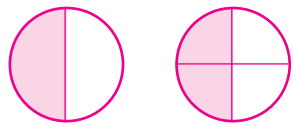
23. ¿Cuáles son las partes de una fracción?, ¿qué representa una fracción?

24. Explique el significado de la siguiente expresión "el producto de cualquier número y su recíproco es 1."

25. Explique qué concepto matemático se muestra a continuación.

a. $\frac{6}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 4} = \frac{3}{4}$

b.



c. $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{12}{20}$

26. Explique por qué no se puede sumar inmediatamente $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$ sin hacer un trabajo preliminar.

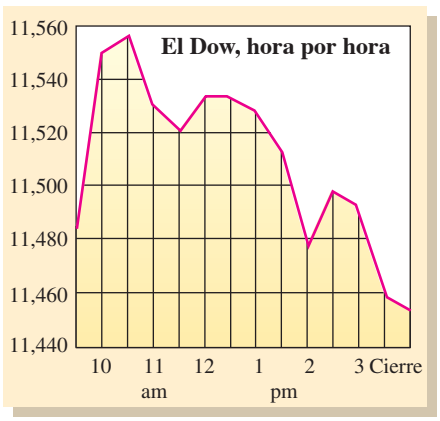
CAPÍTULOS 1–3 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

Considere el número 5 434 679.

1. Redondee a la centena más cercana.

2. Redondee a la decena de millar más cercana.

3. MERCADO DE VALORES La grafica siguiente muestra el desempeño promedio del índice Industrial Dow Jones en el último día de operaciones de 1999. Estime el punto máximo que alcanzó el mercado de valores. ¿En qué tiempo del día ocurrió?



Fuente: *Los Angeles Times* (Diciembre 31, 1999)

4. BANCOS El banco de Tokio-Mitsubishi, Ltd., Japón, es uno de los bancos más importantes a nivel mundial, con un total de $691,920,300 000 en activos. ¿En qué lugar de la columna de valor está localizado el dígito 6?

Realice cada operación.

5. $\begin{array}{r} 4679 \\ +3457 \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 7897 \\ -4378 \end{array}$

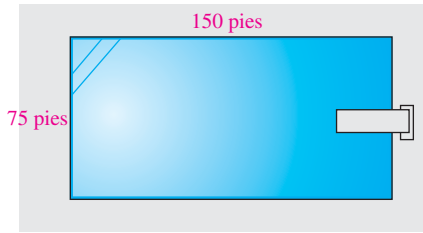
7. $\begin{array}{r} 5345 \\ \times\ \ 56 \end{array}$

8. $35\overline{)34685}$

Refiérase a la piscina rectangular.

9. Encuentre el perímetro de la piscina.

10. Encuentre el área de la superficie de la piscina.



Encuentre los factores primos de cada número.

11. 84

12. 450

13. 360

14. 3600

Calcule cada expresión.

15. $6 + (-2)(-5)$

16. $(-2)^3 - 3^3$

17. $\dfrac{2(-7) + 3(2)}{2(-2)}$

18. $\dfrac{2(3^2 - 4^2)}{-2(3) - 1}$

Simplifique cada fracción.

19. $\dfrac{21}{28}$

20. $\dfrac{40}{16}$

Realice cada operación.

21. $\dfrac{6}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

22. $\dfrac{14}{8} \div \dfrac{7}{2}$

23. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}$

24. $\dfrac{4}{7} - \dfrac{3}{5}$

Escriba cada número mixto como fracción impropia.

25. $3\frac{5}{6}$

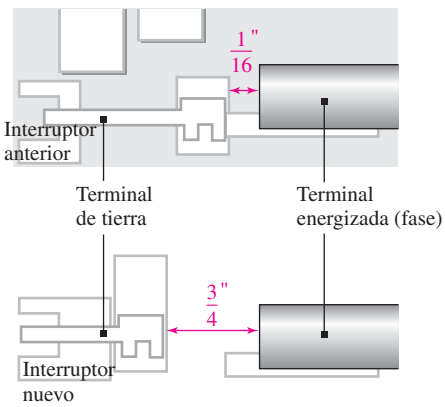
26. $-6\frac{5}{8}$

Realice cada operación.

27. $4\frac{2}{3} + 5\frac{1}{4}$

28. $14\frac{2}{5} - 8\frac{2}{3}$

29. PELIGRO DE INCENDIO Dos terminales en un interruptor eléctrico estaban muy cerca una de la otra, este hecho puede provocar que la corriente eléctrica salte esa separación e inicie un incendio. La ilustración muestra el diseño mejorado de un interruptor que evita que esto suceda. ¿Cuál sería la distancia entre la terminal de tierra y la terminal energizada (fase)?



30. LOCIÓN DE AFEITAR Los comerciales afirman que la loción de afeitar permite ahorrar un tercio de tiempo durante el afeitado de la barba. Si normalmente un hombre necesita 90 segundos para afeitarse, ¿cuánto tiempo se ahorrará si utiliza la loción especial? Si utiliza la loción especial, ¿cuánto tiempo le tomaría afeitarse?

Simplifique cada expresión.

31. $\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right) \div \left(-2\frac{3}{16}\right)$

32. $\dfrac{\frac{2}{3} - 7}{4\frac{5}{6}}$

33. Indique cómo se multiplican dos fracciones.

34. Mencione cómo se restan dos fracciones que tienen distintos denominadores.

CAPÍTULO 4

Decimales

4.1 Una introducción a los decimales

4.2 Suma y resta de decimales

4.3 Multiplicación de decimales

4.4 División de decimales

Estimación

4.5 Fracciones y decimales

4.6 Raíces cuadradas

Concepto clave: los números reales

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

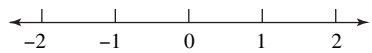
Ejercicios acumulativos de repaso

CORBIS

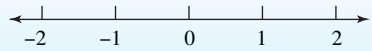
Los fanáticos de los deportes hablan de datos, cifras y trivias. Muchos récords deportivos se indican como números decimales. Por ejemplo, ¿sabías que durante sus 15 años de carrera en la NBA, Michael Jordan promedió 30.1 puntos por juego? Jerry Rice, considerado por muchos como el mejor receptor de todos los tiempos de la NFL, promedió 14.8 yardas por atrapada. La nadadora Janet Evans de Estados Unidos tiene el récord mundial de los 800 m de nado libre. Su mejor tiempo de 8 minutos y 16.22 segundos fue establecido en 1989 y ¡se ha mantenido durante 15 años!

Verifique sus conocimientos

1. Para multiplicar decimales, multiplíquelos como si fueran enteros. El número de cifras decimales en el producto es el mismo que la _____ del número de cifras decimales en los factores.
2. Para dividir por un decimal, mueva el punto decimal del divisor de tal forma que se convierta en un número entero. El punto decimal del dividendo se mueve entonces el mismo número de cifras decimales a la _____.
3. Para escribir una fracción como decimal, divida el _____ de la fracción por su denominador.
4. Cuando hallamos qué número elevado al cuadrado nos da un número dado, estamos encontrando la _____ cuadrada del número dado.
5. Escriba 0.084 como fracción.
6. Brittany adquirió un reproductor de CD por $39.95, los audífonos por $17.95 y dos CD por $13.95 cada uno. ¿Cuál fue el total de sus compras?
7. Realice mentalmente cada operación:
   a. $354\,278.2 \div 1000$ **b.** $2.000478 \cdot 10\,000$
8. Una mesa rectangular tiene 3.5 pies de largo y 2.25 pies de ancho.
   a. ¿Cuál es su área? **b.** ¿Cuál es su perímetro?
9. Evalúe: $2.8 + (1.2)(-0.5)^2$.
10. Escriba cada fracción como decimal. Use una raya arriba si es necesario.
    a. $\frac{3}{20}$ **b.** $\frac{5}{8}$ **c.** $\frac{1}{9}$
11. Divida y redondee su respuesta a la décima más cercana: $\frac{25.736}{16.3}$
12. Grafique $-\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{4}$ en la recta numérica. Identifique cada punto usando su equivalente decimal.

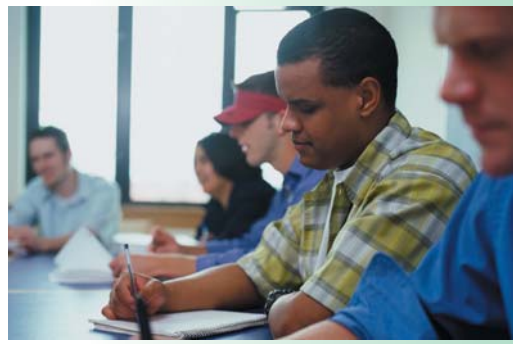


13. Encuentre la respuesta exacta: $\frac{1}{6} + 0.25$.
14. Un estacionamiento cobra $1 por la primera media hora y $0.75 por cada media hora adicional. ¿Cuánto cobraría por 3 horas?
15. Grafique $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica. Etiquete cada punto con su aproximación decimal redondeada a dos cifras decimales.
16. Evalúe cada expresión:
    a. $\sqrt{16} + 5\sqrt{9}$ **b.** $\sqrt{\frac{36}{25}} - \sqrt{\frac{1}{16}}$



    c. $\sqrt{0.16} - \sqrt{0.49}$
17. Inserte el símbolo apropiado $<$ o $>$ para que cada proposición sea verdadera.
    a. $-2.7 \square -2.75$ **b.** $\sqrt{2} \square 2$ **c.** $0.\overline{3} \square 0.3$
18. Mindy manejó 342 millas en 6.5 horas. ¿Cuál fue su velocidad promedio en millas por hora? Redondee el resultado a la décima más cercana.

Taller de habilidades para el estudio



TRABAJAR DE NUEVO EN LAS NOTAS COMO AYUDA DE ESTUDIO

En el último taller de habilidades para el estudio, aprendió la importancia de tomar notas. En esta sección aprenderá a retrabajar sus notas para estudiar para la tarea y los exámenes. "Retrabajar" las notas significa simplemente que usted lea nuevamente sus notas de clase, llene cualquier información faltante y presente después la información en un formato nuevo y fácil de estudiar.

Identificación de conceptos. Tan pronto como sea posible después de la clase, siéntese y revise sus notas, luego identifique los conceptos clave que se discutieron en su clase. Los conceptos clave se identifican usualmente por definiciones, reglas y fórmulas.

Ejemplos. Una vez que haya identificado los conceptos clave, encuentre todos los ejemplos que se utilizaron para ilustrar ese concepto. Asegúrese de entender cada ejemplo y termine todos los pasos faltantes si eso le ayuda a entender el ejemplo. Indique el motivo de cada paso en el ejemplo.

Formato para retrabajar. Puede retrabajar sus notas en varias formas, dependiendo de sus preferencias personales y estilo de aprendizaje. Puede usar tarjetas (similares a las que se utilizan para elaborar fichas de trabajo) o una hoja dividida en tres columnas, o si usted aprende más cuando escucha (o pasa mucho tiempo manejando su automóvil) puede retrabajar sus notas en forma de sesiones de audio.

- *Formato en tarjetas:* coloque una pestaña en sus tarjetas, y anote en la pestaña el concepto clave. En el frente de cada tarjeta escriba el concepto, en la parte posterior escriba la definición o fórmula; sería buena idea memorizar esto. Usando una tarjeta para cada ejemplo, escriba el ejemplo en el frente de la tarjeta. En la parte posterior, describa cada paso del ejemplo anotando la razón de cada paso. Repita este proceso por cada concepto aprendido. Guarde sus tarjetas en una caja, como las que se usan para los recetarios, y agrúpelas por concepto.
- *Hoja de estudio:* divida una hoja de papel tamaño carta (medidas $8\frac{1}{2}'' \times 11''$ en tres columnas. Identifique la columna de la izquierda como "Concepto", la de en medio como "Ejemplo" y la columna de la derecha como "Pasos y razonamiento". Reescriba sus notas llenando la hoja de estudio siguiendo la clasificación anterior.
- *Cinta de audio o CD:* Use una grabadora para enunciar un concepto clave. Haga una pausa por unos segundos y luego diga la definición o fórmula. Diga un ejemplo y luego explique cada paso. Continúe diciendo ejemplos y pasos. Repita para los conceptos restantes.

Cómo usar las notas retrabajadas para estudiar

- *Tarjetas:* observe el concepto en la primera tarjeta en un grupo. Intente enunciar la definición o la regla. Si no puede, revise la parte posterior de la tarjeta y léala. Siga hasta que pueda recitarla de memoria. Luego vea el ejemplo y vea si puede resolver el problema sin ayuda de algún tipo. Si tiene problemas con esto, los pasos están escritos en la parte posterior y bastará con voltear la tarjeta para verlos. Continúe resolviendo el problema hasta que lo pueda hacer sin mirar la solución.
- *Hoja de estudio de tres columnas:* revise cuidadosamente los conceptos y ejemplos, cubriendo el trabajo que está anotado en la columna de la derecha, mientras intenta resolver el problema en la columna de en medio. Si no puede continuar, descubra la columna de trabajo para mirar los pasos. Continúe retrabajando el problema hasta que pueda hacerlo sin mirar la solución.
- *Cinta de audio:* en la pausa entre cada parte del problema, vea si puede recitar los pasos antes que se muestren en la cinta. Repítalos hasta que pueda recitar todos los pasos por sí mismo.

TAREA

1. Determine los pasos antes que se muestren en la cinta. Repítalos hasta que pueda recitar todos los que indique cuál formato es el mejor para que retrabaje sus notas. Si piensa en un formato diferente a los que se indican arriba, describa su formato.
2. Retrabaje sus notas desde la última clase en el formato que eligió.

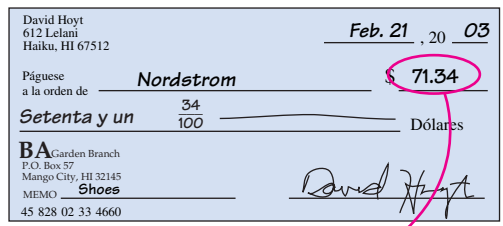
Los decimales brindan otra opción para representar fracciones y números mixtos. Se usan con bastante frecuencia en las mediciones porque son fáciles de ordenar y comparar.

4.1 Una introducción a los decimales

- Decimales • El sistema de notación posicional de los números decimales
- Lectura y escritura de decimales • Comparación de decimales • Redondeo

Esta sección presenta el **sistema de numeración decimal,** extensión del sistema de notación posicional que usamos con los números enteros.

Podemos usar el sistema de numeración decimal para expresar el millaje (kilometraje) recorrido. El odómetro indica 1537.6 millas



La cantidad del cheque se escribe usando el sistema de numeración decimal.

Decimales

Como sucede en la notación fraccionaria, la notación decimal se utiliza para indicar una parte de un todo. Sin embargo, cuando se escribe un número en notación decimal, no se utiliza una barra de quebrado ni se muestra un denominador. Un número que se escribe en notación decimal se conoce como **decimal.**

En la figura 4.1 se divide un rectángulo en diez partes iguales. Se sombreó un décimo de la figura. Podemos usar ya sea la fracción $\frac{1}{10}$ o el decimal 0.1 para describir la parte de la figura que está sombreada. Ambos se leen como "una décima".

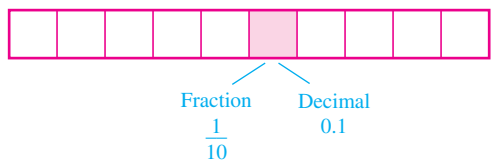


FIGURA 4.1

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

En la figura 4.2, un cuadrado se divide en 100 partes iguales. Una de las 100 partes se sombrea; la parte de la figura que está sombreada se puede representar por la fracción $\frac{1}{100}$ o por el decimal 0.01. Ambos se leen como "una centésima".

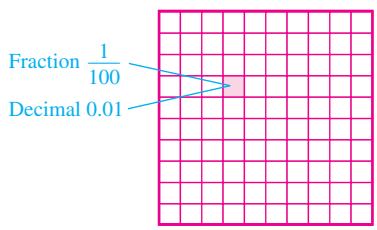


FIGURA 4.2

$$\frac{1}{100} = 0.01$$

El sistema de notación posicional de los números decimales

Los números decimales se escriben colocando dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) en columnas separadas por un **punto decimal.** (Véase la figura 4.3). Los nombres de las posiciones en las columnas a la derecha del punto decimal terminan con "ésima". "Ésima" nos indica que el valor de la columna es una fracción cuyo denominador es una potencia de 10. Las columnas a la izquierda del punto decimal tienen un valor mayor o igual que uno; las columnas a la derecha del punto decimal tienen un valor menor que uno. Podemos mostrar el valor representado por cada dígito de un decimal usando la **notación expandida.**

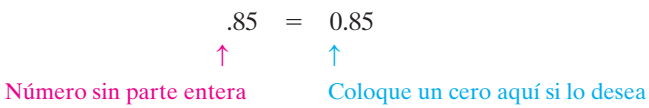
$$8000 + 300 + 60 + 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10\,000}$$

Notación expandida

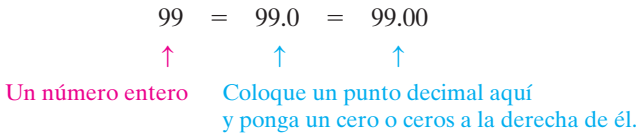
FIGURA 4.3

Los puntos decimales se usan para separar la parte entera de un número decimal de su parte fraccionaria.

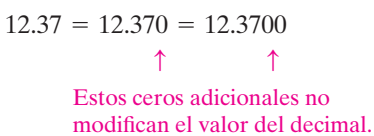
Cuando no hay parte entera de un decimal, se puede mostrar colocando un cero a la izquierda del punto decimal.



Podemos escribir un número entero en notación decimal colocando el punto decimal a su derecha y añadiendo un cero, o ceros, a la derecha del punto decimal



Escribir ceros adicionales a la derecha del punto decimal *después de los últimos dígitos* no cambia el valor del decimal. Borrar ceros adicionales a la derecha del punto decimal después del último dígito no cambia el valor del decimal.



Lectura y escritura de decimales

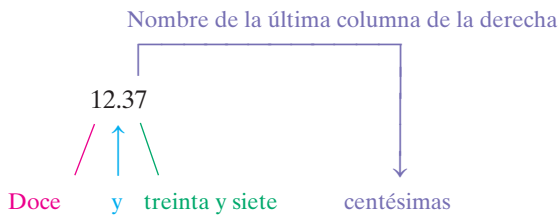
El decimal 12.37 se puede leer como "doce punto treinta y siete". Otra forma de leer el decimal es: primero la parte entera y luego la fraccionaria.

Lectura de un decimal

Para leer un decimal:

1. Vea a la izquierda del punto decimal y diga el nombre del número entero.
2. Después se lee el punto decimal como "y".
3. Diga la parte fraccionaria del decimal como un número entero seguido del nombre de la columna del dígito que esté más a la derecha.

Siguiendo este procedimiento, he aquí otra forma de leer 12.37.



Cuando leemos un decimal de esta forma, es fácil escribirlo en palabras y como número mixto.

Decimal	Palabras	Número mixto
12.37	Doce y treinta y siete centésimas	$12\frac{37}{100}$

Autoevaluación 1

Escriba con palabras cada decimal y luego represéntelo como número mixto.

a. Sputnik 1, el primer satélite artificial, pesaba 184.3 libras.

b. El planeta Mercurio efectúa una revolución cada 87.9687 días.

Respuestas **a.** Ciento ochenta y cuatro y tres décimas, o $184\frac{3}{10}$
b. Ochenta y siete y nueve mil seiscientos ochenta y siete diezmilésimas, o $87\frac{9687}{10\,000}$

EJEMPLO 1 **Récords mundiales.** Escriba cada decimal en palabras y luego como fracción o número mixto. **No simplifique la fracción.**

a. De acuerdo al libro *Guinness de Récords Mundiales,* la velocidad más alta registrada en Indianápolis 500 fue 236.986 m/h por Aire Luyendyk en 1996.

b. El pez de agua dulce más pequeño es el gobi pigmeo enano que se localiza en las Filipinas. Los ejemplares adultos pesan 0.00014 onzas.

Solución

a. La parte entera del número de **236**.**986** a la izquierda del punto decimal es 236. La parte fraccionaria, enunciada como número entero, es 986. El dígito de la extrema derecha es 6 y está en la columna de las milésimas. Así,

236.986 es doscientos treinta y seis enteros y novecientos ochenta y seis milésimas o $236\frac{986}{1000}$.

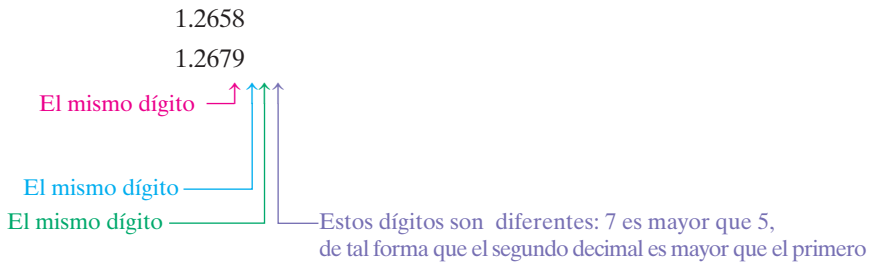
b. La parte entera de **0**.**00014** a la izquierda del punto decimal es 0. La parte fraccionaria, dicha como número entero es 14. El dígito más alejado hacia la derecha es 4 y está en la columna de las cienmilésimas. Así,

0.00014 es catorce cienmilésimas o $\frac{14}{100\,000}$.

Los decimales pueden ser negativos. Por ejemplo, la temperatura récord de $-128.6°$ F se registró en Vostok, Antártica, el 21 de julio de 1983. Esto se lee como "menos ciento veintiocho y seis décimas". Escrito como número mixto, es $-128\frac{6}{10}$.

Comparación de decimales

Los tamaños relativos de un conjunto de decimales se pueden determinar recorriendo sus columnas de izquierda a derecha, columna por columna, buscando diferencias en los dígitos. Por ejemplo,


1.2658
1.2679
El mismo dígito
El mismo dígito
El mismo dígito
Estos dígitos son diferentes: 7 es mayor que 5,
de tal forma que el segundo decimal es mayor que el primero

Así, 1.2679 es mayor que 1.2658. Escribimos $1.2679 > 1.2658$.

Comparación de decimales positivos

Para comparar dos decimales positivos:

1. Asegúrese que ambos números tienen el igual cantidad de cifras decimales a la derecha del punto decimal. Escriba ceros adicionales si es necesario.
2. Compare los dígitos de cada decimal, columna por columna, trabajando de izquierda a derecha.
3. Cuando dos dígitos sean diferentes, el decimal con el dígito mayor será el número mayor.

EJEMPLO 2 ¿Cuál es mayor: 54.9 o 54.929?

Solución

54.900 Escriba dos ceros después del 9 para que ambos decimales tengan el mismo número de dígitos a la derecha del punto decimal.

54.929

Conforme se avanza de izquierda a derecha, esta es la primera columna en la que los dígitos difieren. Como 2 es mayor que 0, se concluye que $54.929 > 54.9$.

Autoevaluación 2
¿Cuál es mayor, 113.7 o 113.657?

Respuesta 113.7

Comparación de decimales negativos:

Para comparar dos decimales negativos:

1. Asegúrese que ambos números tienen el mismo número de cifras decimales a la derecha del punto decimal. Escriba ceros adicionales en caso de ser necesario.
2. Compare los dígitos de cada cifra decimal, columna por columna, recorriéndolas de izquierda a derecha.
3. Cuando dos dígitos sean diferentes, el decimal con el menor dígito es el número mayor.

Autoevaluación 3
¿Cuál es mayor: −703.8 o −703.78?

Respuesta −703.78

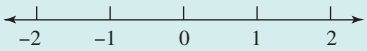
EJEMPLO 3 ¿Cuál es mayor: −10.45 o −10.419?

Solución

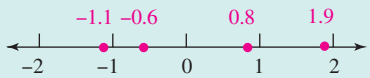
−10.450 Escriba un cero después del 5 en la comparación
−10.419
↑

Avanzando de izquierda a derecha, ésta es la primera columna en que difieren los dígitos. Como 1 es menor que 5, concluimos que $-10.419 > -10.45$.

Autoevaluación 4
Grafique: −1.1, −0.6, 0.8 y 1.9

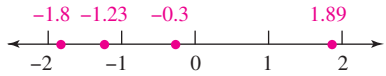


Respuesta



EJEMPLO 4 Grafique: −1.8, −1.23, −0.3 y 1.89.

Solución Para graficar cada decimal, localizamos su posición en la recta numérica y ponemos un punto. Como −1.8 está a la izquierda de −1.23, podemos escribir $-1.8 < -1.23$.



Redondeo

Cuando se trabaja con decimales, a menudo se redondean las respuestas a un número específico de cifras decimales.

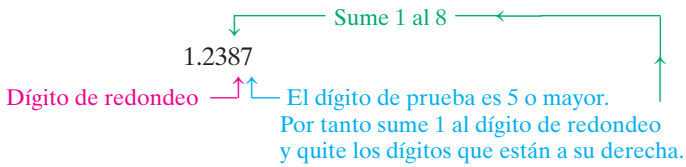
Redondeo de un decimal

Para redondear un decimal a un número específico de cifras:

1. Localice el dígito en esa cifra. Identifíquelo como *dígito de redondeo*.
2. Fíjese en el *dígito de prueba* que se localiza a la derecha del dígito de redondeo.
3. Si el dígito de prueba es 5 o mayor, redondee añadiendo 1 al dígito del redondeo y quitando todos los dígitos a su derecha. Si el dígito de prueba es menor que 5, redondee hacia abajo conservando el dígito de redondeo y quitando todos los dígitos a su derecha.

EJEMPLO 5 **Química.** En una clase de química, un estudiante utiliza una báscula para pesar un compuesto. La lectura digital de la báscula es 1.2387 gramos. Redondee este decimal a la milésima más cercana de un gramo.

Solución Se nos pide redondear a la milésima más cercana.


Sume 1 al 8
1.2387
Dígito de redondeo
El dígito de prueba es 5 o mayor.
Por tanto sume 1 al dígito de redondeo
y quite los dígitos que están a su derecha.

El compuesto pesa aproximadamente 1.239 gramos.

EJEMPLO 6 Redondee cada decimal hasta la cifra indicada. **a.** −645.13 a la décima más cercana y **b.** 33.097 a la centésima más cercana.

Solución

a. −645.13

Dígito del redondeo → Como el dígito de prueba es menor que 5, se quita con todos los dígitos que están a su derecha.

El resultado es −645.1.

b. 33.097

Dígito del redondeo → Como el dígito es mayor que 5, se suma 1 al 9 y se quitan todos los dígitos que están a su derecha.

$33.0\overset{10}{\not{9}}$ Sumar 1 al nueve requiere que se lleve 1 a la columna de las décimas.

Cuando se pide redondear a la centésima más cercana, debe haber un dígito en la columna de las centésimas aunque sea cero. Por lo tanto el resultado es 33.10.

Autoevaluación 6

Redondee cada decimal a la cifra indicada.

a. −708.522 hasta la décima más cercana

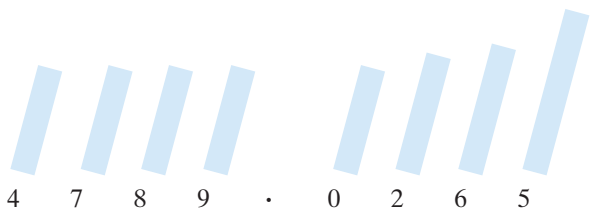
b. 9.1198 hasta la milésima más cercana

Respuestas **a.** −708.5, **b.** 9.120

Sección 4.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios vacíos.*

1. Dé el nombre de cada cifra decimal en la columna correspondiente.



2. Se puede mostrar el valor que representa cada dígito del decimal usando la notación _____.

$$98.6213 = 90 + 8 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{3}{10\,000}$$

3. Se puede aproximar un número decimal usando un proceso llamado _____.

4. Cuando se lee 2.37, se puede decir el punto decimal como "_____" o "_____."

CONCEPTOS

5. Considere el decimal 32.415.

a. Escriba el decimal en palabras.

b. ¿Cuál es su parte entera?

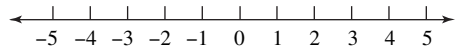
c. ¿Cuál es su parte fraccionaria?

d. Escriba el decimal en notación expandida.

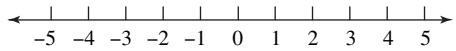
6. Escriba lo siguiente como decimal:

$$400 + 20 + 8 + \frac{9}{10} + \frac{6}{100}$$

7. Grafique: $\frac{7}{10}$, −0.7, $-3\frac{1}{100}$ y 3.01.



8. Grafique: −1.21, −3.29 y −4.25.



9. Determine la veracidad o falsedad de cada afirmación:

a. 0.9 = 0.90

b. 1.260 = 1.206

c. −1.2800 = −1.280

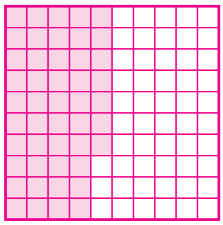
d. 0.001 = .0010

10. Escriba cada fracción como un decimal.

a. $\frac{9}{10}$ **b.** $\frac{63}{100}$

c. $\frac{111}{1000}$ **d.** $\frac{27}{10\,000}$

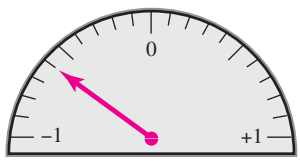
11. Represente la parte sombreada del cuadrado como una fracción y como un decimal.



12. Represente la parte sombreada del rectángulo como una fracción y como un decimal.

13. El segmento de recta abajo mide 1 pulgada. Muestre una longitud de 0.3 pulgadas en él.

14. Lea el medidor de abajo. ¿Qué decimal indica la flecha?



NOTACIÓN

15. Construya un número decimal escribiendo.

0 en la columna de las décimas

4 en la columna de las milésimas

1 en la columna de las decenas

9 en la columna de los millares

8 en la columna de las centenas

2 en la columna de las centésimas

5 en la columna de las diezmilésimas

6 en la columna de las unidades

16. Represente cada situación usando un número con signo.

a. Un déficit de $15 600.55

b. Un río 6.25 pies arriba de su nivel de inundación

c. Un presupuesto estatal de $6.4 millones en números rojos

d. 3.9 grados bajo cero

e. 17.5 segundos después del despegue

f. Una cuenta de cheques sobregirada por $33.45

PRÁCTICA *Escriba cada decimal en palabras y como fracción o número mixto.*

17. 50.1

18. 0.73

19. −0.0137

20. −76.09

21. 304.0003

22. 68.91

23. −72.493

24. −31.5013

Escriba cada decimal usando números.

25. Menos treinta y nueve centésimas.

26. Menos veintisiete y cuarenta y cuatro centésimas.

27. Seis y ciento ochenta y siete milésimas.

28. Diez y cincuenta y seis milésimas

Redondee cada decimal a la décima más cercana.

29. 506.098

30. 0.441

31. 2.718218

32. 3987.8911

Redondee cada decimal a la centésima más cercana.

33. −0.137

34. −808.0897

35. 33.0032

36. 64.0059

Redondee cada decimal a la milésima más cercana.

37. 3.14159

38. 16.0995

39. 1.414213

40. 2300.9998

Redondee cada decimal al entero más cercano.

41. 38.901

42. 405.64

43. 2 988.399

44. 10 453.27

Redondee cada cantidad al valor indicado.

45. $3090.28

a. Al dólar más cercano

b. A las décimas de dólar más cercanas

46. $289.73

a. Al dólar más cercano

b. A las décimas de dólar más cercanas

Llene los espacios en blanco con el símbolo apropiado $<$, $>$ o $=$.

47. $-23.45 \quad -23.1$

48. $-301.98 \quad -302.45$

49. $-.065 \quad -.066$

50. $-3.99 \quad -3.9888$

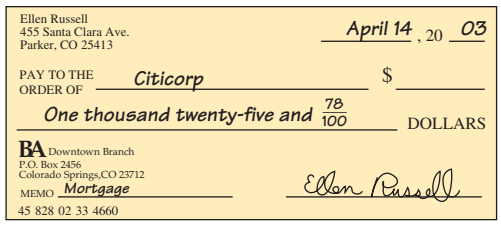
Acomode los decimales en orden, de menor a mayor.

51. 132.64, 132.6499, 132.6401

52. 0.007, 0.00697, 0.00689

APLICACIONES

53. ESCRITURA DE CHEQUES Llene el cheque que se muestra, anote la cantidad usando un decimal.


Ellen Russell
455 Santa Clara Ave.
Parker, CO 25413

April 14 , 20 03

PAY TO THE ORDER OF Citicorp $ _____

One thousand twenty-five and 78/100 DOLLARS

BA Downtown Branch
P.O. Box 2456
Colorado Springs,CO 23712

MEMO Mortgage

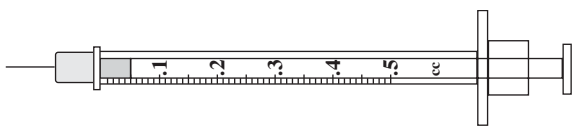
Ellen Russell

45 828 02 33 4660

54. DINERO Podemos usar el punto decimal al trabajar con dólares, pero el punto decimal no se necesita cuando se trabaja con centavos. Por cada cantidad en dólares que se indica en la tabla, anote la cantidad equivalente expresada en centavos.

Dólares	Centavos
$0.50	
$0.05	
$0.55	
$5.00	
$0.01	

55. INYECCIONES En la figura se muestra una jeringa. Use una flecha para indicar hasta qué punto de la jeringa se debe llenar si se necesita administrar una dosis de medicamento de 0.38 cc ("cc" significa "centímetros cúbicos").



56. LÁSERES El láser que se utiliza en la cirugía de corrección de la vista es tan preciso que cada pulso puede remover 39 millonésimas de pulgada de tejido en 12 mil millonésimas de segundo. Escriba estos números como decimales.

57. SISTEMA MÉTRICO El sistema métrico se usa ampliamente en la ciencia para medir longitud (metros), peso (gramos) y capacidad (litros). Redondee cada decimal a la centésima más cercana.

a. 1 pie equivale a 0.3048 metros.

b. 1 milla equivale a 1609.344 metros.

c. 1 libra equivale 453.59237 gramos.

d. 1 galón equivale a 3.785306 litros.

58. RÉCORDS MUNDIALES En octubre de 2004 cuatro mujeres americanas lograron récords mundiales en natación. Abajo se dan sus tiempos en el formato *minutos: segundos*. Redondee cada uno a la décima de segundo más cercana.

100-metros dorso	Natalie Coughlin	0:59.58
200-metros dorso	Amanda Beard	2:22.44
400-metros libres	Janet Evans	4:03.85
800-metros libres	Janet Evans	8:16.22
1500-metros libres	Janet Evans	15:52.10

59. GEOLOGÍA Los geólogos clasifican los tipos de suelo de acuerdo al tamaño de los granos que constituyen el suelo. Abajo se muestran las cuatro clasificaciones principales. Complete la tabla clasificando cada muestra.

Arcilla	0.00008 pulg. y menores
Aluvión	0.00008 pulg. a 0.002 pulg.
Arena	0.002 pulg. a 0.08 pulg.
Grava	0.08 pulg. a 0.15 pulg.

Muestra	Ubicación	Tamaño (pulg)	Clasificación
A	Ribera del río	0.009	
B	Estanque	0.0007	
C	Esquina NE	0.095	
D	Lago seco	0.00003	

60. MICROSCOPIOS Un microscopio usado en un laboratorio es capaz de ver estructuras que varían en tamaño desde 0.1 a 0.0001 centímetros. ¿Cuáles de las estructuras que se muestran en la tabla serían visibles con este microscopio?

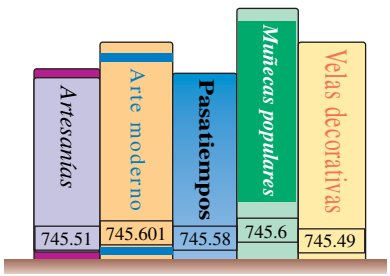
Estructura	Tamaño (cm)
Bacteria	0.00011
Célula vegetal	0.015
Virus	0.000017
Célula animal	0.00093
Fibra de asbesto	0.0002

61. CALIDAD DEL AIRE La siguiente tabla muestra las ciudades que tenían la mayor concentración de ozono en una hora determinada (en partes por millón) durante el verano de 1999. Ordene las ciudades, empezando con la ciudad que tenía la mayor lectura de ozono.

Crestline, California	0.170
Galveston, Texas	0.176
Houston, Texas	0.202
Texas City, Texas	0.206
Westport, Connecticut	0.188
White Plains, Nueva York	0.171

Fuente: *Los Angeles Times* (18 de agosto de 1999).

62. EL SISTEMA DECIMAL DEWEY Uno de los sistemas para clasificación de libros en una biblioteca es el Sistema Decimal Dewey. Los libros del mismo tema se agrupan por número. Por ejemplo, a los libros de arte se les asignan números entre 700 y 799. Cuando se les pone en los estantes, los libros tienen que estar en orden numérico de izquierda a derecha. ¿Cómo deberían reacomodarse los libros de la figura para que estén en el orden apropiado?

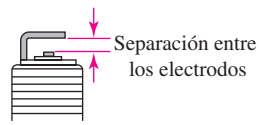


63. LAS OLIMPIADAS En la siguiente tabla se muestran los resultados femeniles de las competencias de gimnasia globales en los Juegos Olímpicos de Atenas 2004. ¿Cuáles gimnastas ganaron las medallas de oro, plata y bronce?

Nombre	País	Puntuación
Nan Zhang	China	38.049
Ana Pavlova	Rusia	38.024
Nicoleta Sofronie	Rumania	37.948
Carly Patterson	U.S.A.	38.387
Svetlana Khorkina	Rusia	38.211
Irina Yarotska	Ucrania	37.687

64. AFINACIONES Se quitaron las seis bujías de un motor de automóvil Nissan y se revisó la separación entre los electrodos de las bujías. Si las especificaciones de la separación de los electrodos indican que debe ser de 0.031 a 0.035 de pulgada, ¿cuáles son las bujías que deben reemplazarse?

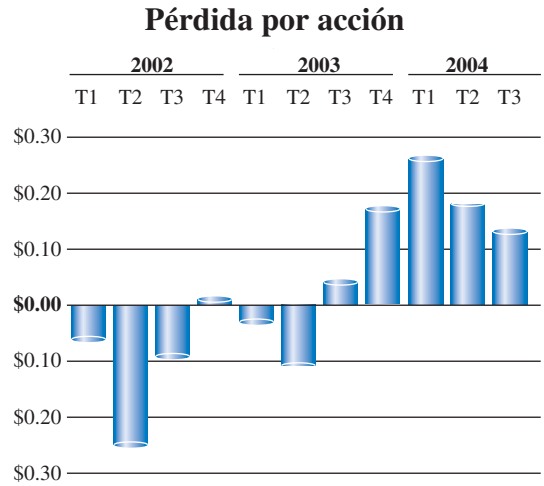
Cilindro 1: 0.035 pulg
Cilindro 2: 0.029 pulg
Cilindro 3: 0.033 pulg
Cilindro 4: 0.039 pulg
Cilindro 5: 0.031 pulg
Cilindro 6: 0.032 pulg



65. COMERCIO ELECTRÓNICO La ganancia (o pérdida) en el valor de una acción de Amazon.com se muestra en la gráfica siguiente para once trimestres. (Para propósitos contables, el año se divide en cuatro trimestres.)

a. ¿En qué trimestre de qué año hubo la mayor ganancia? Estime la ganancia.

b. ¿En qué trimestre de qué año hubo la mayor pérdida? Estime la pérdida.



Fuente: Amazon.com

66. PRECIO DE LA GASOLINA Refiérase a los datos de la tabla. Después construya una gráfica de línea que muestre el promedio nacional de precios al menudeo por galón para la gasolina regular sin plomo para los años de 1997 a 2003 (de acuerdo con *The World Almanac 2005*).

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Precio (¢)	123.4	105.9	116.5	151.0	146.1	135.8	159.1

Fuente: *The World Almanac 2005*

POR ESCRITO

67. Explique la diferencia entre decenas y décimas.

68. "Mientras más dígitos contenga un número, éste será mayor". ¿Es verdadera esta afirmación? Explique.

69. ¿Cómo se relacionan las fracciones y los decimales?

70. Explique los beneficios de un sistema monetario que esté basado en decimales en lugar de fracciones.

71. La ilustración siguiente muestra la notación inusual que usan muchas gasolinerías para expresar el precio por galón de la gasolina. Explique lo que significa esta notación.

72. Escriba una definición para cada una de estas palabras.

década *decatlón* *decimal*

REPASO

73. Sume: $75\frac{3}{4} + 88\frac{4}{5}$

74. Multiplique: $\frac{2}{15}\left(-\frac{5}{4}\right)$

75. Evalúe: $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

76. Evalúe: $\frac{6 + (5 - 2)^2}{3(2 - 1)}$

77. Encuentre el área de un triángulo con base de 16 pulg y altura de 9 pulg.

78. Exprese la fracción $\frac{2}{3}$ como una fracción equivalente con denominador 12.

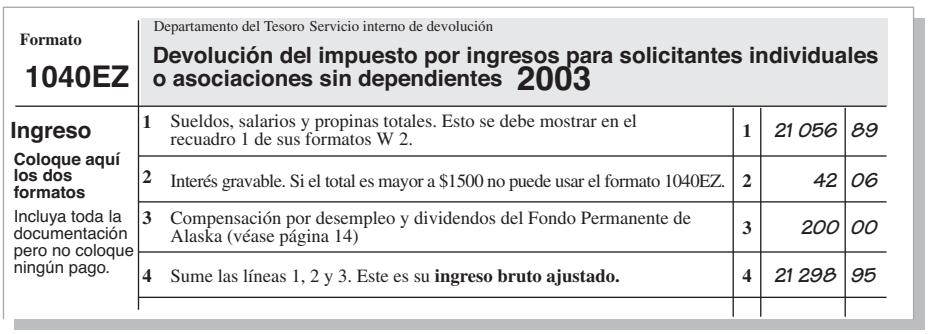
79. Sume: $-2 + (-3) + 4$

80. Reste: $-15 - (-6)$

4.2 Suma y resta de decimales

- Suma de decimales
- Resta de decimales
- Suma y resta de decimales con signo

Para sumar o restar objetos éstos tienen que ser similares. El formato para la declaración federal de impuesto de ingresos que se muestra en la figura 4.4 tiene una línea vertical para asegurarse de que los dólares se sumen con dólares y los centavos se sumen con centavos. En esta sección mostramos cómo se suman y restan decimales usando este tipo de formato en columnas verticales.



Formato **1040EZ**

Departamento del Tesoro Servicio interno de devolución

Devolución del impuesto por ingresos para solicitantes individuales o asociaciones sin dependientes 2003

Ingreso

Coloque aquí los dos formatos

Incluya toda la documentación pero no coloque ningún pago.

1	Sueldos, salarios y propinas totales. Esto se debe mostrar en el recuadro 1 de sus formatos W 2.	1	21 056	89
2	Interés gravable. Si el total es mayor a $1500 no puede usar el formato 1040EZ.	2	42	06
3	Compensación por desempleo y dividendos del Fondo Permanente de Alaska (véase página 14)	3	200	00
4	Sume las líneas 1, 2 y 3. Este es su **ingreso bruto ajustado.**	4	21 298	95

FIGURA 4.4

Suma de decimales

Cuando se suman decimales, se alinean las columnas de tal forma que las unidades se sumen con unidades, las décimas con décimas, las centésimas con centésimas y así sucesivamente. Considere el siguiente problema como un ejemplo.

Alinee las columnas y el punto decimal verticalmente. Después sume los números

$$\begin{array}{r} 12.140 \\ 3.026 \\ 4.000 \\ +\ 0.700 \\ \hline 19.866 \end{array}$$

Escriba el punto decimal en el resultado directamente debajo de los puntos decimales en el problema.

Suma de decimales

Para sumar números decimales:

1. Se alinean los puntos decimales usando el formato de columna vertical.
2. Se suman los números decimales como si se tratara de números enteros.
3. Se escribe el punto decimal en el resultado directamente debajo de los puntos decimales en el problema.

Autoevaluación 1
Sume: 0.07 + 35 + 0.888 + 4.1

Respuesta 40.058

EJEMPLO 1 Sume: 1.903 + 0.6 + 8 + 0.78.

Solución

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ 1.903 \\ 0.600 \\ 8.000 \\ +\ 0.780 \\ \hline 11.283 \end{array}$$

Para facilitar la suma por columnas, escriba dos ceros después del 6, un punto decimal y tres ceros después del 8 y un cero después de 0.78

Lleve un 2 (se muestra en azul) a la columna de las unidades.

El resultado es 11.283

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Prevención de ataques cardiacos

La gráfica de barras en la figura 4.5 muestra la cantidad de fibra (en gramos) que incluye una ración estándar de varios alimentos. Se cree que los hombres pueden reducir significativamente su riesgo de ataques cardíacos si ingieren al menos 25 gramos de fibra diariamente. ¿Esta dieta cumple o excede el requerimiento diario de 25 gramos de fibra?

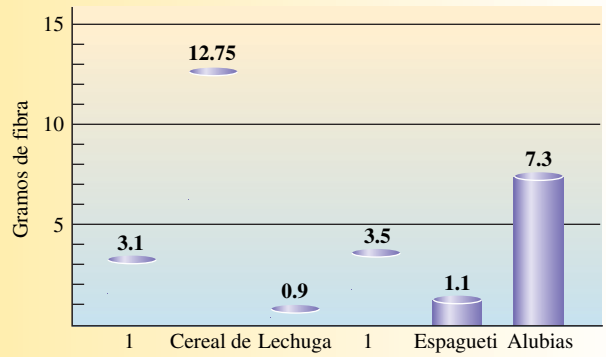


FIGURA 4.5

Para calcular la ingesta total de fibra, se suma el contenido de fibra de cada uno de los alimentos. Se puede usar una calculadora científica para sumar los decimales.

3.1 [+] 12.75 [+] .9 [+] 3.5 [+] 1.1 [+] 7.3 [=] 28.65

Como 28.65 > 25, esta dieta excede el requerimiento diario de 25 gramos.

Resta de decimales

Para restar decimales, éstos se alinean con el punto decimal y las columnas correspondientes, de tal forma que se restan los objetos semejantes: décimas de décimas, centésimas de centésimas y así sucesivamente.

Resta de decimales

Para restar números decimales:

1. Alinee los puntos decimales usando el formato de columna vertical.
2. Reste los números como lo haría si restara números enteros.
3. Escriba el punto decimal directamente debajo de los puntos decimales en el problema.

EJEMPLO 2 Reste: **a.** 279.6 − 138.7 y **b.** 15.4 − 13.059.

Solución

a.
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\ 16} \\ 279.\not{6} \\ -138.7 \\ \hline 140.9 \end{array}$$

Para restar en la columna de las décimas pida un 1 en la forma de 10 décimas de la columna de las unidades. Sume 10 al 6 en la columna de las décimas lo que da 16 (se muestra en azul).

b.
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 9\ 10\ 10} \\ 15.\not{4}\ \not{0}\ \not{0} \\ -13.0\ 5\ 9 \\ \hline 2.3\ 4\ 1 \end{array}$$

Añada dos ceros a la derecha de 15.4 para que lo que se lleve sea más fácil. Primero pida de la columna de las décimas y después pida de la columna de las centésimas.

Autoevaluación 2
Reste:
a. 382.5 − 227.1
b. 30.1 − 27.122

Respuestas: **a.** 155.4, **b.** 2.978

EJEMPLO 3 **Programas de acondicionamiento.** Un jugador de fútbol cuyo peso es de 350 libras perdió 15.7 libras durante la primera semana de práctica. Durante la segunda semana ganó 4.9 libras. Encuentre su peso después de las primeras dos semanas de práctica.

Solución La palabra *perdió* indica resta. La palabra *ganó* indica suma.

Peso inicial	menos	pérdida de peso en la primera semana	más	ganancia de peso en la segunda semana	es igual a	peso después de dos semanas de práctica

$$\mathbf{350 - 15.7} + 4.9 = \mathbf{334.3} + 4.9$$

Trabajando de izquierda a derecha realice primero la resta: 350 − 15.7 = 334.3

$$= 339.2$$

Efectúe la suma

El peso del jugador es 339.2 libras después de dos semanas de práctica.

Globos meteorológicos INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Un globo meteorológico gigante está fabricado con neopreno, sustancia ahulada flexible que tiene un espesor (cuando el globo está desinflado) de 0.011 pulgadas. Cuando el globo se infla con helio, el espesor cambia a 0.0018 pulgadas. Para encontrar el cambio en el espesor, necesitamos restar. Se puede usar una calculadora científica para restar los decimales.

.011 [−] .0018 [=] 0.0092

Después que se infla el globo, el neopreno pierde 0.0092 pulgadas de espesor.

Suma y resta de decimales con signo

Para sumar decimales con signo se aplican las mismas reglas que rigen la suma de números enteros.

Suma de dos decimales

Con el mismo signo: sume los valores absolutos y deje el mismo signo para la suma.

Con signos distintos: reste sus valores absolutos (el menor del mayor) y deje el signo del número que tiene mayor valor absoluto para la suma.

EJEMPLO 4

Sume: $-6.1 + (-4.7)$.

Solución Como ambos decimales son negativos, se suman sus valores absolutos y se coloca el signo menos al resultado.

$-6.1 + (-4.7) = -10.8$ Sume los valores absolutos 6.1 y 4.7, lo que da 10.8. Use su signo común.

Autoevaluación 4
Sume: $-5.04 + (-2.32)$

Respuesta -7.36

EJEMPLO 5

Sume: $5.35 + (-12.9)$.

Solución En este ejemplo los signos son diferentes. Como -12.9 tiene un valor absoluto mayor, se resta 5.35 de 12.9 y se obtiene 7.55, en consecuencia se coloca el signo menos al resultado.

$5.35 + (-12.9) = -7.55$

Autoevaluación 5
Sume: $-21.4 + 16.75$

Respuesta -4.65

EJEMPLO 6

Reste: $-4.3 - 5.2$.

Solución Para restar decimales con signo, se puede sumar el opuesto del decimal que se va a restar.

$-4.3 - 5.2 = -4.3 + (-5.2)$ Sume el opuesto de 5.2 que es -5.2.

$= -9.5$ Sume los valores absolutos 4.3 y 5.2 para obtener 9.5. Coloque el signo negativo al resultado.

Autoevaluación 6
Reste: $-1.18 - 2.88$

Respuesta -4.06

EJEMPLO 7

Reste: $-8.37 - (-16.2)$.

Solución

$-8.37 - (-16.2) = -8.37 + 16.2$ Sume el opuesto de -16.2, que es 16.2.

$= 7.83$ Reste el menor valor absoluto del mayor, 8.37 de 16.2 para obtener 7.83. Como 16.2 tiene el mayor valor absoluto el resultado es positivo.

Autoevaluación 7
Reste: $-2.56 - (-4.4)$

Respuesta 1.84

EJEMPLO 8 Evalúe: $-12.2 - (-14.5 + 3.8)$.

Solución Primero hacemos la suma de los elementos que están dentro del paréntesis.

$$-12.2 - (\mathbf{-14.5 + 3.8}) = -12.2 - (\mathbf{-10.7}) \quad \text{Realice la suma: } -14.5 + 3.8 = -10.7.$$
$$= -12.2 + 10.7 \quad \text{Sume el opuesto } -10.7.$$
$$= -1.5 \quad \text{Efectúe la suma.}$$

Autoevaluación 8
Evalúe: $-4.9 - (-1.2 + 5.6)$

Respuesta -9.3

Sección 4.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios vacíos.*

1. A la respuesta a un problema de suma se le llama _____.
2. La respuesta a un problema de resta se le llama _____.

CONCEPTOS

3. Para restar decimales, sume el _____ del decimal que se está restando.
4. **a.** Sume: $0.3 + 0.17$.
   b. Escriba 0.3 y 0.17 como fracciones. Encuentre un denominador común de las fracciones y súmelas.
   c. Exprese la respuesta final de la parte b como decimal.
   d. Compare las respuestas de la parte a y la parte c.

NOTACIÓN

5. Todo número entero tiene a su derecha un _____ decimal no escrito.
6. En el problema de resta de abajo tenemos que llevar. ¿Cuánto se lleva del 3 y de qué forma se lleva?

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,11}\\ 29.3\not{1} \\ -25.16 \\ \hline \end{array}$$

PRÁCTICA *Haga cada suma.*

7. $\begin{array}{r} 32.5 \\ +\ 7.4 \\ \hline \end{array}$
8. $\begin{array}{r} 6.3 \\ +13.5 \\ \hline \end{array}$
9. $\begin{array}{r} 21.6 \\ +33.12 \\ \hline \end{array}$
10. $\begin{array}{r} 19.4 \\ +31.95 \\ \hline \end{array}$
11. $12 + 3.9$
12. $0.01 + 3.6$
13. $0.03034 + 0.2003$
14. $19.9 + 19.9$
15. $247.9 + 40 + 0.56$
16. $0.0053 + 1.78 + 6$
17. $45 + 9.9 + 0.12 + 3.02$
18. $505.01 + 23 + 0.989 + 12.07$

Realice cada resta.

19. $\begin{array}{r} 12.98 \\ -\ 3.45 \\ \hline \end{array}$
20. $\begin{array}{r} 1.6 \\ -0.16 \\ \hline \end{array}$
21. $\begin{array}{r} 78.1 \\ -\ 7.81 \\ \hline \end{array}$
22. $\begin{array}{r} 202.234 \\ -\ 19.34 \\ \hline \end{array}$
23. $5 - 0.023$
24. $30 - 11.98$
25. $24 - 23.81$
26. $7.001 - 5.9$

Efectúe cada suma

27. $-45.6 + 34.7$
28. $-19.04 + 2.4$
29. $46.09 + (-7.8)$
30. $34.7 + (-30.1)$
31. $-7.8 + (-6.5)$
32. $-5.78 + (-33.1)$
33. $-0.0045 + (-0.031)$
34. $-90.09 + (-0.087)$

Resuelva cada resta.

35. $-9.5 - 7.1$
36. $-7.08 - 14.3$
37. $30.03 - (-17.88)$
38. $143.3 - (-64.01)$

39. $-2.002 - (-4.6)$ **40.** $-0.005 - (-8)$

41. $-7 - (-18.01)$ **42.** $-63.04 - (-8.911)$

Evalúe cada expresión. Recuerde que primero se realiza cualquier cálculo indicado entre paréntesis.

43. $(3.4 - 6.6) + 7.3$

44. $3.4 - (6.6 + 7.3)$

45. $(-9.1 - 6.05) - (-51)$

46. $-9.1 - (-6.05) + 51$

47. $16 - (67.2 + 6.27)$

48. $-43 - (0.032 - 0.045)$

49. $(-7.2 + 6.3) - (-3.1 - 4)$

50. $2.3 + [2.4 - (2.5 - 2.6)]$

51. $|-14.1 + 6.9| + 8$

52. $15 - |-2.3 + (-2.4)|$

53. Encuentre la suma de *dos y cuarenta* y *tres centésimas con cinco y seis décimas.*

54. Encuentre la diferencia entre *diecinueve centésimas* y *seis milésimas.*

APLICACIONES

55. PÁGINAS DEPORTIVAS En las páginas deportivas de cualquier periódico se usan con bastante frecuencia los números decimales.

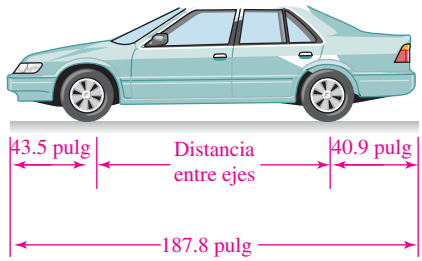
a. "Los corredores alemanes de bobsled establecieron hoy un récord mundial con una corrida final de 53.03, terminando delante del equipo italiano por sólo 14 milésimas de segundo". ¿Qué tiempo hizo el equipo italiano de bobsled?

b. "El título de patinaje femenil artístico se decidió por sólo treinta y tres centésimas de punto". Si el puntaje total de la ganadora fue de 102.71, ¿cuál fue el total del segundo lugar?

56. ENFERMERÍA La tabla siguiente muestra la hoja de salud de un paciente. Una enfermera olvidó que tenía que llenar ciertas partes. (Una temperatura de 98.6 °F se considera normal). Complete la tabla.

Día de la semana	Temperatura del paciente	Cifra por encima de lo normal
Lunes	99.7°	
Martes		2.5°
Miércoles	98.6°	
Jueves	100.0°	
Viernes		0.9

57. ESPECIFICACIONES DE VEHÍCULOS Se muestran las dimensiones de un automóvil compacto. Encuentre la distancia entre los ejes del vehículo.

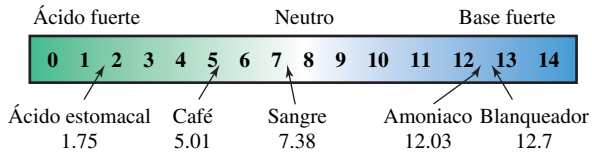


58. ESCALA DE pH En la química se usa la escala de pH (que se muestra abajo) para medir la fuerza de ácidos y bases. Encuentre la diferencia en las lecturas de pH entre:

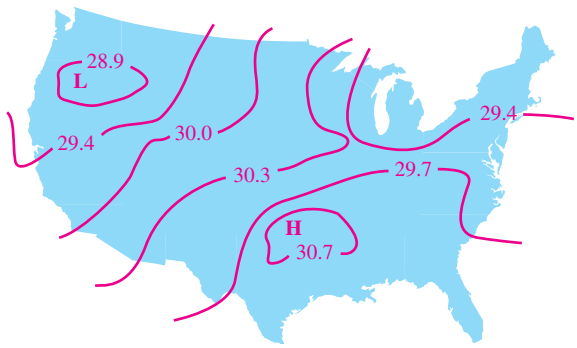
a. Un blanqueador y el ácido estomacal.

b. Amoníaco y café.

c. Sangre y café.



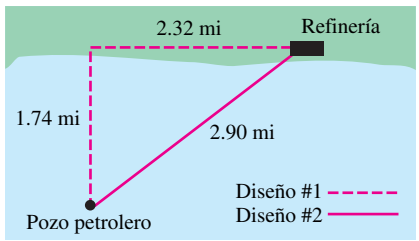
59. PRESIÓN BAROMÉTRICA El meteorólogo se encarga de registrar las presiones barométricas. En la zona de baja presión (B en el mapa) el tiempo es a menudo tormentoso. El tiempo es normalmente bueno en la zona de alta presión (A). ¿Cuál es la diferencia en las lecturas que corresponden a las zonas de presión más alta y más baja? ¿En qué parte del país esperaría que el tiempo fuese bueno?



60. CONTROL DE CALIDAD Una compañía de electrónica tiene especificaciones estrictas en el encapsulado de los circuitos integrados de silicio que se utilizan en una computadora. La compañía sólo instalará los circuitos integrados cuyo espesor se encuentre dentro de la tolerancia de 0.05 centímetros. La tabla de la página siguiente indica las especificaciones para dos tipos de circuitos. Llene los espacios y complete la tabla.

Tipo de circuito	Espesor indicado	Intervalo de aceptación	
		Bajo	Alto
A	0.78 cm		
B	0.643 cm		

61. PERFORACIONES MARÍTIMAS Una compañía necesita construir un ducto desde un pozo petrolero marino hasta una refinería localizada en la costa. Los ingenieros de la compañía tienen dos planes en consideración, según se muestra. Use la información de la ilustración para completar la tabla.



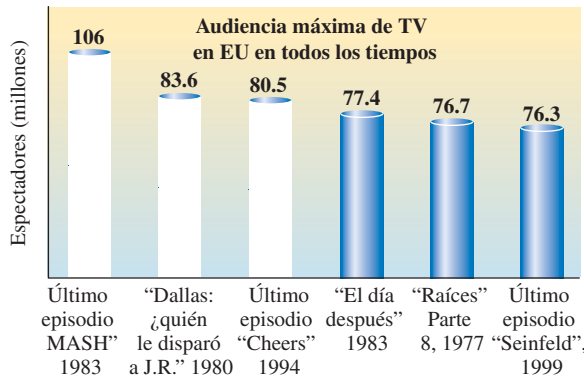
	Ducto submarino (mi)	Ducto subterráneo (mi)	Longitud total (mi)
Diseño 1			
Diseño 2			

62. TELEVISIÓN La siguiente ilustración muestra los seis programas televisivos más vistos de todos los tiempos (excluyendo los juegos del Super Bowl).

a. ¿Cuál fue la audiencia combinada de todos los programas?

b. ¿Cuánta gente vio el último episodio de "MASH" en comparación con los espectadores que vieron el último episodio de "Seinfeld"?

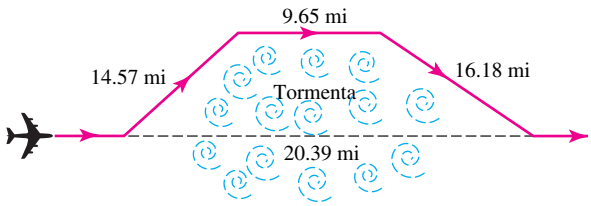
c. ¿Cuánta gente tendría que haber visto el último episodio de "Seinfeld" para que se igualara con el quinto lugar?



Fuente: Nielsen Media Research

63. CAMPEONES (PLUSMARQUISTAS) Florence Griffith-Joyner de Estados Unidos aún conserva el récord mundial de los 100 metros: 10.49 segundos. Jodie Henry de Australia ostenta el récord mundial de nado libre en los 100 metros. El tiempo de Jodie es 53.52. ¿Qué tanto más rápido corrió Griffith-Joyner los 100 metros en comparación con Henry quien los recorrió a nado?

64. TRAYECTORIAS DE VUELO Encuentre la distancia total que debe viajar un avión para evitar pasar a través de la tormenta.



65. FICHA DE DEPÓSITO A continuación se muestra una ficha para depósito en cuentas de ahorros. Encuentre el subtotal y luego el total del depósito.

Depósito

Efectivo	242	50
Cheques (endosados correctamente)	116	10
	47	93
Total indicado al reverso	359	16
Subtotal		
Menos efectivo	25	00
Total del depósito		

66. MOVIMIENTO Fuerzas como la de la corriente del agua o del viento pueden aumentar o disminuir la velocidad de un objeto que está en movimiento. Encuentre la velocidad de cada objeto.

a. La velocidad de un avión en aire quieto es de 450 mph y tiene un viento de cola de 35.5 mph a favor.

b. Un hombre puede remar su canoa a 5 mph en agua quieta, pero va corriente arriba. La velocidad de la corriente que fluye en contra del hombre es 1.5 mph.

67. LA RED CASERA DE COMPRAS La ilustración de la siguiente página muestra una descripción de un equipo de cocina que se vendió en televisión.

a. Encuentre la diferencia entre el precio al menudeo sugerido por el fabricante (PMSF) y el precio de venta.

b. Incluyendo gastos de envío (GE), ¿cuál será el costo total del equipo de cocina?

Artículo 229-442	
Equipo de cocina de 9 piezas modelo Continental	
Acero inoxidable	
PMSF	$149.79
Precio GE	$59.85
Precio de venta	**$47.85**
Gastos de envío	$7.95

68. VENTAS AL MENUDEO Complete la tabla llenando el precio al menudeo de cada electrodoméstico, partiendo del costo al distribuidor y la ganancia de la tienda.

Artículo	Costo	Ganancia	Precio de venta
Refrigerador	$510.80	$105.00	
Lavadora	$289.50	$55.50	
Secadora	$263.99	$67.50	

Evalúe cada expresión

69. $2\,367.909 + 5\,789.0253$

70. $0.00786 + 0.3423$

71. $9000.09 - 7067.445$

72. $1 - 0.004999$

73. $3{,}434.768 - (908 - 2.3 + .0098)$

74. $12 - (0.723 + 3.05611)$

POR ESCRITO

75. Explique por qué motivo se alínean los puntos decimales y las columnas correspondientes cuando se suman números decimales.

76. Explique por qué se escriben ceros adicionales a la derecha de un decimal como 7.89 sin que se afecte su valor.

77. Explique qué está mal en la operación que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 203.56 \\ 37 \\ +\ 0.43 \\ \hline 204.36 \end{array}$$

78. Considere la suma

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ 23.7 \\ 41.9 \\ +12.8 \\ \hline 78.4 \end{array}$$

Explique el significado del 2 pequeño que se escribe sobre la columna de las unidades.

REPASO

79. Sume: $44\frac{3}{8} + 66\frac{1}{5}$.

80. Simplifique: $\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{16}}$.

81. Multiplique: $\dfrac{-15}{26} \cdot 1\dfrac{4}{9}$.

82. Evalúe: $2 + 5[-2 - (6 + 1)]$.

4.3 Multiplicación de decimales

- Multiplicación de decimales
- Multiplicación de decimales por potencias de 10
- Multiplicación de decimales con signo
- Orden de las operaciones

Ahora nos enfocaremos en la operación de multiplicación. Primero desarrollamos el método que se utiliza para multiplicar decimales. Después usamos ese método para evaluar expresiones y resolver problemas con decimales.

Multiplicación de decimales

Para mostrar cómo se deben multiplicar los decimales examinamos la multiplicación $0.3 \cdot 0.17$, encontrando el producto de manera indirecta. Primero, escribimos 0.3 y 0.17 como fracciones y las multiplicamos. Después expresamos la fracción resultante como un decimal.

$$0.3 \cdot 0.17 = \frac{3}{10} \cdot \frac{17}{100}$$ Exprese 0.3 y 0.17 como fracciones.

$$= \frac{3 \cdot 17}{10 \cdot 100}$$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores.

$$= \frac{51}{1000}$$ Multiplique en el numerador y en el denominador.

$$= 0.051$$ Escriba $\frac{51}{1000}$ como decimal.

A partir de este ejemplo, se pueden hacer observaciones relacionadas con la multiplicación de decimales.

- Los dígitos en la respuesta se obtienen de multiplicar 3 y 17.

$$0.3 \cdot 0.17 = 0.051$$

$3 \cdot 17 = 51$

- La respuesta tiene 3 cifras decimales. La *suma* del número de cifras decimales en los factores 0.3 y 0.17 también es 3.

$$0.3 \cdot 0.17 = 0.051$$

1 cifra decimal; 2 cifras decimales; 3 cifras decimales

Estas observaciones sugieren la siguiente regla para multiplicar decimales.

Multiplicación de decimales

Para multiplicar dos decimales:

1. Multiplique los decimales como si fueran números enteros.
2. Encuentre el número total de cifras decimales en ambos factores.
3. Coloque el punto decimal en el resultado de tal forma que la respuesta tenga el mismo número de cifras decimales que el total hallado en el paso 2.

EJEMPLO 1

Multiplique: $5.9 \cdot 3.4$.

Solución Ignoramos los puntos decimales y multiplicamos los decimales como si fueran números enteros. Inicialmente, pensamos este problema como si fuera 59 por 34.

$$\begin{array}{r} 59 \\ \times\ 34 \\ \hline 236 \\ 177 \\ \hline 2006 \end{array}$$

Para colocar el punto decimal en el producto, encontramos el número total de dígitos a la derecha del punto decimal en los factores.

$$\begin{array}{r} 5.9 \\ \times\ 3.4 \\ \hline 236 \\ 177 \\ \hline 20.06 \end{array}$$

5.9 ← 1 cifra decimal; 3.4 ← 1 cifra decimal. La respuesta tendrá 1 + 1 = 2 cifras decimales.

Coloque el punto decimal de tal forma que la respuesta tenga 2 cifras decimales

Autoevaluación 1

Multiplique: $2.74 \cdot 4.3$

Respuesta 11.782

Cuando se multiplican decimales, no es necesario alinear los puntos decimales como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Autoevaluación 2
Multiplique: (0.0002)7.2

Respuesta 0.00144

EJEMPLO 2 Multiplique: 1.3(0.005).

Solución multiplicamos 13 por 5 y encontramos el número total de cifras decimales en 1.3 y en 0.005.

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \times 0.005 \\ \hline 65 \end{array}$$

← 1 cifra decimal
← 3 cifras decimales
} La respuesta tendrá 1 + 3 = 4 cifras decimales

Después se coloca el punto decimal en el resultado.

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \times\ 0.005 \\ \hline 0.\mathbf{00}65 \end{array}$$

Añada 2 ceros y coloque el punto decimal de tal manera que el producto tenga 4 cifras decimales.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Costos de la calefacción

Cuando factura a un hogar, una compañía de gas convierte la cantidad de gas natural utilizada a unidades de energía llamadas *termos*. Abajo se muestra el número de termos que se consumen en una casa durante un mes y el costo por termo.

Cargo al cliente . . . . . 39 termos @ $0.72264

Para encontrar el total de cargos en el mes, se multiplica el número de termos por el costo por termo: 39 · 0.72264

39 [×] .72264 [=] 28.18296

Redondeando al centavo más cercano se tiene que el total a pagar es $28.18.

Autoevaluación 3
Multiplique: 178(2.7)

Respuesta 480.6

EJEMPLO 3 Multiplique: 234(3.1).

Solución

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times\ 3.1 \\ \hline 23\,4 \\ 702 \\ \hline 725.4 \end{array}$$

← No tiene cifras decimales
← 1 cifra decimal
} La respuesta tendrá 0 + 1 = 1 cifra decimal.

Coloque el punto decimal de tal forma que la respuesta tenga 1 cifra decimal.

Multiplicación de decimales por potencias de 10

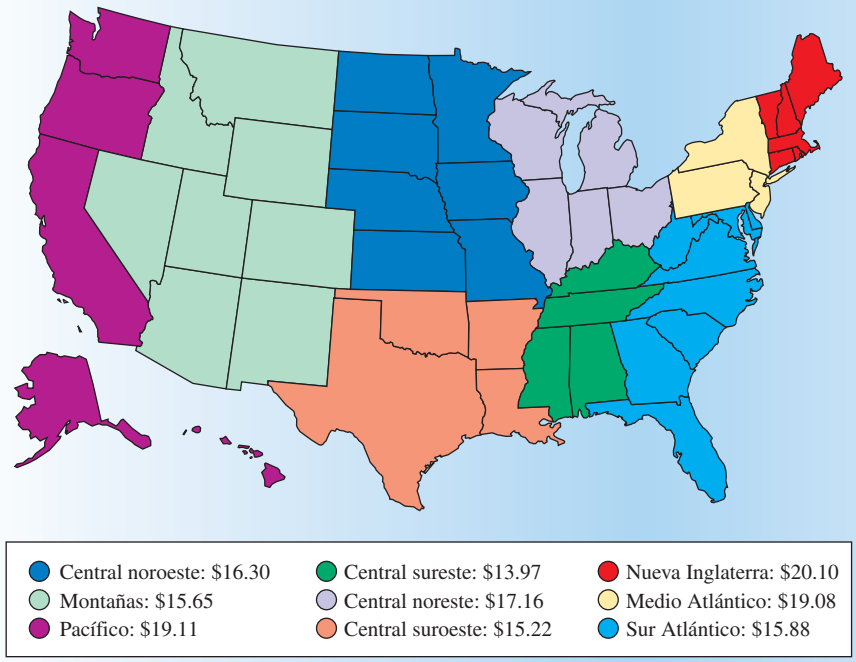
A los números 10, 100 y 1000 se les designa *potencias de 10* porque son los resultados de evaluar 10^1, 10^2 y 10^3, respectivamente. A fin de desarrollar una regla para determinar el producto cuando se multiplica un decimal por una potencia de 10, se multiplica 8.675 por tres potencias de 10 distintas.

Tiempo extra

PARA PENSAR A DETALLE

"Los empleados cubiertos por el Acta de Estándares de Trabajo Justo reciben una paga por tiempo extra laborado que supera las 40 horas en una semana de trabajo, la cuota mínima es de 1.5 veces la tarifa normal de trabajo". Departamento del Trabajo de Estados Unidos.

El mapa de Estados Unidos que se muestra a continuación está dividido en nueve regiones. Se indica también el salario promedio por hora para los trabajadores de la industria de cada región. Encuentre el salario promedio por hora que se aplica en la región donde usted vive. Calcule después el salario promedio por hora de tiempo extra para esa región.



Multiplique: $8.675 \cdot \mathbf{10}$

$$\begin{array}{r} 8.675 \\ \times \quad 10 \\ \hline 0000 \\ 8675 \\ \hline 86.750 \end{array}$$

La respuesta es 86.75.

Multiplique: $8.675 \cdot \mathbf{100}$

$$\begin{array}{r} 8.675 \\ \times \quad 100 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 8675 \\ \hline 867.500 \end{array}$$

La respuesta es 867.5

Multiplique: $8.675 \cdot \mathbf{1000}$

$$\begin{array}{r} 8.675 \\ \times \quad 1000 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 8675 \\ \hline 8675.000 \end{array}$$

La respuesta es 8675.

Se pueden hacer observaciones de estos resultados.

- En cada caso, la respuesta contiene los mismos dígitos que el factor 8.675
- Cuando se inspeccionan las respuestas, el punto decimal en el primer factor 8.675 parece haberse movido a la derecha en el proceso de multiplicación. El número de cifras decimales que se mueve depende de la potencia de 10 por la cual se multiplicó 8.675.

Un cero en 10	Dos ceros en 100	Tres ceros en 1000
$8.675 \cdot 10 = 8\,6.75$	$8.675 \cdot 100 = 8\,67.5$	$8.675 \cdot 1000 = 8\,675$
Se mueve 1 lugar a la derecha	Se mueve 2 lugares a la derecha	Se mueve 3 lugares a la derecha

Estas observaciones sugieren la siguiente regla.

Multiplicación de un decimal por una potencia de 10

Para multiplicar un decimal por una potencia de 10, mueva el punto decimal a la derecha tantas cifras como existan ceros en la potencia de 10.

Autoevaluación 4
Encuentre los productos:
a. $0.721 \cdot 100$
b. $6.08\ (1000)$

Respuestas **a.** 72.1, **b.** 6080

EJEMPLO 4

Encuentre cada producto: **a.** $2.81 \cdot 10$ y **b.** $0.076 \cdot 10\,000$

Solución

a. $2.81 \cdot 10 = 2\,8.1$ Como 10 tiene un cero mueva el punto decimal un lugar hacia la derecha.

b. $0.076 \cdot 10\,000 = 0760.$ Como 10 000 tiene 4 ceros mueva el punto decimal 4 lugares a la derecha. Escriba un cero adicional (mostrado en azul).

$= 760$

EJEMPLO 5 Tacómetros.

Un tacómetro indica la velocidad del motor en un vehículo en revoluciones por minuto (rpm). ¿Qué velocidad del motor indica el tacómetro de la figura 4.6?

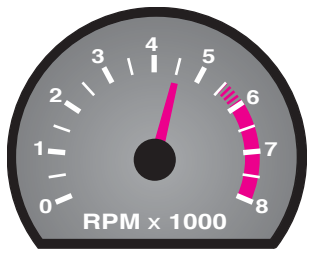


FIGURA 4.6

Solución La aguja apunta a 4.5. La notación "RPM $\times$ 1000" en el tacómetro indica que se debe multiplicar 4.5 por 1000 para encontrar la velocidad del motor.

$4.5 \cdot 1000 = 4\,500$ Como 1000 tiene 3 ceros, mueva el punto decimal 3 lugares a la derecha. Escriba dos ceros adicionales.

$= 4500$

La velocidad del motor es 4500 rpm.

Multiplicación de decimales con signo

Recuerde que el producto de dos números que tienen signos iguales es positivo, y el producto de dos números con signos diferentes es negativo.

Autoevaluación 6
Multiplique:
a. $6.6(-5.5)$
b. $(-44.968)(-100)$

EJEMPLO 6

Multiplique: **a.** $-1.8(4.5)$ y **b.** $(-1000)(-59.08)$

Solución

a. Como los decimales tienen signos distintos, su producto es negativo.

$-1.8(4.5) = -8.1$ Multiplique los valores absolutos 1.8 y 4.5 para obtener 8.1. El resultado es negativo.

b. Como los decimales tienen signos iguales su producto es positivo.

$(-1000)(-5908) = 59\,080$ Multiplique los valores absolutos 1000 y 59.08. Como 1000 tiene 3 ceros mueva el punto decimal 3 lugares a la derecha. Escriba un cero adicional.

Respuestas **a.** -36.3, **b.** 4496.8

EJEMPLO 7

Evalúe: **a.** $(2.4)^2$ y **b.** $(-0.05)^2$

Solución

a. $(2.4)^2 = 2.4 \cdot 2.4$ Escriba 2.4 como factor dos veces.

$= 5.76$ Realice la multiplicación.

b. $(-0.05)^2 = (-0.05)(-0.05)$ Escriba -0.05 como factor dos veces.

$= 0.0025$ Efectúe la multiplicación. El producto de dos decimales del mismo signo es positivo.

Autoevaluación 7

Evalúe:

a. $(-1.3)^2$

b. $(0.09)^2$

Respuestas **a.** 1.69, **b.** 0.0081

Orden de las operaciones

En los ejemplos restantes se aplicarán las reglas del orden de las operaciones para evaluar las expresiones que tienen decimales.

EJEMPLO 8

Evalúe: $-(0.6)^2 + 5|-3.6 + 1.9|$

Solución

$-(0.6)^2 + 5|-3.6 + 1.9| = -(0.6)^2 + 5|-1.7|$ Realice la suma dentro de las barras de valor absoluto.

$= -(0.6)^2 + 5(1.7)$ Simplifique: $|-1.7| = 1.7$.

$= -0.36 + 5(1.7)$ Encuentre la potencia $(0.6)^2 = 0.36$.

$= -0.36 + 8.5$ Efectúe la multiplicación $5(1.7) = 8.5$.

$= 8.14$ Haga la suma.

Autoevaluación 8

Evalúe:

$-2|-4.4 + 5.6| + (-0.8)^2$

Respuesta -1.76

Recuerde que para evaluar una fórmula empezamos reemplazando las letras con números específicos.

EJEMPLO 9

Evalúe la fórmula $S = 6.28r(h + r)$ para $h = 3.1$ y $r = 6$.

Solución

$S = 6.28\mathbf{r}(\mathbf{h} + \mathbf{r})$ $6.28r(h + r)$ significa $6.28 \cdot r \cdot (h + r)$.

$= 6.28(\mathbf{6})(\mathbf{3.1} + \mathbf{6})$ Reemplace r por 6 y h por 3.1.

$= 6.28(6)(9.1)$ Efectúe la suma dentro del paréntesis: $3.1 + 6 = 9.1$

$= 37.68(9.1)$ Haga la multiplicación: $6.28(6) = 37.68$

$= 342.888$ Realice la multiplicación.

Autoevaluación 9

Evalúe $V = 1.3pr^3$ para $p = 3.14$ y $r = 3$.

Respuesta 110.214

EJEMPLO 10 **Ingresos semanales.** La semana de trabajo de un cajero es de 40 horas semanales. Al término de su jornada diaria puede trabajar tiempo extra a razón de 1.5 veces su tarifa normal de $7.50 por hora. ¿Cuánto dinero ganará en una semana si trabaja 6 horas extra?

Solución Primero necesitamos encontrar su tarifa por hora extra que es 1.5 veces su tarifa normal de $7.50 por hora.

$$1.5(7.50) = 11.25$$

Su tarifa de tiempo extra es de $11.25 por hora. Para calcular sus ingresos totales semanales usamos el siguiente hecho.

Tarifa normal	por	40 horas	más	tarifa de tiempo extra	por	horas extra laboradas	igual a	ingresos totales

$$7.50(40) + 11.25(6) = 300 + 67.50 \quad \text{Realice la multiplicación}$$
$$= 367.50 \quad \text{Haga la suma}$$

Los ingresos de la semana del cajero son $367.50.

Sección 4.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. En el problema de multiplicación 2.89 · 15.7, a los números 2.89 y 15.7 se les llama _____. A la respuesta 45.373 se le llama _____.
2. A los números como 10, 100 y 1000 se les llama _____ de 10.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

3. Para multiplicar decimales, multiplíquelos como si fueran números _____ El número de cifras decimales en el producto es el mismo que la _____ del número de cifras decimales de los factores.
4. Para multiplicar un decimal por una potencia de 10 mueva el punto decimal a la _____ el mismo número de cifras decimales que el número de _____ en la potencia de 10.
5. **a.** Multiplique $\frac{3}{10}$ y $\frac{7}{100}$.
   b. Ahora escriba las dos fracciones de la parte (a) como decimales. Multiplíquelas en esa forma. Compare los resultados de la parte (a) y los de la parte (b).
6. **a.** Multiplique 0.11 y 0.3.
   b. Escriba los decimales de la parte (a) como fracciones. Multiplíquelos de esa forma. Compare los resultados de la parte (a) y los resultados de la parte (b).

NOTACIÓN

7. Suponga que el resultado de multiplicar dos decimales es 2.300. Escriba este resultado de una manera más simple.
8. Cuando se mueve el punto decimal a la derecha, ¿el número se hace más grande o más pequeño?

PRÁCTICA *Realice cada multiplicación.*

9. (0.4)(0.2)
10. (0.2)(0.3)
11. (−0.5)(0.3)
12. (0.6)(−0.7)
13. (1.4)(0.7)
14. (2.1)(0.4)
15. (0.08)(0.9)
16. (0.003)(0.9)
17. (−5.6)(−2.2)
18. (−7.1)(−4.1)
19. (−4.9)(0.001)
20. (0.001)(−7.09)
21. (−0.35)(0.24)
22. (−0.85)(0.42)
23. (−2.13)(4.05)
24. (3.06)(−1.82)
25. 16 · 0.6
26. 24 · 0.8
27. −7(8.1)
28. −5(4.7)
29. 0.04(306)
30. 0.02(417)
31. 60.61(−0.3)
32. −70.07 · 0.6
33. −0.2(0.3)(−0.4)
34. −0.1(−2.2)(0.5)
35. 5.5(10)(−0.3)
36. 6.2(100)(−0.8)
37. 4.2 · 10
38. 10 · 7.1
39. 67.164 · 100
40. 708.199 · 100
41. −0.056(10)
42. −100(0.0897)
43. 1,000(8.05)
44. 23.7(1000)

45. $0.098(10\,000)$ **46.** $3.63(10\,000)$

47. $-0.2 \cdot 1000$ **48.** $-1000 \cdot 1.9$

Complete cada tabla

49.

Decimal	Su cuadrado
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	

50.

Decimal	Su cubo
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	

Calcule cada una de las siguientes potencias.

51. $(1.2)^2$ **52.** $(2.3)^2$

53. $(-1.3)^2$ **54.** $(-2.5)^2$

Evalúe cada expresión.

55. $-4.6(23.4 - 19.6)$ **56.** $6.9(9.8 - 8.9)$

57. $(-0.2)^2 + 2(7.1)$ **58.** $(-6.3)(3) - (1.2)^2$

59. $(-0.7 - 0.5)(2.4 - 3.1)$

60. $(-8.1 - 7.8)(0.3 + 0.7)$

61. $(0.5 + 0.6)^2(-3.2)$

62. $(-5.1)(4.9 - 3.4)^2$

63. $|-2.6| \cdot |-7.2|$ **64.** $4|-3.1| + 5|-5.5|$

65. $(|-2.6 - 6.7|)^2$ **66.** $-3|-8.16 + 9.9|$

Evalúe cada fórmula.

67. $A = lw$ para $l = 5.3$ y $w = 7.2$

68. $A = \frac{1}{2}bh$ para $b = 7.5$ y $h = 6.8$

69. $P = 2l + 2w$ para $l = 3.7$ y $w = 3.6$

70. $C = 2\pi r$ para $\pi = 3.14$ y $r = 2.5$

APLICACIONES

71. ASIENTOS PARA UN CONCIERTO Se vendieron dos tipos de boletos para un concierto. Los asientos de luneta cuestan \$12.50, los asientos de los palcos cuestan \$15.75.

a. Complete la tabla siguiente y encuentre el ingreso por cada tipo de boleto.

b. Encuentre el ingreso total para las dos clases de boletos.

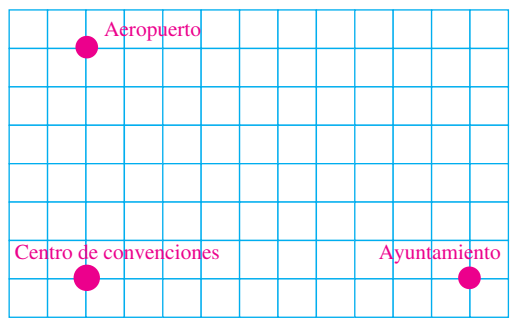
Tipo de boleto	Precio	Cantidad vendida	Ingreso
Luneta		1000	
Palcos		100	

72. PLANEACIÓN DE LA CIUDAD En el mapa de la ciudad las calles forman una cuadrícula. Las calles están separadas por una distancia de 0.35 millas. Encuentre la distancia de cada viaje.

a. Del aeropuerto al Centro de convenciones.

b. Del Ayuntamiento al Centro de convenciones.

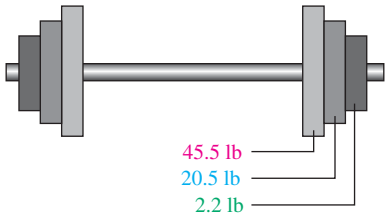
c. Del aeropuerto al Ayuntamiento.



73. DAÑO CAUSADO POR LAS TORMENTAS Después de una tormenta el suelo saturado que está en la parte baja de una colina empezó a ceder. Un equipo de exploración notó que una casa se había hundido 0.57 pulgadas inicialmente. En las dos semanas siguientes la casa se hundió a razón de 0.09 pulgadas por semana. ¿Qué tanto se hundió la casa durante este periodo de tres semanas?

74. USO DEL AGUA En mayo el nivel de agua de una presa alcanzó su mayor marca del año. Durante los meses de verano, conforme aumentaba la demanda del agua, la presa bajó de nivel. En los meses de mayo a junio bajó 4.3 pies por mes. En agosto, debido al aumento en la temperatura, bajó 8.7 pies adicionales. Para el mes de septiembre, ¿cuánto había disminuido el nivel del agua respecto a la mayor marca del año?

75. LEVANTAMIENTO DE PESAS La barra con pesas está cargada con discos de hierro. ¿Cuánto peso carga la barra?



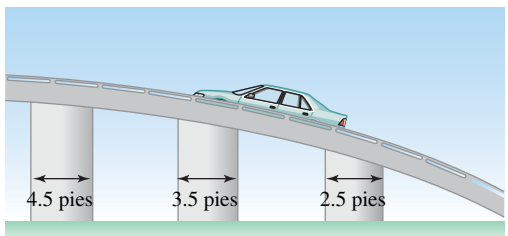
76. CUENTAS DE PLOMERÍA La siguiente factura de un trabajo de plomería se rompió. ¿A cuánto asciende el cargo por 4 horas de trabajo? ¿Cuál es el cargo total?

Plomería Carter 100 W Dalton Ave.		Factura #210
Cargo por servicio estándar 4 horas $40.55 por hora		$25.75
	Total	

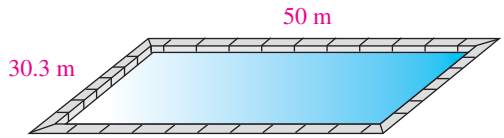
77. SUMINISTROS PARA PASTELERÍA Una pastelería adquiere varios tipos de nueces como ingredientes para galletas. Complete la tabla llenando el costo de cada compra.

Tipo de nuez	Precio por libra	Libras	Costo
Almendras	$5.95	16	
Nueces	$4.95	25	

78. ANÁLISIS La ilustración muestra el ancho de las tres columnas de un paso a desnivel que conecta a una autopista. Un análisis en computadora indica que cada columna debe hacerse más ancha en un factor de 1.4 para asegurar estabilidad durante un terremoto. De acuerdo con el análisis, ¿qué tan ancha debe ser cada columna?



79. CONSTRUCCIÓN DE ALBERCAS Se pueden usar unos ladrillos largos para bordear la orilla de una alberca. ¿Cuántos metros de ladrillo se necesitarán para construir el borde de la alberca que se muestra en la ilustración?



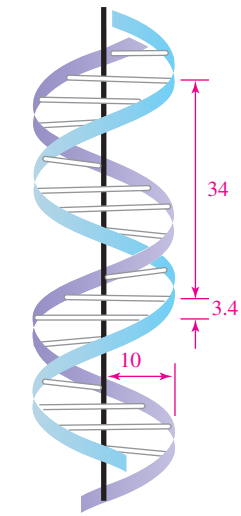
80. FUTBOL SOCCER El marco de una portería de soccer mide 24 pies de ancho por 8 de alto. Algunos funcionarios de ligas mayores proponen incrementar la longitud del marco en 1.5 pies y la altura de los postes en 0.75 pies.

a. ¿Cuál es el área de la portería actual?

b. ¿Cuál sería el área si se adoptara la propuesta?

c. ¿Cuánto aumentaría el área?

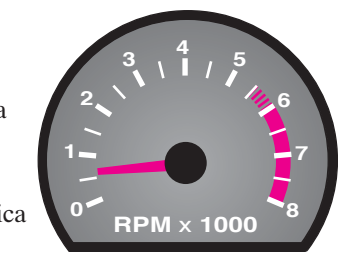
81. BIOLOGÍA. El ADN se encuentra en las células y con frecuencia se le conoce como el plano genético. En los humanos, determina características como el color de ojos, el color de pelo y la estatura. En la ilustración aparece un modelo de ADN. Si 1 Å (ángstrom) = 0.000000004 pulgadas, determine las tres dimensiones que se muestran en la ilustración.



82. TACÓMETROS

a. ¿Hacia qué número apunta la aguja del tacómetro? De su estimación en forma decimal.

b. ¿Qué velocidad del motor (en rpm) indica el tacómetro?



Use una calculadora para evaluar cada problema.

83. $(-9.0089 + 10.0087)(15.3)$

84. $(-4.32)^3 - 78.969$

85. $(18.18 + 6.61)^2 + (5 - 9.09)^2$

86. $304 - 3.780876(100)$

87. CONSUMO DE ENERGÍA ELÉCTRICA. Cuando se elabora la factura de la energía eléctrica que se consume en los domicilios, la compañía cobra en función del consumo en kilowatts hora. Un kilowatt hora (kW/h) es una medida estándar para medir la electricidad. Si el costo de 1 kW/h es \$0.14277, ¿a cuánto ascenderá la cuenta de una casa que usa 719 kW/h en un mes? Redondee la respuesta al centavo más cercano.

88. IMPUESTOS A SERVICIOS A algunas compañías de gas se les pide que cobren impuestos por el número de tanques que utiliza cada cliente en forma mensual. ¿Qué cantidad de impuestos se recauda por un uso de 31 tanques si el impuesto es \$0.00566 por tanque? Redondee al centavo más cercano.

POR ESCRITO

89. Explique cómo determinar en qué sitio se debe colocar el punto decimal en la respuesta cuando se multiplican dos decimales.

90. Enliste las semejanzas y diferencias entre la multiplicación de números enteros y la multiplicación de decimales.

91. ¿Qué es una cifra decimal?

92. Explique cómo multiplicar un decimal por una potencia de 10.

REPASO

93. Redondee 7346 a la centena más cercana.

94. Multiplique: $3\frac{1}{3}\left(-1\frac{4}{5}\right)$.

95. Escriba esta notación en palabras: $|-3|$.

96. ¿Cuál es el mcd de las fracciones cuyos denominadores son 4, 5 y 6?

97. Simplifique: $-\frac{8}{8}$.

98. Encuentre la mitad de 7 y eleve al cuadrado el resultado.

4.4 División de decimales

- División de un decimal por un número entero
- Divisores que son decimales
- Redondeo al dividir
- División de decimales por potencias de 10
- Orden de las operaciones

En el capítulo 1 usamos un proceso llamado división larga para dividir números enteros.

Formato de la división larga

$$\begin{array}{r} 2 \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 5\overline{)10} \leftarrow \text{Dividendo} \\ \underline{10} \\ 0 \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

En esta sección consideramos problemas de división en el que el divisor, el dividendo o ambos son decimales.

División de un decimal por un número entero

Para usar la división larga para dividir 47 entre 10 procedemos como sigue:

$$\begin{array}{r} 4\frac{7}{10} \\ 10\overline{)47} \\ \underline{40} \\ 7 \end{array}$$

Aquí el resultado se escribe en la forma cociente $+ \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$ forma.

Para hacer la misma división usando decimales, escribimos 47 como 47.0 y dividimos como si dividiéramos números enteros.

$$\begin{array}{r} 4.7 \\ 10\overline{)47.0} \\ \underline{40}\downarrow \\ 7\,0 \\ \underline{7\,0} \\ 0 \end{array}$$

Note que el punto decimal en el resultado queda directamente sobre el punto decimal del dividendo.

Después de restar 40 de 47 baje un cero.

Como $4\frac{7}{10} = 4.7$, cualquiera de los métodos da el mismo resultado. La segunda parte de esta discusión sugiere el siguiente método para dividir un decimal por un número entero.

División de un decimal por un número entero

Para dividir un decimal por un número entero:

1. Se escribe el problema en forma de división larga.
2. Se realiza la división como si se trabajara con números enteros.
3. Se escribe el punto decimal en el resultado, directamente sobre el punto decimal en el dividendo. Si es necesario, se pueden añadir ceros adicionales a la derecha del dividendo para permitir que se haga la división.

Autoevaluación 1
Divida: 101.44 ÷ 32

EJEMPLO 1 Divida: 71.68 ÷ 28.

Solución

$$\begin{array}{r} \cdot \\ 28\overline{)71.68} \end{array}$$

Escriba el punto decimal en la respuesta directamente encima del punto decimal en el dividendo.

$$\begin{array}{r} 2.56 \\ 28\overline{)71.68} \\ \underline{56}\downarrow \\ 15\,6 \\ \underline{14\,0}\downarrow \\ 1\,68 \\ \underline{1\,68} \\ 0 \end{array}$$

Divida como si trabajara con números enteros.

El residuo es 0.

La respuesta es 2.56.

Podemos comprobar este resultado multiplicando el divisor por el cociente; su producto debe ser igual al dividendo. Como $2.56 \cdot 28 = 71.68$, el resultado es correcto.

Respuesta 3.17

Autoevaluación 2
Divida: 3.4 ÷ 4

EJEMPLO 2 Divida: 19.2 ÷ 5.

Solución

$$\begin{array}{r} 3.8 \\ 5\overline{)19.2} \\ \underline{15}\downarrow \\ 4\,2 \\ \underline{4\,0} \\ 2 \end{array}$$

Todos los dígitos en el dividendo se usan, pero el residuo no es 0.

Podemos escribir un cero a la derecha del 2 en el dividendo y continuamos el proceso de división. Recuerde que escribir ceros adicionales a la derecha del punto decimal no cambia el valor del decimal.

$$\begin{array}{r} 3.84 \\ 5\overline{)19.20} \\ \underline{15} \\ 42 \\ \underline{40} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

Escriba un cero a la derecha del 2 y bájelo.

Continúe dividiendo

El residuo es 0.

La respuesta es 3.84.

Comprobación: $3.84 \cdot 5 = 19.2$.

Respuesta 0.85

Divisores que son decimales

Cuando el divisor es un decimal, lo cambiamos a un número entero y procedemos como en la división de números enteros. Para ilustrarlo consideremos el problema $0.36\overline{)0.2592}$, donde el divisor es un decimal. Primero expresamos la división de otra forma.

$0.36\overline{)0.2592}$ se puede representar como $\dfrac{0.2592}{0.36}$

Para escribir el divisor, 0.36, como un entero su punto decimal tiene que moverse 2 lugares a la derecha. Esto se puede lograr multiplicándolo por 100. Sin embargo, si el denominador de una fracción se multiplica por 100 el numerador también tiene que multiplicarse por 100 para que la fracción conserve el mismo valor.

$$\frac{0.2592}{0.36} = \frac{0.2592 \cdot \mathbf{100}}{0.36 \cdot \mathbf{100}}$$

Multiplique numerador y denominador por 100.

$$= \frac{25.92}{36}$$

Multiplicar por 100 mueve ambos puntos decimales 2 lugares a la derecha

Esta fracción representa el problema de división $36\overline{)25.92}$. De este resultado podemos hacer las siguientes observaciones.

- El problema de división $0.36\overline{)0.2592}$ es equivalente a $36\overline{)25.92}$; esto es, tienen la misma respuesta.
- El punto decimal *tanto* en el divisor como en el dividendo de la primera división se movieron dos cifras a la derecha para crear un segundo problema de división.

$0.36\overline{)0.2592}$ se convierte en $36\overline{)25.92}$

Estas observaciones sugieren la siguiente regla para la división con decimales.

División con divisor decimal

Para dividir con un divisor decimal:

1. Mueva el punto decimal del divisor de tal manera que se convierta en un número entero.
2. Mueva el punto decimal del dividendo el mismo número de lugares a la derecha.
3. Divida como si trabajara con números enteros. Escriba el punto decimal en la respuesta directamente arriba del punto decimal en el dividendo.

Autoevaluación 3

Divida: $\frac{0.6045}{0.65}$

EJEMPLO 3

Divida: $\frac{0.2592}{0.36}$.

Solución

$0\ 36\overline{)0\ 25.92}$ Mueva el punto decimal dos lugares a la derecha en el divisor y el dividendo.

$$\begin{array}{r} 0.72 \\ 36\overline{)25.92} \\ \underline{25\ 2\downarrow} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

Ahora divida como si fueran números enteros. Escriba el punto decimal en la respuesta directamente sobre el punto decimal del dividendo.

El resultado es 0.72.

Respuesta 0.93

Comprobación: $0.72 \cdot 36 = 25.92$.

Redondeo al dividir

En el ejemplo 3 el proceso de división terminó después de obtener un cero de la segunda sustracción. A veces cuando dividimos la sustracción nunca da un cero en el residuo y el proceso de división continúa indefinidamente. En tales casos redondeamos el resultado.

EJEMPLO 4

Divida: $\frac{2.35}{0.7}$. Redondee a la centésima más cercana.

Solución Usando la forma de división larga tenemos $0.7\overline{)2.35}$.

$0\ 7\overline{)2\ 3.5}$ Para escribir el divisor como número entero mueva el punto decimal 1 lugar a la derecha. Haga lo mismo para el dividendo. Coloque el punto decimal en la respuesta directamente arriba del punto decimal en el dividendo.

$7\overline{)23.500}$ Para redondear la columna de las centésimas dividimos hasta la columna de las milésimas. Escribimos dos ceros a la derecha del dividendo.

$$\begin{array}{r} 3.357 \\ 7\overline{)23.500} \\ \underline{21} \\ 2\ 5 \\ \underline{2\ 1} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$$

Después de dividir hasta la columna de las milésimas redondeamos en la columna de las centésimas. El dígito a redondear es 5. El dígito de prueba es 7.

La respuesta al centésimo más cercano es 3.36.

El núcleo de una célula — INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

El núcleo de una célula contiene información vital sobre la célula en forma de ADN. El núcleo es muy pequeño: Una célula animal típica tiene un núcleo que mide sólo 0.00023622 pulgadas de ancho. ¿Cuántos núcleos tendrían que ponerse uno tras otro para alcanzar una longitud de 1 pulgada?

Para encontrar cuántas longitudes de 0.00023622 hay en una pulgada debemos usar división: $1 \div 0.00023622$.

1 [÷] .00023622 [=] 4233.3418

Serían aproximadamente 4233 núcleos uno tras otro los que medirían 1 pulgada.

División de decimales por potencias de 10

Para desarrollar un conjunto de reglas para la división por una potencia de 10 consideremos el problema $8.13 \div 10$.

$$
\begin{array}{r}
0.813 \\
10\overline{)8.130} \\
\underline{0} \\
8\,1 \\
\underline{8\,0} \\
13 \\
\underline{10} \\
30 \\
\underline{30} \\
0
\end{array}
$$

Escriba un cero a la derecha del 3.

Notamos que el cociente, 0.813, y el dividendo, 8.13, son los mismos excepto por el lugar de los puntos decimales. El cociente se puede obtener fácilmente moviendo el punto decimal del dividendo un lugar a la izquierda. Esta observación sugiere la siguiente regla para dividir un decimal por una potencia de 10.

División de un decimal por una potencia de 10

Para dividir un decimal por una potencia positiva de 10 mueva el punto decimal a la izquierda tantas cifras como ceros tenga la potencia de 10.

EJEMPLO 5 Encuentre el cociente: **a.** $16.74 \div 10$ y **b.** $8.6 \div 10\,000$.

Solución

a. $16.74 \div 10 = 1.6\,74$ Como 10 tiene 1 cero mueva el punto decimal 1 cifra a la derecha.

b. $8.6 \div 10\,000 = .0008\,6$ Como 10 000 tiene 4 ceros mueva el punto decimal 4 lugares a la izquierda. Escriba 3 ceros adicionales.

$= 0.00086$

Autoevaluación 5

Encuentre el cociente:

a. $721.3 \div 100$

b. $\dfrac{1.07}{1000}$

Respuestas **a.** 7.213, **b.** 0.00107

Orden de las operaciones

En el siguiente ejemplo usamos las reglas para el orden de las operaciones para evaluar una expresión que involucre división por un decimal.

Autoevaluación 6

Evalúe: $\dfrac{2.7756 + 3(-0.63)}{-0.8}$

Respuesta -1.107

EJEMPLO 6

Evalúe: $\dfrac{2(0.351) + 0.5592}{-0.4}$

Solución

$$\frac{2(0.351) + 0.5592}{-0.4} = \frac{0.702 + 0.5592}{-0.4}$$

Haga la multiplicación primero $2(0.351) = 0.702$.

$$= \frac{1.2612}{-0.4}$$

Haga la suma: $0.702 + 0.5592 = 1.2612$.

$$= -3.153$$

Haga la división. El cociente de dos números con signos distintos es negativo.

PARA PENSAR A DETALLE — PPC

"Al considerar todos los factores importantes para los empleadores cuando reclutan estudiantes en colegios y universidades a nivel nacional, la carrera universitaria, el promedio de puntos de calificación y la experiencia relacionada en el trabajo usualmente están en los primeros lugares de la lista."

Mary D. Feduccia, Ph.D., Directora de servicios de carrera, Universidad Estatal de Louisiana

Un promedio de puntos de calificación (PPC) es un promedio ponderado basado en las calificaciones recibidas y el número de unidades (créditos) tomadas. Un PPC de un semestre (o período) se define como

El cociente de la suma de los puntos de calificación obtenidos por cada clase y la suma de las unidades tomadas. El número de puntos de calificación ganados para una clase es el producto del número de unidades asignadas a una clase y el valor de la calificación recibida en la clase.

1. Use la tabla de valores de calificaciones de un estudiante cuyo reporte de grado semestral se muestra para calcular su PPC. Redondee a la centésima más cercana.

Calificación	Valor
A	4
B	3
C	2
D	1
F	0

Clase	Unidades	Calificación
Geología	4	C
Álgebra	5	A
Psicología	3	C
Español	2	B

2. Si estuvo inscrito en la escuela el último semestre (o período) enliste las clases que llevó, las unidades asignadas y las calificaciones recibidas como se muestra en el reporte de grado. Calcule después su PPC.

Sección 4.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios*

1. En la división $2.5\overline{)4.075} = 1.63$, al decimal 4.075 se le llama _____, el decimal 2.5 es el _____, y 1.63 es el _____.

2. En $\frac{33.6}{0.3}$, la fracción _____ indica división.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

3. Para dividir por un decimal mueva el punto decimal del divisor hasta que se convierta en un número _____ El punto decimal del dividendo se mueve en consecuencia el mismo número de cifras a la _____. El punto decimal en el cociente se escribe directamente _____ del punto decimal del dividendo.

4. Para dividir un decimal por una potencia de 10, mueva el punto decimal a la _____ el mismo número de cifras que el número de ceros en la potencia de 10.

5. ¿Es cierta o falsa esta afirmación?

$$45 = 45.0 = 45.000$$

6. Cuando se divide un decimal positivo entre 10, ¿la respuesta es menor o mayor que el número original?

7. Para completar la división $7.8\overline{)14.562}$, el punto decimal en el divisor y dividendo se mueven 1 cifra a la derecha. Esto es el equivalente a multiplicar numerador y denominador de $\frac{14.562}{7.8}$ ¿por qué número?

8. a. Cuando se dividen decimales con signos iguales ¿cuál es el signo del cociente?

b. Cuando se dividen decimales con signos distintos ¿cuál es el signo del cociente?

9. ¿Cómo podemos comprobar el resultado de esta división?

$$\frac{1.917}{0.9} = 2.13$$

10. Cuando se redondea un decimal a la columna de las centésimas ¿en qué columna nos debemos fijar primero?

11. Un estudiante hizo la división

$$4.6\overline{)9.522}$$

y obtuvo como respuesta 2.07. Sin hacer la división compruebe el resultado. ¿Es correcto?

12. En el problema de división de abajo explique por qué se pueden escribir los ceros adicionales (se muestran en rojo) después del 5.

$$16\overline{)5.50000}\quad 0.3$$

NOTACIÓN

13. Explique qué ilustran las flechas

$$4\,67\overline{)32\,08.7}$$

14. ¿Qué ilustra la flecha?

$$4\overline{)3.100}\quad 0.7$$
$$2\,8\downarrow$$
$$30$$

PRÁCTICA *Haga las divisiones.*

15. $8\overline{)36}$

16. $4\overline{)10}$

17. $-39 \div 4$

18. $-26 \div 8$

19. $49.6 \div 8$

20. $23.5 \div 5$

21. $9\overline{)288.9}$

22. $6\overline{)337.8}$

23. $(-14.76) \div (-6)$

24. $(-13.41) \div (-9)$

25. $\frac{-55.02}{7}$

26. $\frac{-24.24}{8}$

27. $45\overline{)119.7}$

28. $41\overline{)146.37}$

29. $250.95 \div 35$

30. $241.86 \div 29$

31. $41.6 \div 0.32$

32. $31.8 \div 0.15$

33. $(-199.5) \div (-0.19)$

34. $(-2381.6) \div (-0.26)$

35. $\frac{0.0102}{0.017}$

36. $\frac{0.0092}{0.023}$

37. $\frac{0.0186}{0.031}$

38. $\frac{0.416}{0.52}$

Divida y redondee cada resultado a la décima más cercana.

39. $3\overline{)16}$

40. $7\overline{)20}$

41. $-5.714 \div 2.4$

42. $-21.21 \div 3.8$

Divida y redondee cada resultado a la centésima más cercana.

43. $12.243 \div 0.9$

44. $13.441 \div 0.6$

45. $0.04\overline{)0.03164}$

46. $0.08\overline{)0.02201}$

Haga cada división mentalmente.

47. $7.895 \div 100$

48. $23.05 \div 10$

49. $0.064 \div (-100)$

50. $0.0043 \div (-10)$

51. $1000\overline{)34.8}$

52. $100\overline{)678.9}$

53. $\dfrac{45.04}{10}$

54. $\dfrac{22.32}{100}$

Evalúe cada expresión. Redondee cada resultado a la centésima más cercana.

55. $\dfrac{-1.2 - 3.4}{3(1.6)}$

56. $\dfrac{(-1.3)^2 + 6.7}{-0.9}$

57. $\dfrac{40.7(-5.3)}{0.4 - 0.61}$

58. $\dfrac{(0.5)^2 - (0.3)^2}{0.005 + 0.1}$

Evalúe cada fórmula.

59. $t = \dfrac{d}{r}$ para $d = 211.75$ y $r = 60.5$

60. $h = \dfrac{2A}{b}$ para $A = 9.62$ y $b = 3.7$

61. $r = \dfrac{d}{t}$ para $d = 219.375$ y $t = 3.75$

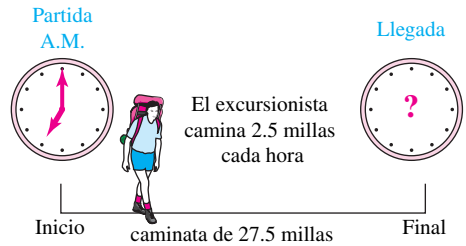
62. $\pi = \dfrac{C}{d}$ para $C = 14.4513$ y $d = 4.6$ (Redondee a la centésima más cercana)

APLICACIONES

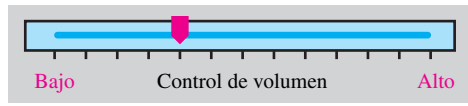
63. CARNICERÍAS Una rebanadora de carne está diseñada para cortar piezas de salchicha de 0.05 pulgadas de espesor. Si la salchicha mide 14 pulgadas de largo ¿cuántas rebanadas salen?

64. COMPUTADORAS Una computadora puede hacer un cálculo aritmético en 0.00003 segundos. ¿Cuántos de estos cálculos podría hacer en 60 segundos?

65. EXCURSIONISMO Use la información de la ilustración para encontrar la hora de llegada del excursionista.



66. ELECTRÓNICA Se muestra un control de volumen. Si la distancia entre los ajustes Alto y Bajo es de 21 cm, ¿a qué distancia están las marcas igualmente espaciadas entre sí?

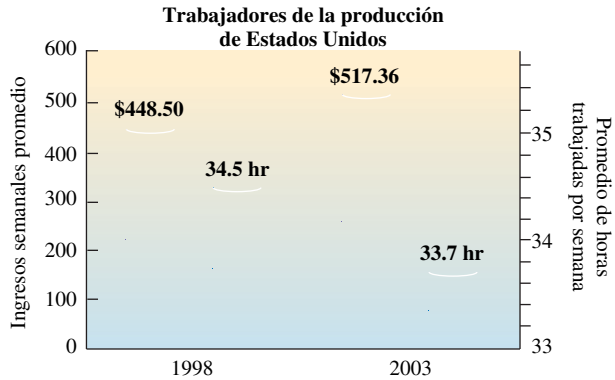


67. ROCIADORES Los planeadores de producción han encontrado que cada vez que se oprime el disparador de un rociador emite 0.015 onzas de líquido. ¿Cuántas veces habrá que oprimir el disparador para una botella de 8.5 onzas?

68. PRÉSTAMOS PARA AUTO Vea la declaración de préstamo. ¿Cuántos pagos mensuales faltan para pagar el préstamo?

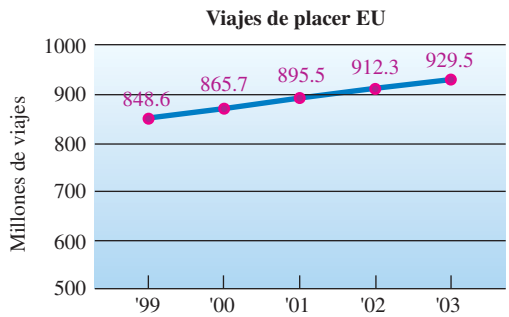
Compañía Americana de Finanzas	junio
Pago mensual: $42.10	Pagado hasta la fecha: $547.30
	Total a pagar: $631.50

69. PAGO POR HORAS La ilustración muestra el promedio de horas trabajadas y los ingresos semanales promedio de los trabajadores de la producción de los EU. ¿Cuál fue el ingreso promedio por hora de los trabajadores de la producción en 1998 y en 2003? Redondee al centavo más cercano si es necesario.

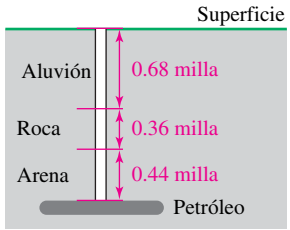


Fuente: *The World Almanac 2005*

70. VIAJES La ilustración muestra el número de viajes anuales personales de 50 millas o más (viajes sencillos) para los años 1999-2003 estimados por la Asociación de la Industria de Viajes de América. Encuentre el número promedio de viajes por año para este periodo.



71. POZOS PETROLEROS Los geólogos han hecho mapas de las sustancias por las que los ingenieros tienen que perforar para llegar a un depósito de petróleo. ¿Cuál es la profundidad promedio que debe perforarse cada semana si este proyecto se debe realizar en cuatro semanas?



72. INDY 500 La ilustración muestra la primera fila de la formación de arranque para la carrera de las 500 millas de Indianápolis. Se usaron las velocidades de los pilotos en la vuelta de calificación para ponerlos en ese orden. ¿Cuál fue la velocidad promedio de calificación para los pilotos de la primera fila?

B. Rice	D. Wheldon	D. Franchitti
222.024 mph	221.524 mph	221.471 mph

Redondee a la centésima más cercana.

73. $\dfrac{8.6 + 7.99 + (4.05)^2}{4.56}$

74. $\dfrac{0.33 + (-0.67)(1.3)^3}{0.0019}$

75. $\left(\dfrac{45.9098}{-234.12}\right)^2 - 4$

76. $\left(\dfrac{6.0007}{3.002}\right) - \left(\dfrac{78.8}{12.45}\right)$

POR ESCRITO

77. Explique el proceso usado para dividir dos números cuando tanto al divisor como el dividendo son decimales.

78. Explique por qué a veces debemos redondear cuando escribimos la respuesta a un problema de división.

79. La división $0.5\overline{)2.005}$ es equivalente a $5\overline{)20.05}$. Explique qué significa *equivalente* en este caso.

80. ¿Por qué se pueden colocar ceros adicionales a la derecha de 0.7en $3\overline{)0.7}$, sin afectar el resultado?

REPASO

81. Simplifique la fracción compleja: $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}}$.

82. Exprese la fracción $\frac{3}{4}$ como una fracción equivalente con denominador 36.

83. Enliste el conjunto de los enteros.

84. Sume: $-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$.

85. Multiplique: $7\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{4}$.

86. Evalúe: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

87. Multiplique: $(-5.8)(-7.25)$.

88. ¿Cuál es el opuesto de 5?

Estimación

En esta sección usamos procedimientos de estimación para aproximar las respuestas a problemas de suma, resta, multiplicación y división que involucren decimales. Recuerde que usamos el redondeo en la estimación para ayudar a simplificar los cálculos de tal forma que se puedan hacer rápida y fácilmente.

EJEMPLO 1 Estimación de sumas y diferencias.

a. Estime a la decena más cercana: $261.76 + 432.94$.
b. Estime usando el redondeo front-end: $381.77 - 57.01$.

Solución

a. Redondeamos cada número a la decena más cercana.

$$\begin{array}{ccccc} 261.76 & + & 432.94 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 260 & + & 430 & = 690 & \end{array}$$

261.76 se redondea a 260, y 432.94 se redondea a 430.

Autoevaluación 1

a. Estime a la decena más cercana la suma de 526.93 y 284.03

b. Estime usando redondeo front-end: 512.33 − 36.47

El estimado es 690. Si calculamos 261.76 + 432.94, la suma es 694.7. Podemos ver que nuestra estimación queda cerca; es tan sólo 4.7 menos que 694.7. Este ejemplo ilustra cómo se sacrifica una cosa por otra cuando se hacen estimaciones. Los cálculos son más fáciles de hacer y se llevan menos tiempo, pero las respuestas no son exactas.

b. Usamos redondeo front-end.

$$\begin{array}{ccc} 381.77 & - & 57.01 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 400 & - & 60 = 340 \end{array}$$

Cada número se redondea a su cifra decimal de mayor valor.
382.77 a la centena más cercana y 57.01 a la decena más cercana.

La estimación es 340.

Respuestas **a.** 810, **b.** 460

EJEMPLO 2 Estimación de productos.

Estime cada producto: **a.** $6.41 \cdot 27$, **b.** $5.2 \cdot 13.91$, y **c.** $0.124 \cdot 98.6$.

Solución

a. Usamos redondeo front-end

$$6.41 \cdot 27 \approx 6 \cdot 30$$

El símbolo ≈ significa: "es aproximadamente igual a".

La estimación es 180.

b. Usamos redondeo front-end.

$$5.2 \cdot 13.91 \approx 5 \cdot 10$$

La estimación es 50

c. Nótese que $98.6 \approx 100$.

$$0.124 \cdot 98.6 \approx 0.124 \cdot 100$$

Para multiplicar un decimal por 100 mueva el punto decimal dos cifras a la derecha.

La estimación es 12.4.

Autoevaluación 2

a. Estime el producto:

$$42 \cdot 17.65$$

b. Estime el producto:

$$182 \cdot 24.04$$

c. Estime el producto:

$$979.3 \cdot 2.3485$$

Respuestas **a.** 800, **b.** 4000, **c.** 2348.5

Cuando se estima un cociente, redondeamos el divisor y el dividendo de tal forma que se dividan exactamente. Trate de redondear ambos números hacia arriba o ambos hacia abajo.

EJEMPLO 3 Estimación de cocientes.

Estime: $246.03 \div 4.31$.

Solución 4.31 es cercano a 4. Un múltiplo de 4 cercano a 246.03 es 240. (Nótese que tanto el divisor como el dividendo se redondearon hacia abajo.)

$$246.03 \div 4.31 \approx 240 \div 4$$

Haga la división mentalmente.

La estimación es 60.

Autoevaluación 3

Estime: $6{,}429.6 \div 7.19$

Respuesta 900

EJERCICIOS DE ESTUDIO *Use la información siguiente sobre refrigeradores para estimar la respuesta a cada pregunta. Recuerde que las respuestas pueden variar dependiendo del método de redondeo que se use.*

Modelo de lujo	**Modelo estándar**	**Modelo económico**
Precio: $978.88	Precio: $739.99	Precio: $599.95
Capacidad: 25.2 pies cúbicos	Capacidad: 20.6 pies cúbicos	Capacidad: 18.8 pies cúbicos
Consumo de energía: $6.79 mensuales	Consumo de energía: $5.61 mensuales	Consumo de energía: $4.39 mensuales

1. ¿Qué tanto más caro es el modelo de lujo que el estándar?
2. Una pareja quiere comprar dos modelos estándar, uno para ellos mismos y otro para su hijo y nuera recién casados. ¿Cuál sería el costo total?
3. ¿Qué tanta capacidad de almacenamiento menos tiene el modelo económico que el estándar?
4. El propietario de un apartamento dúplex quiere comprar un modelo estándar para una unidad y otro económico para la otra. ¿Cuál será el costo total?
5. El gerente de un estadio tiene un presupuesto de $20 000 para colocar refrigeradores en los palcos de lujo en un estadio de fútbol. ¿Cuántos modelos estándar de refrigeradores se pueden comprar con esta cantidad?
6. ¿Cuántos pies cúbicos más de almacenamiento se tienen con el modelo de lujo comparado con el modelo económico?
7. Tres compañeros de cuarto están planeando comprar el modelo de lujo y repartir parejo el costo. ¿Cuánto tendría que pagar cada uno?
8. ¿Cuál es el costo energético por año del modelo de lujo?
9. Si se da un enganche de $220 para el modelo estándar, ¿cuánto queda para financiarse?
10. Se puede esperar que el modelo económico dure 10 años. ¿Cuánto costaría la energía en total en ese periodo?

Estime la respuesta a cada problema. ¿Parece razonable el resultado de la calculadora?

11. $25.9 + 345.1 + 0.09$ — 347.78
12. $8345.889 - 345.6$ — 8000.289
13. $42\,090.8 + 3{,}303.09$ — 45393.89
14. $10.007 - 0.626$ — 3.747
15. $9.8(8.8)$ — 86.24
16. $\frac{24.56}{2.2}$ — 1.116363636
17. $53 \cdot 5.61$ — 241.23
18. $89.11 \div 22.707$ — 39.24340

4.5 Fracciones y decimales

- Escritura de fracciones como decimales equivalentes
- Decimales periódicos
- Redondeo de decimales periódicos
- Graficación de fracciones y decimales
- Problemas que involucran fracciones y decimales

En esta sección, continuamos investigando la relación entre fracciones y decimales.

Escritura de fracciones como decimales equivalentes

Para escribir $\frac{5}{8}$ como decimal, usamos el hecho de que $\frac{5}{8}$ indica la división $5 \div 8$. Podemos convertir $\frac{5}{8}$ a la forma decimal haciendo la división.

$$
\begin{array}{r}
.625 \\
8\overline{)5.000} \\
\underline{48} \\
20 \\
\underline{16} \\
40 \\
\underline{40} \\
0
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y ceros adicionales a la derecha de 5.

← El residuo es 0.

Así, $\frac{5}{8} = 0.625$.

Escritura de una fracción como decimal

Para escribir una fracción como decimal, divida el numerador de la fracción entre su denominador.

EJEMPLO 1

Escriba $\frac{3}{4}$ como decimal.

Solución Dividimos el numerador entre el denominador.

$$
\begin{array}{r}
.75 \\
4\overline{)3.00} \\
\underline{28} \\
20 \\
\underline{20} \\
0
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y dos ceros a la derecha de 3.

← El residuo es cero.

Así, $\frac{3}{4} = 0.75$.

Autoevaluación 1

Escriba $\frac{3}{16}$ como un decimal.

Respuesta 0.1875

En el ejemplo 1, el proceso de división termina porque se obtuvo un residuo 0. En este caso al cociente, 0.75, le llamamos **decimal que termina.**

Decimales periódicos

Algunas veces, cuando estamos encontrando el equivalente decimal de una fracción el proceso de división nunca da un residuo 0. En este caso el resultado es un **decimal periódico.** Ejemplos de decimales que se repiten son 0.4444. . . y 1.373737. . . . Los tres puntos nos dicen que un bloque de dígitos se repite en el patrón mostrado. Los decimales periódicos también se pueden escribir usando una barra sobre el bloque de dígitos que se repiten. Por ejemplo, 0.4444. . . se puede escribir como $0.\overline{4}$, y 1.373737. . . se puede escribir como $1.\overline{37}$.

COMENTARIO Cuando se usa una barra arriba para escribir un decimal que se repite, úsese el mínimo número de dígitos necesario para mostrar el bloque que se repite

$0.333\ldots = 0.\overline{333}$ $\quad$ $6.7454545\ldots = 6.7\overline{454}$

$0.333\ldots = 0.\overline{3}$ $\quad$ $6.7454545\ldots = 6.\overline{745}$

EJEMPLO 2 Escriba $\frac{5}{12}$ como decimal.

Solución Usamos la división para encontrar el decimal equivalente.

$$
\begin{array}{r}
.4166 \\
12\overline{)5.0000} \\
\underline{48} \\
20 \\
\underline{12} \\
80 \\
\underline{72} \\
80 \\
\underline{72} \\
8
\end{array}
$$

Escriba un punto decimal y cuatro ceros a la derecha del 5.

Es claro que 8 va a continuar apareciendo como residuo. Por lo tanto el 6 continuará apareciendo en el cociente. Como ya es claro el patrón de repetición podemos parar la división.

Así, $\frac{5}{12} = 0.41\overline{6}$.

Autoevaluación 2

Escriba $\frac{4}{11}$ como un decimal.

Respuesta $0.\overline{36}$

Cada fracción se puede escribir ya sea como decimal que termina o un decimal periódico. Por esta razón, el conjunto de las fracciones (**números racionales**) forman un subconjunto del conjunto de los decimales llamado **números reales.** El conjunto de los números reales corresponde a todos los puntos de una recta.

No todos los decimales terminan o son decimales periódicos. Por ejemplo,

0.2020020002. . .

no termina y no tiene bloque de dígitos que se repita. Este decimal no se puede escribir como fracción con un numerador entero y un denominador entero distinto de cero. Por tanto, no es un número racional. Es un ejemplo tomado del conjunto de los **números irracionales.**

Redondeo de decimales periódicos

Cuando una fracción se escribe en forma decimal, el resultado es ya sea un decimal que termina o uno periódico. Los decimales periódicos a menudo se redondean a una cifra específica.

EJEMPLO 3 Escriba $\frac{1}{3}$ como decimal y redondéelo a la centésima más cercana.

Solución Primero, dividimos el numerador entre el denominador para encontrar el equivalente decimal de $\frac{1}{3}$.

$$
\begin{array}{r}
0.333 \\
3\overline{)1.000} \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
1
\end{array}
$$

Escribimos un punto decimal y ceros adicionales a la derecha de 1.

Vemos que el proceso de división nunca da un residuo de 0. Cuando escribimos $\frac{1}{3}$ en forma decimal, el resultado es un decimal periódico 0.333. . . $= 0.\overline{3}$.

Para encontrar el equivalente decimal de $\frac{1}{3}$ a la centésima más cercana procedemos como sigue.

0.333. . . ← Redondee 0.333 a la centésima más cercana examinando el dígito de prueba en la columna de las milésimas.

Como 3 es menor que 5 redondeamos hacia abajo y tenemos

$$\frac{1}{3} \approx 0.33$$

Léase $\approx$ como "aproximadamente igual a".

Autoevaluación 4
Escriba $\frac{7}{24}$ como un decimal y redondee a la milésima más cercana.

Respuesta 0.292

EJEMPLO 4

Escriba $\frac{2}{7}$ como un decimal y redondee a la milésima más cercana.

Solución

$$\begin{array}{r} .2857 \\ 7\overline{)2.0000} \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y ceros adicionales a la derecha de 2.

Para redondear a la columna de las milésimas debemos dividir hasta la columna de las diezmilésimas.

0.2857 ← Redondee 0.2857 a la milésima más cercana examinando el dígito de prueba en la columna de las diezmilésimas.

Como 7 es mayor que 5 redondeamos hacia arriba y $\frac{2}{7} \approx 0.286$.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA La tecla de punto fijo

Después de hacer un cálculo, una calculadora científica puede redondear el resultado hasta una cifra dada. Esto se hace usando la *tecla de punto fijo.* Como hicimos en el ejemplo 4 encontremos el equivalente decimal de $\frac{2}{7}$ y redondeemos a la milésima más cercana. Ahora usaremos una calculadora.

Primero, ajustamos la calculadora para redondear hasta la tercera cifra decimal (milésimas) oprimiendo [FIX] 3. Después oprimimos 2 [÷] 7 [=] 0.286

Por tanto, $\frac{2}{7} \approx 0.286$. Para redondear a la décima más cercana, pondríamos fix 1; a la centésima más cercana, fix 2 y así sucesivamente.

Si su calculadora no tiene una tecla de punto fijo vea el manual del propietario.

Autoevaluación 5
Escriba $8\frac{19}{20}$ en forma decimal.

EJEMPLO 5

Escriba $5\frac{3}{8}$ en forma decimal.

Solución Para escribir un número mixto en forma decimal, recuerde que un número mixto está formado por un número entero y una parte fraccionaria. Como podemos escribir $5\frac{3}{8}$ como $5 + \frac{3}{8}$, sólo tenemos que considerar cómo escribir $\frac{3}{8}$ como decimal.

$$\begin{array}{r} .375 \\ 8\overline{)3.000} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Escribimos un punto decimal y tres ceros a la derecha de 3.

Por tanto, $5\frac{3}{8} = 5 + \frac{3}{8} = 5 + 0.375 = 5.375$. Obtendríamos el mismo resultado si cambiáramos $5\frac{3}{8}$ a la fracción impropia $\frac{43}{8}$ y dividiéramos 43 entre 8.

Respuesta 8.95

Graficación de fracciones y decimales

La recta numérica se puede usar para mostrar la relación entre las fracciones y sus equivalentes decimales respectivos. La figura 4.7 muestra algunas fracciones de uso común que tienen equivalentes decimales que terminan. Por ejemplo, vemos de la gráfica que $\frac{13}{16} = 0.8125$.

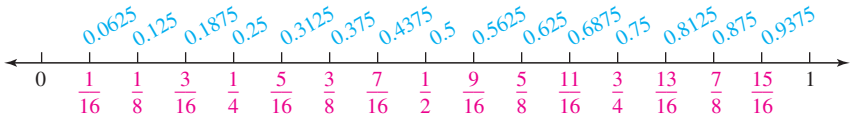


FIGURA 4.7

La recta numérica en la figura 4-8 muestra algunas fracciones de uso común que tienen equivalentes decimales que se repiten.

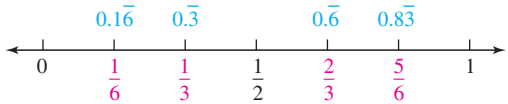


FIGURA 4.8

Problemas que involucran fracciones y decimales

Las expresiones numéricas pueden contener tanto fracciones como decimales. En los siguientes ejemplos mostramos distintos métodos que se usan para resolver problemas de este tipo.

EJEMPLO 6 Evalúe $\frac{1}{3} + 0.27$ trabajando en términos de fracciones.

Solución Escribimos 0.27 como una fracción y se la sumamos a $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} + 0.27 = \frac{1}{3} + \frac{27}{100}$$ Reemplace 0.27 con $\frac{27}{100}$.

$$= \frac{1 \cdot \mathbf{100}}{3 \cdot \mathbf{100}} + \frac{27 \cdot \mathbf{3}}{100 \cdot \mathbf{3}}$$ El mcd de $\frac{1}{3}$ y $\frac{27}{100}$ es 300. Exprese cada fracción en términos de 300avos.

$$= \frac{100}{300} + \frac{81}{300}$$ Multiplique en los numeradores y los denominadores.

$$= \frac{181}{300}$$ Sume los numeradores y escriba la suma sobre el denominador común 300.

Autoevaluación 6
Evalúe trabajando en términos de fracciones: $0.53 - \frac{1}{6}$.

Respuesta $\frac{109}{300}$

Autoevaluación 7
Estime el resultado trabajando en términos de decimales: $0.53 - \frac{1}{6}$.

Respuesta aproximadamente 0.36

EJEMPLO 7

Estime $\frac{1}{3} + 0.27$ trabajando en términos de decimales.

Solución Hemos visto que el equivalente decimal de $\frac{1}{3}$ es el decimal que se repite 0.333. . . . Para sumar $\frac{1}{3}$ a 0.27, redondeamos 0.333. . . a la centésima más cercana: $\frac{1}{3} \approx 0.33$.

$$\frac{1}{3} + 0.27 \approx 0.33 + 0.27 \quad \text{Aproxime } \frac{1}{3} \text{ con el decimal 0.33.}$$

$$\approx 0.60 \quad \text{Haga la suma.}$$

En los ejemplos 6 y 7 evaluamos $\frac{1}{3} + 0.27$ de distintos modos. En el ejemplo 6 obtuvimos la respuesta exacta, $\frac{181}{300}$. En el ejemplo 7, obtuvimos una aproximación, 0.6. Es notorio que los resultados concuerdan cuando escribimos $\frac{181}{300}$ en forma decimal: $\frac{181}{300} = 0.60333\ldots$.

Autoevaluación 8
Realice las operaciones: $(-0.6)^2 + (2.3)\left(\frac{1}{8}\right)$.

Respuesta 0.6475

EJEMPLO 8

Haga las operaciones: $\left(\frac{4}{5}\right)(1.35) + (0.5)^2$.

Solución Parece más fácil trabajar en términos de decimales. Usamos la división para encontrar el equivalente de $\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{r} .8 \\ 5\overline{)4.0} \\ \underline{4\,0} \\ 0 \end{array}$$

Escribimos un punto decimal y un cero a la derecha de 4.

Ahora usamos las reglas para el orden de las operaciones para evaluar la expresión dada.

$$\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)(1.35) + (0.5)^2 = (\mathbf{0.8})(1.35) + (0.5)^2$$ Reemplace $\frac{4}{5}$ con su equivalente decimal, 0.8.

$$= (0.8)(1.35) + 0.25$$ Encuentre la potencia: $(0.5)^2 = 0.25$.

$$= 1.08 + 0.25$$ Haga la multiplicación: $(0.8)(1.35) = 1.08$.

$$= 1.33$$ Haga la suma.

EJEMPLO 9 Ir de compras.

Durante un viaje a la tienda de abarrotes, una persona compró $\frac{3}{4}$ de libra de fruta, a \$0.88 la libra y $\frac{1}{3}$ de libra de café molido fresco a \$6.60 la libra. Encuentre el costo total de estos artículos.

Solución Para encontrar el costo de cada artículo, multiplicamos la cantidad comprada por su precio unitario. Después sumamos los dos costos individuales para obtener el costo total.

Costo de la fruta	más	costo del café	igual a	costo total
$\left(\frac{3}{4}\right)(0.88)$	+	$\left(\frac{1}{3}\right)(6.60)$	=	costo total

Como 0.88 es divisible por 4 y 6.60 es divisible por 3, podemos trabajar con decimales y fracciones en esta forma, no es necesario hacer conversiones.

$$\left(\frac{3}{4}\right)(0.88) + \left(\frac{1}{3}\right)(6.60) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{0.88}{1}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6.60}{1}\right)$$ Exprese 0.88 como $\frac{0.88}{1}$ y 6.60 como $\frac{6.60}{1}$.

$$= \frac{2.64}{4} + \frac{6.60}{3}$$ Multiplique los numeradores y los denominadores.

$$= 0.66 + 2.20$$ Haga cada división.

$$= 2.86$$ Haga la suma

El costo total de los artículos es \$2.86.

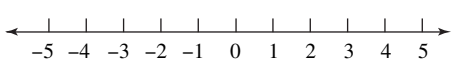
Sección 4.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

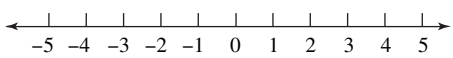
1. La forma decimal de la fracción $\frac{1}{3}$ es un decimal _____ el cual se escribe como $0.\overline{3}$ o 0.3333. . . .
2. La forma decimal de la fracción $\frac{2}{5}$ es un decimal _____ el cual se escribe como 0.4.
3. El equivalente _____ de $\frac{1}{16}$ es 0.0625.
4. Leemos $\approx$ como "es _____ igual a".

CONCEPTOS

5. **a.** ¿Cuál es la división indicada por la fracción $\frac{7}{8}$?
   b. Complete: para escribir una fracción como decimal, divida el _____ de la fracción entre su denominador.
6. Inserte el símbolo apropiado $<$ o $>$ en el espacio para que la afirmación sea verdadera.
   a. $0.\overline{6}$ ▢ 0.7 **b.** $0.\overline{6}$ ▢ 0.6
7. Cuando se redondea 0.272727 . . . a la centésima más cercana, ¿el resultado es mayor o menor que el número original?
8. Escriba cada decimal en forma de fracción.
   a. 0.7 **b.** 0.77
9. Grafique: $1\frac{3}{4}$, -0.75, $0.\overline{6}$ y $-3.8\overline{3}$.



10. Grafique: $2\frac{7}{8}$, -2.375, $0.\overline{3}$ y $4.1\overline{6}$.



11. Determine si cada afirmación es verdadera o falsa.
   a. $\frac{1}{3} = 0.3$ **b.** $\frac{3}{4} = 0.75$
   c. $20\frac{1}{2} = 20.5$ **d.** $\frac{1}{16} = 0.1\overline{6}$
12. Cuando se evalúa la expresión $0.25 + \left(2.3 + \frac{2}{5}\right)^2$, ¿sería más fácil trabajarla en términos de fracciones o de decimales?

NOTACIÓN

13. Examine la porción coloreada de la división larga en la siguiente columna.
   a. ¿Alguna vez será 0 el residuo?
   b. ¿Qué se puede deducir del equivalente decimal de $\frac{5}{6}$?

$$\begin{array}{r} .833 \\ 6\overline{)5.000} \\ \underline{4\,8} \\ \mathbf{20} \\ \underline{\mathbf{18}} \\ \mathbf{20} \end{array}$$

14. Escriba cada decimal que se repite usando una barra superior.
   a. 0.888. . . **b.** 0.323232. . .
   c. 0.56333 . . . **d.** 0.8898989. . .

PRÁCTICA *Escriba cada fracción en forma decimal.*

15. $\frac{1}{2}$ 16. $\frac{1}{4}$
17. $-\frac{5}{8}$ 18. $-\frac{3}{5}$
19. $\frac{9}{16}$ 20. $\frac{3}{32}$
21. $-\frac{17}{32}$ 22. $-\frac{15}{16}$
23. $\frac{11}{20}$ 24. $\frac{19}{25}$
25. $\frac{31}{40}$ 26. $\frac{17}{20}$

27. $-\frac{3}{200}$ **28.** $-\frac{21}{50}$

29. $\frac{1}{500}$ **30.** $\frac{1}{250}$

Escriba cada fracción en forma decimal. Use una barra superior.

31. $\frac{2}{3}$ **32.** $\frac{7}{9}$

33. $\frac{5}{11}$ **34.** $\frac{4}{15}$

35. $-\frac{7}{12}$ **36.** $-\frac{17}{22}$

37. $\frac{1}{30}$ **38.** $\frac{1}{60}$

Escriba cada fracción en forma decimal. Redondee a la centésima más cercana.

39. $\frac{7}{30}$ **40.** $\frac{14}{15}$

41. $\frac{17}{45}$ **42.** $\frac{8}{9}$

Escriba cada fracción en forma decimal. Redondee a la milésima más cercana.

43. $\frac{5}{33}$ **44.** $\frac{5}{12}$

45. $\frac{10}{27}$ **46.** $\frac{17}{21}$

Escriba cada fracción en forma decimal. Redondee a la centésima más cercana.

47. $\frac{4}{3}$ **48.** $\frac{10}{9}$

49. $-\frac{34}{11}$ **50.** $-\frac{25}{12}$

Escriba cada número mixto en forma decimal. Redondee a la centésima más cercana cuando el resultado sea un decimal que se repite.

51. $3\frac{3}{4}$ **52.** $5\frac{4}{5}$

53. $-8\frac{2}{3}$ – **54.** $-1\frac{7}{9}$

55. $12\frac{11}{16}$ **56.** $32\frac{1}{8}$

57. $203\frac{11}{15}$ **58.** $568\frac{23}{30}$

Ponga el símbolo correcto ($<$ o $>$) para que las afirmaciones sean verdaderas. (Sugerencia: escriba todos los números como decimales.)

59. $\frac{7}{8}$ ▢ 0.895 **60.** 4.56 ▢ $4\frac{2}{5}$

61. $-\frac{11}{20}$ ▢ $-0.\overline{4}$ **62.** $-9.0\overline{9}$ ▢ $-9\frac{1}{11}$

Evalúe cada expresión. Trabaje en términos de fracciones.

63. $\frac{1}{9} + 0.3$ **64.** $\frac{2}{3} + 0.1$

65. $0.9 - \frac{7}{12}$ **66.** $0.99 - \frac{5}{6}$

67. $\frac{5}{11}(0.3)$ **68.** $(0.9)\left(\frac{1}{27}\right)$

69. $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{15}\right)(0.5)$ **70.** $(-0.4)\left(\frac{5}{18}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

71. $\frac{1}{4}(0.25) + \frac{15}{16}$ **72.** $\frac{2}{5}(0.02) - (0.04)$

Evalúe cada expresión a la centésima más cercana.

73. $0.24 + \frac{1}{3}$ **74.** $0.02 + \frac{5}{6}$

75. $5.69 - \frac{5}{12}$ **76.** $3.19 - \frac{2}{3}$

77. $\frac{3}{4}(0.43) - \frac{1}{12}$ **78.** $-\frac{2}{5}(0.33) + 0.45$

Evalúe cada expresión. Trabaje en términos de decimales.

79. $(3.5 + 6.7)\left(-\frac{1}{4}\right)$ **80.** $\left(-\frac{5}{8}\right)(5.3 - 3.9)$

81. $\left(\frac{1}{5}\right)^2(1.7)$ **82.** $(2.35)\left(\frac{2}{5}\right)^2$

83. $7.5 - (0.78)\left(\frac{1}{2}\right)$ **84.** $8.1 - \left(\frac{3}{4}\right)(0.12)$

85. $\frac{3}{8}(-3.2) + (4.5)\left(-\frac{1}{9}\right)$

86. $(-0.8)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)(0.39)$

Evalúe cada expresión. Redondee a la centésima más cercana.

87. $\frac{3\frac{1}{5} + 2\frac{1}{2}}{5.69} + 3\frac{1}{4}$ **88.** $4\frac{2}{3} - \frac{2.7 - \frac{7}{8}}{0.12}$

Evalúe cada fórmula. Redondee a la centésima más cercana.

89. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para $F = 64.5$

90. $F = \frac{9}{5}C + 32$ para $C = 0.58$

Escriba cada fracción en forma decimal.

91. $\frac{23}{101}$

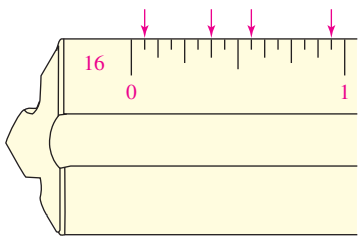
92. $\frac{1}{99}$

93. $\frac{1.736}{50}$

94. $-\frac{11}{128}$

APLICACIONES

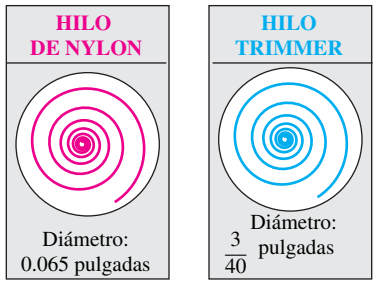
95. DIBUJO El escalímetro de arquitecto tiene varias aristas de medición. La arista marcada con 16 divide cada pulgada en 16 partes iguales. Encuentre la forma decimal de cada parte fraccionaria de 1 pulgada que está señalada en la escala.



96. SEÑALIZACIÓN DE AUTOPISTAS El letrero de autopista da el número de millas hasta las siguientes tres salidas. Convierta el millaje a notación decimal.

Ave. Barranca	$\frac{3}{4}$ **mi**
Autopista 210	$2\frac{1}{4}$ **mi**
Calle Ada	$3\frac{1}{2}$ **mi**

97. JARDINERÍA Dos marcas de hilo de repuesto para una podadora de césped se etiquetan de formas distintas. En un paquete, el espesor del hilo se expresa como un decimal; en la otra como fracción. ¿Cuál es más grueso?



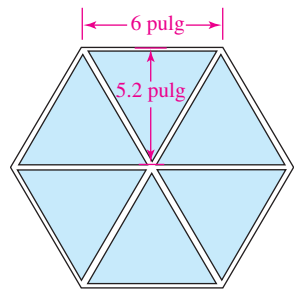
98. MECÁNICA AUTOMOTRIZ Cuando hace una afinación un mecánico revisa la abertura en una de las bujías de un auto para asegurarse de que la chispa salte correctamente. El manual del propietario establece que la abertura debe ser de $\frac{2}{125}$ de pulgada. El calibrador que usa el mecánico para comprobar la abertura está en notación decimal; registra 0.025 pulgada. ¿La abertura es demasiado grande o demasiado pequeña?

99. CARRERAS DE CABALLOS En las carreras de caballos pura sangre, el tiempo que se lleva un caballo en correr una cierta distancia se mide usando quintos de segundo. Por ejemplo, 55^2 (leído como cincuenta y cinco y 2) significa $55\frac{2}{5}$ segundos. La ilustración enlista cuatro tiempos parciales para un caballo. Exprese los tiempos en forma decimal.

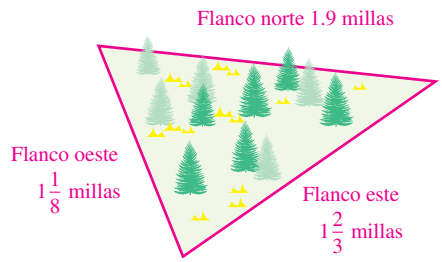
Speedy Flight Turfway Park, Ky 3 años de edad					
17 mayo 97	$1\frac{1}{16}$ millas	$:23^2$	$:23^4$	$:24^1$	$:32^3$

100. GELOLOGÍA Un geólogo pesó una muestra de roca en el sitio donde fue descubierta y resultó que pesaba $17\frac{7}{8}$ libras. Después, una báscula digital más precisa en el laboratorio dio un peso de 17.671 libras. ¿Cuál es la diferencia en las dos medidas?

101. REEMPLAZO DE VENTANAS La cantidad de luz que entra a un cuarto depende del área de las ventanas en el cuarto. ¿Cuál es el área de la ventana mostrada?



102. CONTENCIÓN DE INCENDIOS FORESTALES Un puesto de comando pidió a cada uno de tres equipos de bomberos que estimaran la longitud de la línea de fuego que estaban combatiendo. Los reportes llegaron en formas distintas como se muestra. Encuentre el perímetro del fuego.



POR ESCRITO

103. Explique el procedimiento que se usa para escribir una fracción en forma decimal.

104. Compare y contraste los números 0.5 y $0.\overline{5}$.

105. Un estudiante representó el decimal periódico 0.1333. . . como $0.1\overline{333}$. ¿Es correcto? Explique por qué sí o por qué no.

106. ¿Es 0.10100100010000. . . un decimal periódico? Explique por qué sí o por qué no.

REPASO

107. Sume: $-2 + (-3) + 10 + (-6)$.

108. Evalúe: $-3 + 2[-3 + (2 - 7)]$.

109. Enliste el conjunto de los primeros ocho números cardinales.

110. Simplifique: $\frac{20}{55}$.

111. Multiplique: $3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$.

112. Divida: $3\frac{1}{3} \div 4\frac{1}{2}$.

4.6 Raíces cuadradas

- Raíces cuadradas • Evaluación de expresiones numéricas que contienen radicales • Raíces cuadradas de fracciones y decimales • Uso de una calculadora para encontrar raíces cuadradas • Aproximación de raíces cuadradas

Hemos discutido las relaciones entre la suma y la resta y entre la multiplicación y la división. En esta sección exploramos la relación entre elevar un número a una potencia y encontrar una raíz. Los decimales juegan un papel importante en esta discusión.

Raíces cuadradas

Cuando elevamos un número a la segunda potencia lo estamos elevando al cuadrado o encontrando su **cuadrado.**

El cuadrado de 6 es 36, porque $6^2 = 36$.

El cuadrado -6 es 36, porque $(-6)^2 = 36$.

La **raíz cuadrada** de un número dado es un número cuyo cuadrado es el número dado. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 36 son 6 y -6, porque cualquiera de los dos números cuando se eleva al cuadrado da 36. Podemos expresar este concepto usando símbolos.

Raíz cuadrada

Un número es una **raíz cuadrada** de un segundo número si el cuadrado del primer número es igual al segundo número.

EJEMPLO 1 Encuentre las raíces cuadradas de 49.

Solución Pregúntese: "¿qué número se elevó al cuadrado para obtener 49?" Las dos respuestas son 7 y -7.

$7^2 = 49$ y $(-7)^2 = 49$

Por tanto, -7 y 7 son las raíces cuadradas de 49.

Autoevaluación 1
Encuentre las raíces cuadradas de 64.

Respuestas 8 y -8

En el ejemplo 1, vimos que 49 tiene dos raíces cuadradas: una positiva y una negativa. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama **símbolo de radical** y se usa para indicar una raíz cuadrada positiva.

Cuando se escribe un número llamado **radicando** bajo el símbolo de radical tenemos una **expresión radical.** Algunos ejemplos de expresiones radicales son:

$$\sqrt{36} \qquad \sqrt{100} \qquad \sqrt{144} \qquad \sqrt{81}$$

Para evaluar (o simplificar) una expresión radical necesitamos encontrar la raíz cuadrada positiva del radicando. Por ejemplo, si evaluamos $\sqrt{36}$ (léase como: "la raíz cuadrada de 36") el resultado es:

$$\sqrt{36} = 6$$

Porque $6^2 = 36$. La raíz cuadrada negativa de 36 se denota por $-\sqrt{36}$, y tenemos

$$-\sqrt{36} = -6$$ Léase como "la raíz cuadrada negativa de 36 es -6" o "el opuesto de la raíz cuadrada de 36 es -6."

EJEMPLO 2 Evalúe cada expresión: **a.** $\sqrt{81}$ y **b.** $-\sqrt{100}$.

Solución

a. $\sqrt{81}$ significa la raíz cuadrada positiva de 81.

$\sqrt{81} = 9$, porque $9^2 = 81$.

b. $-\sqrt{100}$ significa el opuesto (o negativo) de la raíz cuadrada de 100. Como $\sqrt{100} = 10$, tenemos

$-\sqrt{100} = -10$

Autoevaluación 2
Evalúe cada expresión:
a. $\sqrt{144}$ y **b.** $-\sqrt{81}$

Respuestas **a.** 12, **b.** -9

COMENTARIO Las expresiones radicales como

$$\sqrt{-36} \qquad \sqrt{-100} \qquad \sqrt{-144} \qquad \sqrt{-81}$$

no representan números reales porque no hay números reales que cuando se elevan al cuadrado den un número negativo.

Sea cuidadoso para notar la diferencia entre expresiones como $-\sqrt{36}$ y $\sqrt{-36}$. Hemos visto que $-\sqrt{36}$ es un número real: $-\sqrt{36} = -6$. En contraste, $\sqrt{-36}$ no es un número real.

Evaluación de expresiones numéricas que contienen radicales

Las expresiones numéricas pueden contener expresiones radicales. Cuando se aplican las reglas para el orden de las operaciones, tratamos las expresiones radicales como lo haríamos con una potencia.

EJEMPLO 3 Evalúe: **a.** $\sqrt{64} + \sqrt{9}$ y **b.** $-\sqrt{25} - \sqrt{4}$.

Solución

a. $\sqrt{64} + \sqrt{9} = 8 + 3$ Evalúe cada expresión radical primero.

$= 11$ Haga la suma.

b. $-\sqrt{25} - \sqrt{4} = -5 - 2$ Evalúe cada expresión radical primero.

$= -7$ Haga la resta.

Autoevaluación 3
Evalúe:
a. $\sqrt{121} + \sqrt{1}$
b. $-\sqrt{9} - \sqrt{16}$

Respuestas **a.** 12, **b.** -7

Autoevaluación 4
Evalúe:
a. $8\sqrt{121}$
b. $-6\sqrt{25} + 2\sqrt{36}$

Respuestas **a.** 88, **b.** -18

EJEMPLO 4

Evalúe: **a.** $6\sqrt{100}$ y **b.** $-5\sqrt{16} + 3\sqrt{9}$.

Solución

a. Notamos que $6\sqrt{100}$ significa $6 \cdot \sqrt{100}$.

$$6\sqrt{\mathbf{100}} = 6(\mathbf{10}) \qquad \text{Simplifique el radical primero.}$$
$$= 60 \qquad \text{Haga la multiplicación.}$$

b. $-5\sqrt{\mathbf{16}} + 3\sqrt{\mathbf{9}} = -5(\mathbf{4}) + 3(\mathbf{3})$ Simplifique el radical primero.
$= -20 + 9$ Haga la multiplicación.
$= -11$ Haga la suma.

Raíces cuadradas de fracciones y decimales

Hasta el momento hemos encontrado las raíces de los números enteros. También se pueden encontrar las raíces cuadradas de fracciones y decimales.

Autoevaluación 5
Evalúe:
a. $\sqrt{\frac{16}{49}}$ y **b.** $\sqrt{0.04}$

Respuestas **a.** $\frac{4}{7}$, **b.** 0.2

EJEMPLO 5

Evalúe: **a.** $\sqrt{\frac{25}{64}}$ y **b.** $\sqrt{0.81}$.

Solución

a. $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$ porque $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.

b. $\sqrt{0.81} = 0.9$ porque $(0.9)^2 = 0.81$.

Uso de una calculadora para encontrar raíces cuadradas

Podemos usar una calculadora para encontrar raíces cuadradas.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Cálculo de una raíz cuadrada

Usamos la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ (tecla de raíz cuadrada) en una calculadora científica para encontrar raíces cuadradas. Por ejemplo, para encontrar $\sqrt{729}$, tecleamos éstos números y apretamos estas teclas.

729 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 27

Hemos encontrado que $\sqrt{729} = 27$. Para comprobar este resultado necesitamos elevar al cuadrado 27. Esto se puede hacer tecleando 27 y apretando la tecla $\boxed{x^2}$ Obtenemos 729. Por tanto, 27 es la raíz cuadrada de 729.

Aproximación de raíces cuadradas

Los números cuyas raíces cuadradas son enteros se llaman **cuadrados perfectos.** Los cuadrados perfectos que son menores o iguales que 100 son

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Para encontrar la raíz cuadrada de un número que no sea un cuadrado perfecto podemos usar una calculadora. Por ejemplo, para encontrar $\sqrt{17}$, tecleamos 17 y apretamos la tecla de raíz cuadrada.

17 $\sqrt{\ }$

En la pantalla se lee 4.123105626. Este resultado no es exacto porque $\sqrt{17}$ es un **decimal que no termina** y que nunca se repite. $\sqrt{17}$ es un número irracional. Juntos, los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales. Si redondeamos a la milésima más cercana, tenemos

$\sqrt{17} \approx 4.123$ Léase $\approx$ como "es aproximadamente igual a".

EJEMPLO 6 Use una calculadora para encontrar cada raíz cuadrada. Redondee a la centésima más cercana.

a. $\sqrt{373}$ **b.** $\sqrt{56.2}$ **c.** $\sqrt{0.0045}$

Solución

a. De la calculadora obtenemos $\sqrt{373} \approx 19.31320792$. Redondeado a la centésima más cercana, $\sqrt{373}$ es 19.31.

b. De la calculadora obtenemos $\sqrt{56.2} \approx 7.496665926$. Redondeado a la centésima más cercana, $\sqrt{56.2}$ es 7.50.

c. De la calculadora obtenemos $\sqrt{0.0045} \approx 0.067082039$. Redondeado a la centésima más cercana, $\sqrt{0.0045}$ es 0.07.

Autoevaluación 6

Use una calculadora científica para encontrar cada raíz cuadrada. Redondee a la centésima más cercana:

a. $\sqrt{607.8}$

b. $\sqrt{0.076}$

Respuestas **a.** 24.65, **b.** 0.28

Sección 4.6 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Cuando encontramos que un número es elevado al cuadrado para obtener un número dado, estamos encontrando la _____ cuadrada del número dado.
2. Los números enteros como 25, 36 y 49 se llaman cuadrados _____ porque sus raíces cuadradas son números enteros.
3. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama _____. Éste indica que debemos encontrar una raíz cuadrada _____.
4. El número decimal que representa $\sqrt{17}$ es un decimal _____ que nunca termina.
5. En $\sqrt{26}$, al número 26 se le llama _____.
6. El símbolo $\approx$ significa _____.

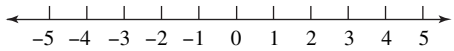
CONCEPTOS *Llene los espacios.*

7. El cuadrado de 5 es ☐, porque $(5)^2 =$ ☐.
8. El cuadrado de $\frac{1}{4}$ es ☐, porque $\left(\frac{1}{4}\right)^2 =$ ☐
9. $\sqrt{49} = 7$, porque ☐ $= 49$.
10. $\sqrt{4} = 2$, porque ☐ $= 4$.
11. $\sqrt{\frac{9}{16}} =$ ☐, porque $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.
12. $\sqrt{0.16} =$ ☐, porque $(0.4)^2 = 0.16$.
13. Sin evaluar las siguientes raíces cuadradas escríbalas en orden, de menor a mayor: $\sqrt{23}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{6}$.
14. Sin evaluar las siguientes raíces cuadradas escríbalas en orden, de menor a mayor: $-\sqrt{13}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{17}$, $-\sqrt{37}$.
15. Evalúe.
    a. $\sqrt{1}$ **b.** $\sqrt{0}$
16. Se puede pensar en la multiplicación como el opuesto de la división. ¿Cuál es el opuesto de encontrar la raíz cuadrada de un número?

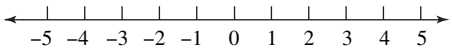
Use una calculadora.

17. **a.** Use una calculadora para aproximar $\sqrt{6}$ a la décima más cercana.
    b. Eleve al cuadrado el resultado de la parte a.
    c. Encuentre la diferencia entre 6 y la respuesta a la parte b.
18. **a.** Use una calculadora para aproximar $\sqrt{6}$ a la centésima más cercana.
    b. Eleve al cuadrado el resultado de la parte a.
    c. Encuentre la diferencia entre 6 y la respuesta a la parte b.

19. Grafique: $\sqrt{9}$ y $-\sqrt{5}$.



20. Grafique: $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$.



21. ¿Entre cuáles dos números enteros se encontrará cada raíz cuadrada cuando se grafique en una recta numérica?

a. $\sqrt{19}$ **b.** $\sqrt{87}$

22. ¿Entre qué par de números naturales se localizarán cada una de las raíces cuadradas cuando se grafican en una recta numérica?

a. $\sqrt{50}$ **b.** $\sqrt{33}$

NOTACIÓN

Complete cada solución para evaluar la expresión.

23. $-\sqrt{49} + \sqrt{64} = \square + \square$
$= 1$

24. $2\sqrt{100} - 5\sqrt{25} = 2(\square) - 5(\square)$
$= \square - 25$
$= -5$

PRÁCTICA

Evalúe cada expresión sin usar una calculadora.

25. $\sqrt{16}$ **26.** $\sqrt{64}$

27. $-\sqrt{121}$ **28.** $-\sqrt{144}$

29. $-\sqrt{0.49}$ **30.** $-\sqrt{0.64}$

31. $\sqrt{0.25}$ **32.** $\sqrt{0.36}$

33. $\sqrt{0.09}$ **34.** $\sqrt{0.01}$

35. $-\sqrt{\frac{1}{81}}$ **36.** $-\sqrt{\frac{1}{4}}$

37. $-\sqrt{\frac{16}{9}}$ **38.** $-\sqrt{\frac{64}{25}}$

39. $\sqrt{\frac{4}{25}}$ **40.** $\sqrt{\frac{36}{121}}$

41. $5\sqrt{36} + 1$ **42.** $2 + 6\sqrt{16}$

43. $-4\sqrt{36} + 2\sqrt{4}$ **44.** $-6\sqrt{81} + 5\sqrt{1}$

45. $\sqrt{\frac{1}{16}} - \sqrt{\frac{9}{25}}$ **46.** $\sqrt{\frac{25}{9}} - \sqrt{\frac{64}{81}}$

47. $5(\sqrt{49})(-2)$ **48.** $(-\sqrt{64})(-2)(3)$

49. $\sqrt{0.04} + 2.36$ **50.** $\sqrt{0.25} + 4.7$

51. $-3\sqrt{1.44}$ **52.** $-2\sqrt{1.21}$

Use una calculadora para completar cada raíz cuadrada de la tabla. Redondee a la milésima más cercana cuando una respuesta no sea exacta.

53.

Número	Raíz cuadrada
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

54.

Número	Raíz cuadrada
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	

Use una calculadora para evaluar la expresión.

55. $\sqrt{1369}$ **56.** $\sqrt{841}$

57. $\sqrt{3721}$ **58.** $\sqrt{5625}$

Use una calculadora para aproximar cada una de las siguientes a la centésima más cercana.

59. $\sqrt{15}$ **60.** $\sqrt{51}$

61. $\sqrt{66}$ **62.** $\sqrt{204}$

Use una calculadora para aproximar cada una de las siguientes a la milésima más cercana.

63. $\sqrt{24.05}$ **64.** $\sqrt{70.69}$

65. $-\sqrt{11.1}$ **66.** $\sqrt{0.145}$

Use una calculadora para evaluar cada expresión radical. Si una respuesta no es exacta redondee a la milésima más cercana.

67. $\sqrt{24\,000\,201}$ **68.** $-\sqrt{4.012009}$

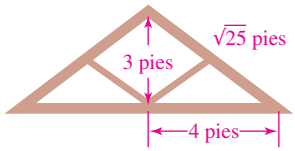
69. $-\sqrt{0.00111}$ **70.** $\sqrt{\frac{27}{44}}$

APLICACIONES

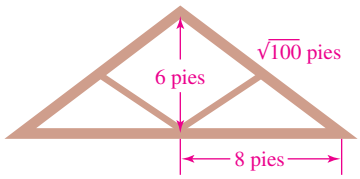
Se han usado las raíces cuadradas para expresar longitudes. Resuelva cada problema evaluando todas las raíces cuadradas. Puede ser que necesite una calculadora. Si es así redondee a la décima más cercana.

71. CARPINTERÍA Encuentre la longitud del lado sesgado de la armadura de techo que se muestra en la siguiente página.

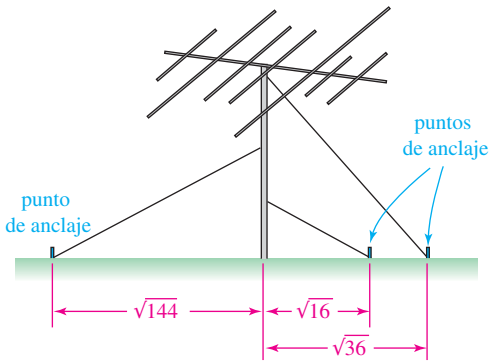
a.



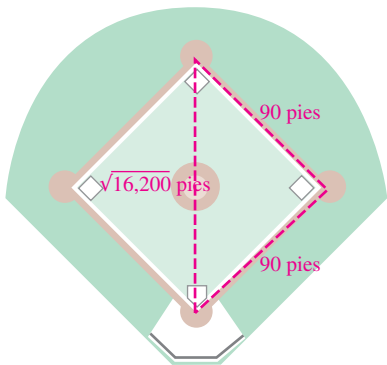
b.



72. ANTENAS DE RADIO ¿Qué tan lejos de la base de una antena está anclado cada cable tensor? (Las medidas están en pies.)

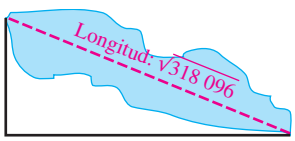


73. BÉISBOL La ilustración muestra las dimensiones de un campo de béisbol de ligas mayores. ¿Qué tan lejos está la segunda base del home?

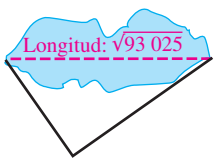


74. TOPOGRAFÍA Use los triángulos imaginarios dibujados por un topógrafo para encontrar la longitud de cada lago. (Considere las dimensiones en metros.)

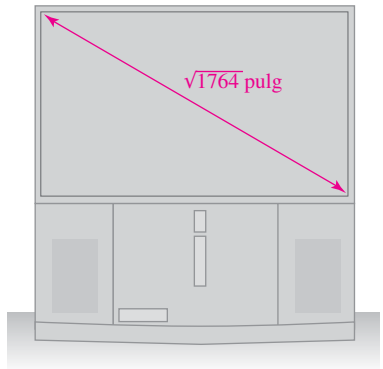
a.



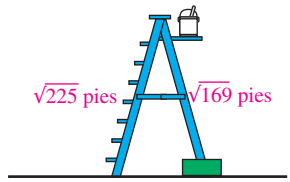
b.



75. TELEVISIÓN DE PANTALLA GRANDE La pantalla de una televisión se mide diagonalmente. ¿De qué tamaño es la pantalla que se muestra?



76. ESCALERAS Se muestra la escalera de un pintor. ¿De qué largo son las patas de la escalera?



POR ESCRITO

77. Cuando se le pidió a un estudiante que encontrara $\sqrt{16}$, respondió 8. Explique qué entendió mal de la raíz cuadrada.

78. Explique la diferencia entre el cuadrado y la raíz cuadrada de un número.

79. ¿Qué es un decimal no periódico? Use un ejemplo para explicarse.

80. ¿Cómo comprobaría si 17 es la raíz cuadrada de 289?

81. Explique por qué $\sqrt{-4}$ no representa a un número real.

82. ¿Hay alguna diferencia entre $-\sqrt{25}$ y $\sqrt{-25}$? Explique.

REPASO

83. Multiplique: $6.75 \cdot 12.2$.

84. Simplifique: $\dfrac{-\frac{2}{3}}{8}$.

85. Evalúe: $5(-2)^2 - \dfrac{16}{4}$.

86. Divida: $5.7\overline{)18.525}$.

87. Enliste el conjunto de los números enteros.

88. Evalúe: $(3.4)^3$.

89. Simplifique: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2$.

90. Inserte el símbolo apropiado, $<$ o $>$, en el espacio para hacer que la afirmación sea verdadera. $-15 \square -14$.

CONCEPTO CLAVE

Los números reales

Un **número real** es cualquier número que se pueda expresar como decimal. El conjunto de los números reales corresponde a todos los puntos de una recta. Todos los tipos de números que hemos discutido en este libro son números reales. Como hemos visto, el conjunto de números reales está formado por varios subconjuntos de números.

De ser posible, enliste los números que pertenecen a cada conjunto. Si no es posible enlistarlos defina el conjunto con palabras.

1. Números naturales

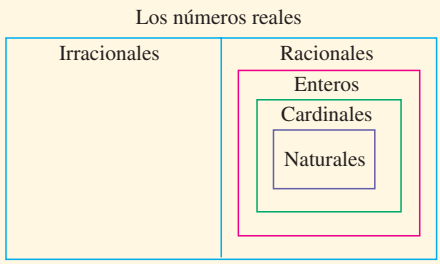
2. Números cardinales

3. Enteros

4. Números racionales

5. Números irracionales

Este diagrama muestra cómo el conjunto de los números reales está formado por dos conjuntos distintos: los números racionales e irracionales. Como cada número natural es un número cardinal, mostramos que el conjunto de números cardinales incluye a los números naturales. Como todo número cardinal es un entero, los cardinales se muestran contenidos en los enteros. Como cada entero es un número racional, mostramos a los enteros contenidos en los números racionales.



Determine si cada afirmación es verdadera o falsa.

6. Todo entero es un número real.

7. Toda fracción se puede escribir como un decimal que termina.

8. Todo número real es un número cardinal.

9. Algunos números irracionales son enteros.

10. Algunos números racionales son números naturales.

11. Ningún número es racional e irracional a la vez.

12. Todos los números reales se pueden graficar en una recta numérica.

13. El conjunto de los números cardinales es un subconjunto de los números irracionales.

14. Todos los decimales terminan o se repiten.

15. Todo número natural es un entero.

16. Enliste los números del conjunto $\{-2, -1.2, -\frac{7}{8}, 0, 1\frac{2}{3}, 2.75, \sqrt{23}, 10, 1.161661666\ldots\}$ que sean

a. números naturales

b. cardinales

c. enteros

d. números racionales

e. números irracionales

f. números reales

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

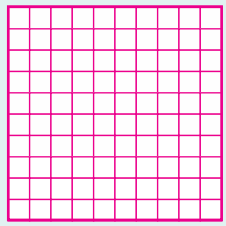
SECCIÓN 4.1

REDONDEO

a. Encuentre todos los números de tres dígitos que se redondean a 4.7.
b. Encuentre todos los números de cuatro dígitos que se redondean a 8.09.
c. Encuentre todos los números de dos dígitos que se redondean a 0.0.

SECCIÓN 4.2

MODELOS VISUALES Sombree una cuadrícula como la de la ilustración para calcular cada suma o resta.



a. $0.62 + 0.24$ **b.** $0.45 - 0.41$
c. $0.21 + 0.29$ **d.** $0.98 - 0.18$
e. $0.2 + 0.17$ **f.** $0.57 - 0.3$

SECCIÓN 4.3

SUCESIONES Se usa la multiplicación por 2 para formar la sucesión 3, 6, 12, 24, 48. 96, ... Esto es, para formar el segundo término (que es 6) multiplicamos el primer término (que es 3) por 2. Para obtener el tercer término (que es 12), multiplicamos el segundo término por 2. Para obtener el cuarto término, multiplicamos el tercer término por 2, y así sucesivamente.

¿Qué multiplicación se usa para obtener los términos de cada una de las sucesiones siguientes?

a. 0.2134, 2.134, 21.34, 213.4, 2134, 21 340, . . .
b. 0.00005, 0.005, 0.5, 50, 5000, . . .
c. 3, 0.9, 0.27, 0.081, 0.0243, 0.00729, . . .
d. 0.7, 0.07, 0.007, 0.0007, 0.00007, 0.000007, . . .

SECCIÓN 4.4

Lea el apartado para pensar a detalle de la página 246 para aprender a calcular el promedio de puntos de calificación (PPC).

Un estudiante asiste a las clases que se muestran en la boleta de calificaciones de abajo, tiene un PPC de 2.6. Determine qué calificación con letra obtuvo en Español II.

Curso	Nombre del curso	Unidades	Calificación
101	Introd. Contabilidad	5.0	C
201	Introd. Psicología	3.0	A
102	Español II	4.0	?
142	Natación	1.0	D
080	Mecanografía	2.0	C

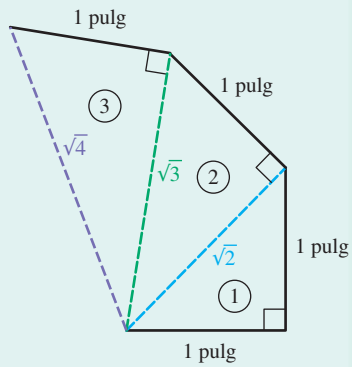
SECCIÓN 4.5

DECIMALES EQUIVALENTES Se pidió a un estudiante escribir varias fracciones como decimales. Sus respuestas, que fueron todas incorrectas, se muestran abajo. ¿Qué es lo que hizo mal?

$\frac{2}{5} = 2.5$ $\frac{4}{15} = 3.75$ $\frac{3}{4} = 1.\overline{3}$

SECCIÓN 4.6

UNA ESPIRAL DE RAÍCES Para este proyecto necesitará una hoja de papel en blanco, una regla, una tarjeta de 3×5 y un lápiz. Empiece dibujando un triángulo con dos lados de 1 pulgada de largo como se muestra en la ilustración. Use la esquina de la tarjeta de 3×5 para ayudar a dibujar la "esquina aguzada" (ángulo de 90°) del triángulo. Después dibuje la línea punteada azul para completar el primer triángulo. Mide $\sqrt{2}$ pulgadas de largo.



Después, cree un segundo triángulo usando un lado del primero para dibujar otro lado de 1 pulgada de largo como se muestra. Complete el segundo triángulo dibujando la línea punteada verde. Mide $\sqrt{3}$ pulgadas de largo. Dibuje un tercer triángulo de forma similar. La línea punteada morada mide $\sqrt{4} = 2$ de largo. Dibuje un cuarto triángulo, un quinto y así sucesivamente. Si el patrón continúa, ¿cuál es la longitud del lado punteado de cada triángulo nuevo?

EVALUACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS Se le pidió a un estudiante que evaluara tres expresiones con raíces cuadradas mostradas abajo. Examine sus respuestas y luego explique qué hizo mal.

$\sqrt{16} = 8$ $\sqrt{64} = 32$ $\sqrt{100} = 50$

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 4.1 *Una introducción a los decimales*

CONCEPTOS

La notación decimal se usa para denotar parte de un todo.

La notación expandida se usa para mostrar el valor representado por cada dígito en el *sistema de numeración decimal.*

$$5.6791 = 5 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{1}{10\,000}$$

Para expresar un decimal en palabras diga:

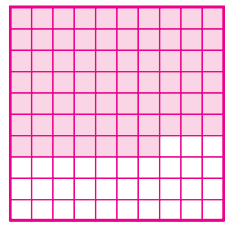
1. El número entero a la izquierda del punto decimal;
2. "y" en lugar del punto decimal;
3. El número entero a la derecha del punto decimal, seguido del nombre de la última cifra a la derecha.

Para comparar el tamaño de dos decimales, compare los dígitos de cada decimal, columna por columna, yendo de la izquierda a la derecha.

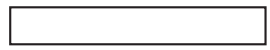
Se pueden escribir un punto decimal y ceros adicionales a la derecha de un número entero.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Represente la cantidad del cuadrado que está sombreada usando un decimal y una fracción.



2. Sombree 0.8 del rectángulo de la ilustración.



3. Escriba 16.4523 en notación expandida.

Escriba cada decimal en palabras y luego como una fracción o número mixto.

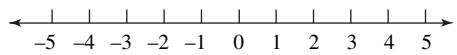
4. 2.3

5. −15.59

6. 0.0601

7. 0.00001

8. Grafique: 1.55, −0.8 y −2.7.



9. ESTUDIANTES CON BUENAS CALIFICACIONES Al final del año escolar, los cinco estudiantes enlistados estaban en competencia para ver quién tenía las mejores calificaciones. Ordene los estudiantes por PPC empezando con el que tenga las mejores calificaciones.

Nombre	PPC
Díaz, Cielo	3.9809
Chou, Wendy	3.9808
Washington, Shelly	3.9865
Gerbac, Lance	3.899
Singh, Amani	3.9713

10. Verdadero o falso: 78 = 78.0.

Ponga el símbolo apropiado <, > o = en el espacio para que la afirmación sea verdadera.

11. 4.5 ☐ 4.6

12. −2.35 ☐ −2.53

13. 10.90 ☐ 10.9

14. 0.027894 ☐ 0.034

Para redondear un decimal, localice el dígito a redondear y el dígito de prueba.

1. Si el dígito de prueba es menor que 5, se elimina junto con todos los dígitos a su derecha.
2. Si es 5 o mayor, sume 1 al dígito del redondeo y elimine todos los dígitos a su derecha.

Redondee una decimal en el valor que se indica.

15. 4.578: centésimos

16. 3,706.0895: milésimos

17. −0.0614: décimos

18. 88.12: décimos

SECCIÓN 4.2 *Suma y resta de decimales*

Para sumar (o restar) decimales:

1. Alinéelos con sus puntos decimales.
2. Sume (o reste) como lo haría con números enteros.
3. Escriba el punto decimal en el resultado debajo de los puntos decimales en el problema.

Haga cada suma o resta.

19. 19.5 + 34.4 + 12.8

20. 3.4 + 6.78 + 35 + 0.008

21. 68.47 − 53.3

22. 45.08 − 17.37

Evalúe cada expresión.

23. −16.1 + 8.4

24. −4.8 − (−7.9)

25. −3.55 + (−1.25)

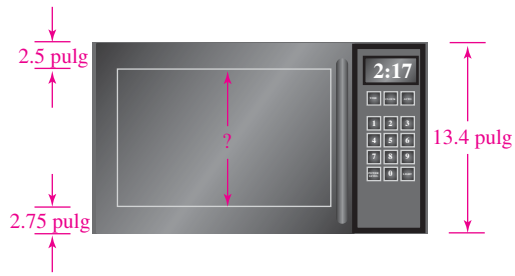
26. −15.1 − 13.99

27. −8.8 + (−7.3 − 9.5)

28. (5 − 0.096) − (−0.035)

29. PRECIO DE VENTA Una calculadora se vende normalmente por $52.20. Si se le descuentan $3.99, ¿cuál es su precio de venta?

30. HORNO DE MICROONDAS Se muestra un horno de microondas. ¿Cuál es la altura de la ventana?



SECCIÓN 4.3 *Multiplicación de decimales*

Para multiplicar decimales:

1. Multiplique como si lo hiciera con números enteros.
2. Coloque el punto decimal en el resultado de tal forma que la respuesta tenga el mismo número de cifras decimales que el total de cifras decimales en los factores.

Para multiplicar un decimal por una potencia de 10 mueva el punto decimal a la derecha el mismo número de cifras que ceros tenga la potencia de 10.

Haga cada multiplicación.

31. (−0.6)(0.4)

32. 2.3 · 0.9

33. 5.5(−3.1)

34. 32.45(6.1)

35. (−0.003)(−0.02)

36. 7 · 0.6

Haga cada multiplicación mentalmente.

37. 1000(90.1452)

38. (−10)(−2.897)(100)

Se usan los exponentes para representar una multiplicación repetida.

Encuentre cada potencia.

39. $(0.2)^2$ **40.** $(-0.15)^2$ **41.** $(3.3)^2$ **42.** $(0.1)^3$

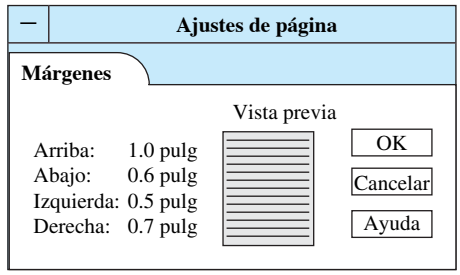
Evalúe cada expresión.

43. $(0.6 + 0.7)^2 - 12.3$ **44.** $3(7.8) + 2(1.1)^2$

Para evaluar una expresión algebraica, sustituya números específicos en lugar de las variables en la expresión y aplique las reglas para el orden de las operaciones.

45. Evalúe la fórmula $A = lw$ para $l = 32.5$ y $w = 21.3$.

46. PROCESADORES DE TEXTO Se muestra la pantalla para ajustes de página de un procesador de texto. Encuentre el área que se puede llenar con texto en una hoja de papel de 8.5 pulg. × 11 pulg. si se fijan los márgenes como se indica.



47. PINTURA AUTOMOTRIZ Un fabricante utiliza un proceso de tres pasos para terminar el exterior de los autos que produce.

Paso 1: Se aplica un recubrimiento de 0.03 de pulgada de espesor de anticorrosivo.

Paso 2: Se rocían tres capas de color, cada una de 0.015 de pulgada de espesor.

Paso 3: Se pule y da brillo, perdiendo 0.005 de pulgada de su espesor.

¿Cuál es el espesor resultante del acabado automotriz?

SECCIÓN 4.4 *División de decimales*

Para dividir un decimal entre un número entero:

1. Divídalo como si lo hiciera con números enteros.
2. Escriba el punto decimal en el resultado sobre el punto decimal del dividendo.

Para dividir entre un decimal:

1. Mueva el punto decimal en el divisor para que se convierta en un número entero.
2. Mueva el punto decimal en el dividendo el mismo número de cifras a la derecha.
3. Use el proceso para dividir un decimal entre un número entero.

Haga cada división.

48. $12\overline{)15}$ **49.** $-41.8 \div 4$ **50.** $\dfrac{-29.67}{-23}$ **51.** $24.618 \div 6$

Haga cada división.

52. $12.47 \div (-4.3)$ **53.** $\dfrac{0.0742}{1.4}$

54. $\dfrac{15.75}{0.25}$ **55.** $\dfrac{-0.03726}{-0.046}$

Divida y redondee cada resultado hasta el décimo más cercano.

56. $78.98 \div 6.1$ **57.** $\dfrac{-5.338}{0.008}$

58. Evalúe la fórmula $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$ para $F = 68.4$ y redondee al centésimo más cercano.

59. CENA DEL DÍA DE ACCIÓN DE GRACIAS El costo de la compra de los ingredientes para el pavo del día de acción de gracias para una familia de 5 fue $41.70. ¿Cuál fue el costo por persona de la cena?

Para dividir un decimal entre una potencia de 10, mueva el punto decimal a la izquierda el mismo número de cifras que ceros tenga la potencia de 10.

Haga cada división mentalmente.

60. $89.76 \div 100$

61. $\dfrac{0.0112}{-10}$

62. Evalúe la expresión numérica: $\dfrac{(1.4)^2 + 2(4.6)}{0.5 + 0.3}$.

63. TAMAÑO DE UNA RACIÓN La ilustración muestra el etiquetado de un paquete de una caja de cereal para niños. Use la información para encontrar el número de raciones.

Información nutricional	
Ración	1.1 onzas
Raciones por paquete	?
Peso del paquete	15.5 onzas

64. TELESCOPIOS Se utiliza una perilla de ajuste para cambiar la posición del espejo de enfoque en un telescopio. El espejo se mueve 0.025 de pulgada con cada vuelta de la perilla. El espejo necesita moverse 0.2375 de pulgada para mejorar la nitidez de la imagen. ¿Cuántas vueltas de la perilla se requieren?

SECCIÓN 4.5 *Fracciones y decimales*

Para escribir una fracción como decimal divida el numerador entre el denominador.

Obtenemos un decimal que *termina* o un decimal periódico cuando se usa la división para escribir una fracción como un decimal.

Se puede usar una raya arriba en lugar de los tres puntos . . . para representar el patrón de repetición en un decimal periódico.

Escriba cada fracción en forma decimal

65. $\dfrac{7}{8}$

66. $-\dfrac{2}{5}$

67. $\dfrac{9}{16}$

68. $\dfrac{3}{50}$

Escriba cada fracción como decimal. Use una barra superior.

69. $\dfrac{6}{11}$

70. $-\dfrac{2}{3}$

Escriba cada fracción en forma decimal. Redondee a la centésima más cercana.

71. $\dfrac{19}{33}$

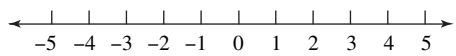
72. $\dfrac{31}{30}$

Coloque el símbolo $<$ o $>$ en el espacio para que la afirmación sea verdadera.

73. $\dfrac{13}{25}$ ☐ 0.499

74. $-0.\overline{26}$ ☐ $-\dfrac{4}{15}$

75. Grafique: $1\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{3}$, $2\frac{3}{4}$ y $-\frac{9}{10}$. Etiquete cada punto usando el equivalente decimal de la fracción o número mixto.



Evalúe cada expresión. Encuentre la respuesta exacta.

76. $\dfrac{1}{3} + 0.4$

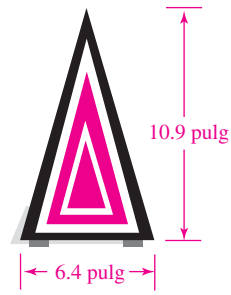
77. $\dfrac{4}{5}(-7.8)$

78. $\dfrac{1}{2}(9.7 + 8.9)(10)$

79. $\dfrac{1}{3}(3.14)(3)^2(4.2)$

80. Evalúe $\dfrac{4}{3}(3.14)(2)^3$. Redondee el resultado a la centésima más cercana.

81. EMERGENCIA EN EL CAMINO En caso de problema, Los camioneros llevan reflectores para colocarse en el borde de la carretera para advertir a los autos que se aproximan a un vehículo parado. ¿Qué área tiene uno de estos reflectores triangulares?



SECCIÓN 4.6 *Raíces cuadradas*

Un número es la raíz cuadrada de un segundo número si el cuadrado del primero es igual al segundo.

82. Llene los espacios.

a. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama _____ símbolo.

b. $\sqrt{64} = 8$ porque $\square = 64$.

Se usa *un símbolo radical* $\sqrt{\ }$ para indicar la raíz cuadrada positiva. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es un número entero.

Evalúe cada expresión sin usar una calculadora

83. $\sqrt{49}$ **84.** $-\sqrt{16}$ **85.** $\sqrt{100}$ **86.** $\sqrt{0.09}$

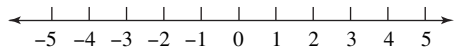
87. $\sqrt{\frac{64}{25}}$ **88.** $\sqrt{0.81}$ **89.** $-\sqrt{\frac{1}{36}}$ **90.** $\sqrt{0}$

91. ¿Entre cuáles dos números enteros estaría $\sqrt{83}$ cuando se grafique en una recta numérica?

Se puede usar una calculadora para aproximar una raíz cuadrada.

92. Use una calculadora para encontrar $\sqrt{11}$ y redondéelo a la décima más cercana. Luego eleve al cuadrado la aproximación. ¿Qué tan cerca está de 11?

93. Grafique cada raíz cuadrada: $\sqrt{3}, -\sqrt{2}$ y $\sqrt{0}$.



Evalúe cada expresión sin usar calculadora.

94. $-3\sqrt{100}$ **95.** $5\sqrt{0.25}$

96. $-3\sqrt{49} - \sqrt{36}$ **97.** $\sqrt{\frac{9}{100}} + \sqrt{1.44}$

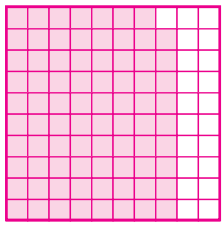
Cuando se evalúa una expresión que contiene raíces cuadradas trate el radical como lo haría con una potencia cuando se apliquen las reglas para el orden de las operaciones.

Use una calculadora para encontrar la raíz cuadrada a la centésima más cercana.

98. $\sqrt{19}$ **99.** $\sqrt{59}$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4

1. Exprese la cantidad del cuadrado que está sombreada usando una fracción y un decimal.



2. PUREZA DEL AGUA El departamento de salud de un país tomó una muestra del contenido de contaminantes de agua potable en cinco ciudades con los resultados que se muestran. Ordene las ciudades de la que tiene el agua más sucia a la más limpia.

Ciudad	Contaminación, partes por millón
Monroe	0.0909
Covington	0.0899
Paston	0.0901
Cadia	0.0890
Selway	0.1001

3. Escriba cada decimal en palabras y luego como fracción o número mixto. **No simplifique la fracción.**

a. PATINETAS Gary Hardwick de Carlsbad, California, impuso el récord de 62.5 mph en 1998.

b. DINERO Una moneda de 10 centavos pesa 0.08013 onzas.

4. Redondee a la milésima más cercana: 33.0495.

5. ENTRADAS DE PATINAJE En un complejo de patinaje en hielo, las entradas del viernes fueron $30.25 para el patinaje en interiores y $62.25 para exteriores. El sábado las entradas correspondientes fueron $40.50 y $75.75. Encuentre las entradas totales de ambos días.

6. Haga cada operación mentalmente.

a. $567.909 \div 1000$ **b.** $0.00458 \cdot 100$

7. LÍNEAS DE FALLA Después de un terremoto los geólogos encontraron que el terreno al oeste de una línea de falla se había hundido 0.83 de pulgada. La siguiente semana una fuerte réplica provocó que la misma área se hundiera 0.19 de pulgada adicionales. ¿Cuánto se hundió el terreno en el lado oeste de la falla debido a la actividad sísmica?

8. Haga cada operación.

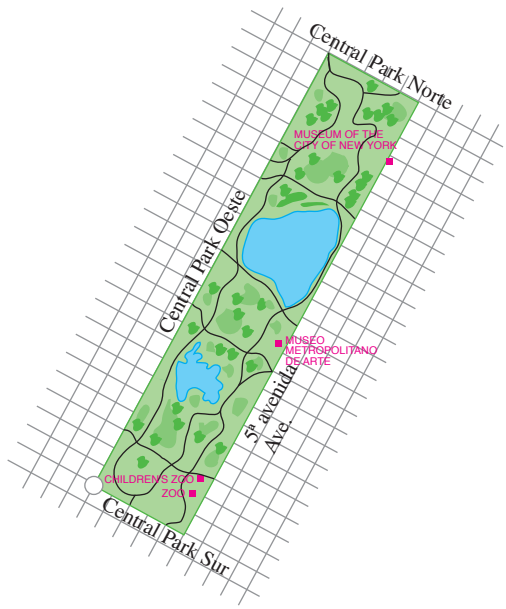
a. $2 + 4.56 + 0.89 + 3.3$

b. $45.2 - 39.079$

c. $(0.32)^2$

d. $-6.7(-2.1)$

9. CENTRAL PARK El Central Park, que se encuentra a mitad de Manhattan, es el parque mejor conocido de la ciudad. Si tiene 2.5 millas de largo y 0.5 millas de ancho, ¿cuál es su área?



10. DIRECTORIO TELEFÓNICO Se usaron 565 hojas de papel para imprimir un directorio telefónico. Si el directorio tiene 2.3 pulgadas de grueso, ¿cuál es el espesor de cada hoja de papel? (Redondee a la milésima más cercana de pulgada.)

11. Evalúe: $4.1 - (3.2)(0.4)^2$.

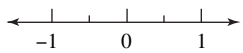
12. Escriba cada fracción como decimal.

a. $\frac{17}{50}$ **b.** $\frac{5}{12}$

13. Haga la división y redondee a la centésima más cercana: $\frac{12.146}{-5.3}$.

14. Divida: $11\overline{)13}$.

15. Grafique: $\frac{3}{8}$ y $-\frac{4}{5}$. Localice cada punto usando el equivalente decimal de las fracciones dadas.



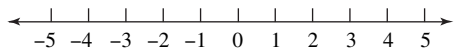
16. Encuentre la respuesta exacta: $\frac{2}{3} + 0.7$.

17. QUÍMICA En un experimento de laboratorio, un químico mezcló tres compuestos para formar una mezcla que pesó 4.37 g. Después se dio cuenta de que había olvidado apuntar en sus notas el peso del compuesto C. Encuentre el peso del compuesto C usado en el experimento.

	Peso
Compuesto A	1.86 g
Compuesto B	2.09 g
Compuesto C	?
Mezcla total	4.37 g

18. COSTOS DE UNA BODA Un impresor cobra una cuota de \$24 y adicionalmente 95 centavos por cada invitación de boda impresa (incluidos impuestos). Si una pareja tiene un presupuesto de \$100 para los costos de imprenta, ¿cuántas invitaciones podrían hacer?

19. Grafique: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{5}$.



20. Llene el espacio: El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama _____ .

21. Llene el espacio: $\sqrt{144} = 12$, porque ☐ $= 144$.

22. Evalúe cada expresión.

a. $-2\sqrt{25} + 3\sqrt{49}$ **b.** $\sqrt{\frac{1}{36}} - \sqrt{\frac{1}{25}}$

23. Inserte el símbolo apropiado $<$ o $>$ para que las afirmaciones sean verdaderas.

a. -6.78 ☐ -6.79 **b.** $\frac{3}{8}$ ☐ 0.3

c. $\sqrt{\frac{16}{81}}$ ☐ $\frac{16}{81}$ **d.** $0.\overline{45}$ ☐ 0.45

24. Evalúe cada raíz cuadrada.

a. $-\sqrt{0.04}$ **b.** $\sqrt{1.69}$

25. Aunque el decimal 3.2999 contiene más dígitos que 3.3, es menor que 3.3. Explique por qué es así.

26. ¿Qué es un decimal periódico? Dé un ejemplo.

CAPÍTULOS 1–4 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

1. EL PODER EJECUTIVO Los salarios anuales del presidente y vicepresidente de los Estados Unidos son $400 000 y $203 000 respectivamente. ¿Cuánto más gana el presidente que el vicepresidente anualmente?

2. Use 3, 4 y 5 para expresar la propiedad asociativa de la suma.

3. Divida: $43\overline{)1203}$.

4. ¿Cuántos miles hay en un millón?

5. Encuentre la factorización en números primos de 220.

6. Enliste los factores de 20, de menor al mayor.

7. Indique el conjunto de los cardinales.

8. Sume: $-8 + (-5)$.

9. Llene el espacio: restar es lo mismo que _____ el opuesto.

10. Complete la solución para evaluar la expresión.

$$\begin{aligned}(-6)^2 - 2(5 - 4\cdot 2) &= (-6)^2 - 2(5 - \square)\\ &= (-6)^2 - 2(\square)\\ &= \square - 2(-3)\\ &= 36 - (\square)\\ &= 36 + \square\\ &= 42\end{aligned}$$

11. Considere la afirmación sobre la división: $\frac{-15}{-5} = 3$.

¿Cuál es la afirmación relacionada de multiplicación?

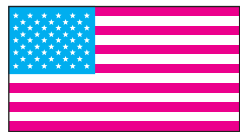
12. Encuentre la potencia: $(-1)^5$.

13. Evalúe: $|-7(5)|$.

14. ¿Cuál es el opuesto de -102?

15. CUENTA DE CHEQUES Después de un depósito de $995 la cuenta de cheques de un estudiante todavía está sobregirada por $105. ¿Cuál era el saldo de la cuenta antes del depósito?

16. ¿Qué fracción de las franjas de la bandera son blancas?



17. Aunque las fracciones enlistadas abajo se ven diferentes, todas representan el mismo valor. ¿Qué concepto ilustra esto?

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

18. Simplifique: $\frac{90}{126}$.

Efectúe las operaciones.

19. $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{16}$

20. $-\frac{15}{8} \div 10$

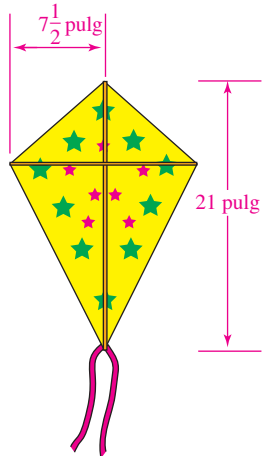
21. $\frac{4}{3} + \frac{2}{7}$

22. $-4\frac{1}{4}\left(-4\frac{1}{2}\right)$

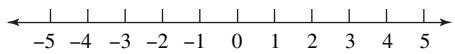
23. $76\frac{1}{6} - 49\frac{7}{8}$

24. $\dfrac{\frac{5}{27}}{-\frac{5}{9}}$

25. PAPALOTES Encuentre el área del papalote.



26. Grafique todos los números del conjunto:
$\{-3\frac{1}{4}, 0.75, -1.5, -\frac{9}{8}, 3.8, \sqrt{4}\}$.



27. VIDRIO Algunos equipos electrónicos y médicos usan vidrio de tan sólo 0.00098 de pulgada de espesor. Redondee el número a la milésima más cercana,

28. Ponga el símbolo apropiado > o < en el espacio para que la afirmación sea verdadera.

356.1978 ▢ 356.22

Realice las operaciones.

29. $-1.8(4.52)$

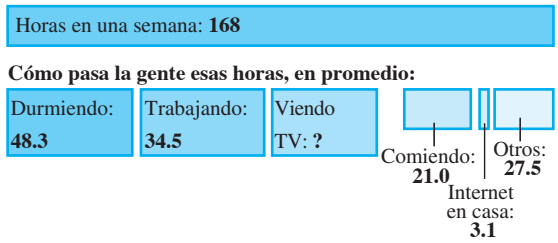
30. $\dfrac{-21.28}{-3.8}$

31. $56.012(100)$

32. $\dfrac{0.897}{10\,000}$

33. Evalúe: $-9.1 - (-6.05 - 51)$.

34. HORARIOS SEMANALES Determine el número de horas semanales que pasa un adulto, en promedio, viendo televisión.



Fuente: Sociedad Nacional del Sueño y Oficina de Estadística de los EU.

35. LITERATURA La novela *Fahrenheit 451,* de Ray Bradbury, es una historia sobre la censura y la quema de libros. Use la fórmula $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$ para convertir 451 ºF a grados Celsius reemplazando F con 451. Redondee a la décima más cercana de un grado.

36. Escriba $\dfrac{5}{12}$ como decimal. Use una barra superior.

37. CONCESIONARIOS En un estadio de béisbol a una vendedora se le pagan $22 por juego más 35 centavos por cada bolsa de cacahuates que venda. Si vende 80 bolsas de cacahuates, ¿cuánto ganará trabajando en el estadio?

Evalúe cada expresión.

38. $\sqrt{49}$

39. $\sqrt{\dfrac{625}{16}}$

40. $-4\sqrt{36} + 2\sqrt{81}$

CAPÍTULO 5

Porcentaje

5.1 Porcentajes, decimales y fracciones

5.2 Resolución de problemas con porcentajes

5.3 Aplicaciones de los porcentajes

Estimación

5.4 Interés

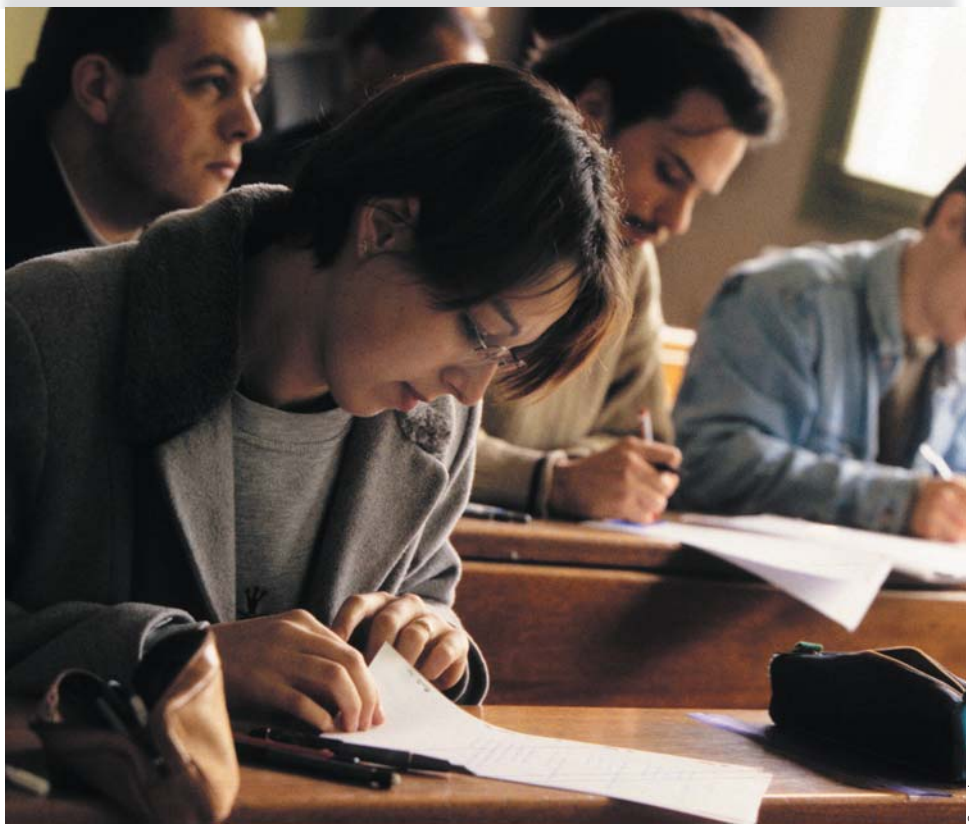
Concepto clave: porcentaje

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso



Getty Images

Los porcentajes se usan comúnmente para presentar información numérica. La palabra porcentaje proviene de la frase latina *per centum*, que significa partes por un ciento. Muchos maestros usan una escala de calificaciones porcentual cuando evalúan el trabajo de sus estudiantes. Por ejemplo, si un estudiante responde correctamente 85 de 100 preguntas tipo cierto/falso en un examen de historia, su calificación porcentual puede expresarse como 85%.

Verifique sus conocimientos

1. Porcentaje significa partes por _____ _____.
2. En la afirmación "40 es 50% de 80", 40 es _____, 50% es el _____, y 80 es el _____.
3. La diferencia entre el precio original y el precio de venta de un artículo se conoce como _____.
4. En los bancos la cantidad de dinero original retirada o depositada es el _____.
5. Cambie cada fracción a un decimal y a un porcentaje.
   a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{5}{8}$ **c.** $\frac{29}{20}$
6. Cambie cada decimal a un porcentaje y a una fracción.
   a. 0.35 **b.** 3.98 **c.** 0.105
7. Cambie cada porcentaje a un decimal y a una fracción.
   a. 25% **b.** 200% **c.** 0.5%
8. Si un vaso está lleno un 65%, ¿qué porcentaje del vaso está vacío?
9. Cambie $\frac{2}{3}$ a un porcentaje. Redondee al décimo más cercano.
10. Encuentre el equivalente porcentual exacto de cada fracción.
    a. $\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{1}{3}$
11. ¿Cuánto es 65% de 500?
12. ¿Qué porcentaje de 200 es 34?
13. ¿13 es el 25% de qué número?
14. ¿Qué porcentaje de 50 es 125?
15. Normalmente una pluma cuesta $14.95. El precio de venta es inferior en 20% respecto del precio normal. ¿Cuáles son el descuento y el precio de venta?
16. Si la tasa de impuesto de venta es 8.25%, ¿cuál es el precio de venta de un artículo cuando el impuesto es $2.47. Redondee al centavo más cercano.
17. Encuentre el interés simple de una cuenta de ahorros de $2000.00 al término de un año si la tasa de interés es 2.3%.
18. Calcule el saldo de una cuenta después de dos años en una inversión de $1500.00 con rendimientos de 5.6% pagaderos trimestralmente.
19. Sólo 3 de 46 lugares de estacionamiento estaban desocupados. ¿Qué porcentaje del estacionamiento estaba ocupado? Redondee a la unidad porcentual más cercana.
20. Si Sheila solicita un préstamo de $1000 a un interés anual simple de 18%, cuál será la cantidad pagada si liquida el préstamo después de tres meses?
21. Si Leslie desea pagar una propina de 15% por una comida que costó $35.40, ¿cuál será el costo total incluyendo la propina?
22. Un cuestionario tiene 15 preguntas. Suponiendo que las preguntas tienen el mismo valor, ¿cuántas preguntas tiene que responder correctamente para obtener una calificación mínima de 85%?

Taller de habilidades para el estudio

TAREA

Uno de los pasos más importantes para tener éxito en las clases es hacer un trabajo a conciencia con la tarea. Sentarse y escuchar en la clase le ayudará a colocar los conceptos en la memoria de corto plazo, pero para que le vaya bien en los exámenes y en las clases subsecuentes, tendría que poner esos conceptos en la memoria de largo plazo. Las tareas le ayudan a lograrlo siempre y cuando se realicen correctamente.

¿Se está tomando el tiempo suficiente? Recuerde que en su primer taller de habilidades para el estudio, usted elaboró un calendario que programaba 2 horas de estudio y tarea por cada hora de clase. Si no sigue esta programación, efectúe los cambios que le aseguren que puede pasar suficiente tiempo fuera de clase aprendiendo los materiales nuevos. Asegúrese que distribuye este tiempo durante un periodo mínimo de cinco días por semana en lugar de una o dos sesiones largas.

Antes que comience a resolver sus problemas de tarea. En el taller anterior de habilidades para el estudio, su tarea fue retrabajar sus notas. Recuerde que siempre debe retrabajar primero las notas que se relacionen con su tarea antes de comenzarla. Después de retrabajar sus notas lea las secciones en su libro de texto que pertenezcan a los problemas de la tarea, viendo especialmente los ejemplos. Con un lápiz a la mano retrabaje los ejemplos tratando de entender cada paso. Elabore una lista que incluya todo lo que no entienda tanto de sus notas como de los ejemplos del texto.

Resuelva sus problemas de tarea. Una vez que haya repasado sus notas y los ejemplos del texto, usted debe ser capaz de manejar la mayor parte de su tarea con facilidad. Cuando haga su tarea tenga a la mano su libro de texto y sus notas para que las pueda consultar de ser necesario. Si tiene problemas con una pregunta de la tarea revise su libro y sus notas para ver si puede identificar un ejemplo similar a la pregunta de la tarea. Si hay partes donde se queda atorado, añada esto a su lista de preguntas.

Antes de entregar su tarea, como mínimo un día antes de entregarla, solicite ayuda para resolver su lista de preguntas. Puede recurrir a un compañero, hacer una cita con un tutor o visitar a su maestro en horas hábiles. Asegúrese de llevar su lista y trate de señalar exactamente en qué parte del proceso se detuvo.

TAREA

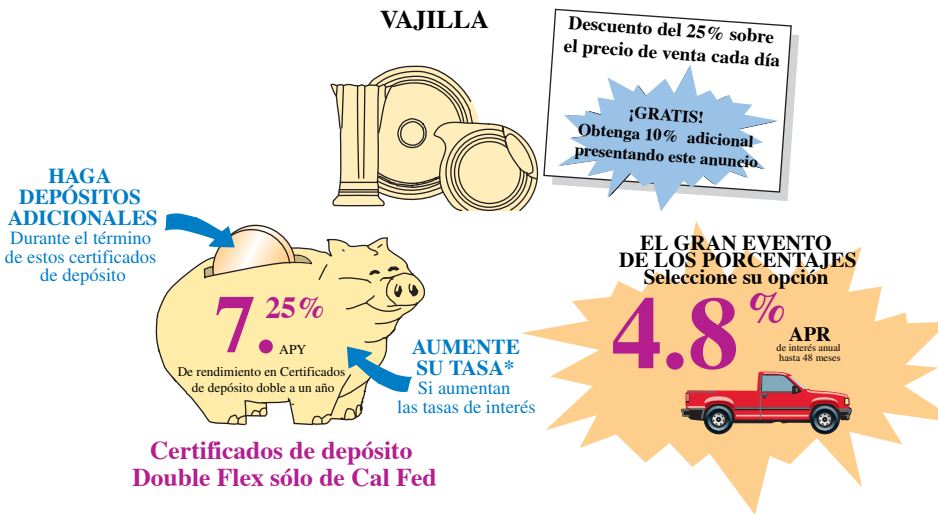
1. Revise su calendario de estudios. ¿Lo está siguiendo? Si no es así, ¿qué cambios puede hacer para apegarse a la regla: dos horas de trabajo y tarea por cada hora de clase?
2. Encuentre cinco problemas de la tarea que sean similares a los ejemplos del texto. Escriba cada problema con su ejemplo correspondiente. ¿Hubo algún problema en la tarea que no tuviera un ejemplo similar?
3. Haga una lista de problemas sobre los que tenga preguntas o no sepa cómo hacerlos. Consulte a su tutor o maestro, en el horario establecido, presente su lista de problemas y pídale que lo asesore en la resolución de uno o varios problemas.

Los porcentajes se basan en el número 100, y brindan una forma de medir y describir muchas situaciones de la vida diaria.

5.1 Porcentajes, decimales y fracciones

- Significado del porcentaje
- Cambio de un porcentaje a una fracción
- Cambio de un porcentaje a un decimal
- Cambio de un decimal a un porcentaje
- Cambio de una fracción a un porcentaje

Los porcentajes son una forma popular de presentar información numérica. Las tiendas los utilizan para anunciar descuentos, los fabricantes los usan para describir el contenido de sus productos y los bancos los usan para indicar los intereses de las cuentas de ahorros y los préstamos. Los diarios están llenos de estadísticas presentadas en forma porcentual. En esta sección introducimos los porcentajes y cómo se relacionan las fracciones, los decimales y los porcentajes.


VAJILLA
Descuento del 25% sobre el precio de venta cada día
¡GRATIS! Obtenga 10% adicional presentando este anuncio
HAGA DEPÓSITOS ADICIONALES
Durante el término de estos certificados de depósito
7.25% APY
De rendimiento en Certificados de depósito doble a un año
AUMENTE SU TASA*
Si aumentan las tasas de interés
Certificados de depósito Double Flex sólo de Cal Fed
EL GRAN EVENTO DE LOS PORCENTAJES
Seleccione su opción
4.8% APR
de interés anual hasta 48 meses

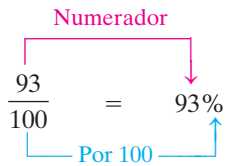
Significado del porcentaje

Un porcentaje indica el número de partes por un ciento. Puede pensar el porcentaje como el *numerador* de una fracción que tiene un denominador de 100.

Porcentaje

Porcentaje significa partes por un ciento.

En la figura 5.1 hay 100 cuadrados del mismo tamaño y 93 están sombreados. Por tanto $\frac{93}{100}$ o 93 por ciento de la figura está sombreada. La palabra porcentaje se puede indicar usando el símbolo %, de esta forma 93% de la figura está sombreada.



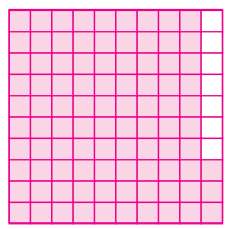


FIGURA 5.1

Si estuviera sombreada toda la cuadrícula de la figura 5.1 se podría decir que están sombreados 100 de 100 o el 100%. Usando este hecho podemos determinar qué porcentaje de la figura *no* está sombreada restando de 100% el porcentaje de la figura que está sombreada.

$$100\% - 93\% = 7\%$$

En consecuencia 7% de la figura no está sombreada.

Cambio de un porcentaje a una fracción

Para cambiar un porcentaje a una fracción equivalente usamos la definición de porcentaje.

Cambio de un porcentaje a una fracción

Para cambiar un porcentaje a una fracción quite el símbolo % y escriba el número dado sobre 100. De ser posible simplifique la fracción.

EJEMPLO 1 **Tierra.** La composición química de la atmósfera de la Tierra es nitrógeno 78%, oxígeno 21% y otros gases 1%. Escriba cada porcentaje como fracción.

Solución Empezamos con el nitrógeno

$$78\% = \frac{78}{100}$$ Use la definición de porcentaje: 78% significa 78 partes por un ciento. Esta fracción se puede simplificar.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 39}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 50}$$ Factorice 78 como $2 \cdot 39$ y 100 como $2 \cdot 50$. Cancele el factor común 2.

$$= \frac{39}{50}$$

El nitrógeno es $\frac{78}{100}$, o $\frac{39}{50}$, de la atmósfera terrestre. El oxígeno es el 21% o $\frac{21}{100}$, de la atmósfera terrestre. Otros gases son el 1% o $\frac{1}{100}$, de la atmósfera.

Autoevaluación 1
Una sandía promedio tiene 42% de agua. Escriba este porcentaje como una fracción.

Respuesta $\frac{23}{25}$

EJEMPLO 2 **Sindicatos.** En 2003, 12.9% de la fuerza de trabajo de EU pertenecía a algún sindicato. Indique lo anterior como una fracción.

Solución

$$12.9\% = \frac{12.9}{100}$$ Quite el símbolo % y escriba 12.9 sobre 100.

$$= \frac{12.9 \cdot \mathbf{10}}{100 \cdot \mathbf{10}}$$ Para obtener un número entero en el numerador multiplique por 10. Esto moverá el punto decimal una cifra a la derecha. Multiplique también el denominador por 10.

$$= \frac{129}{1000}$$ Realice la multiplicación en el numerador y en el denominador.

Por tanto, $12.9\% = \frac{129}{1000}$. Esto significa que 129 de cada mil trabajadores de la fuerza laboral en Estados Unidos pertenecían a un sindicato en 2003.

Autoevaluación 2
En 2002, 13.3% de la fuerza laboral de Estados Unidos estaba sindicalizada. Escriba este porcentaje como fracción.

Respuesta $\frac{133}{1000}$

Autoevaluación 3

Escriba $83\frac{1}{3}\%$ como fracción.

Respuesta $\frac{5}{6}$

EJEMPLO 3 Escriba $66\frac{2}{3}\%$ como fracción.

Solución

$$66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100}$$ Quite el símbolo % y escriba $66\frac{2}{3}$ sobre 100.

$$= 66\frac{2}{3} \div 100$$ La barra de fracción indica división.

$$= \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{100}$$ Cambie $66\frac{2}{3}$ por una fracción impropia y después multiplique por el recíproco de 100.

$$= \frac{2 \cdot 100 \cdot 1}{3 \cdot 100}$$ Multiplique los numeradores y denominadores. Factorice 200 como $2 \cdot 100$.

$$= \frac{2 \cdot \cancel{100}^{1} \cdot 1}{3 \cdot \cancel{100}_{1}}$$ Cancele el factor común de 100.

$$= \frac{2}{3}$$ Multiplique en el numerador y en el denominador.

Cambio de un porcentaje a un decimal

Para escribir un porcentaje como decimal recuerde que un porcentaje se puede indicar como una fracción cuyo denominador es 100, y que un denominador de 100 indica división entre 100.

Considere 14.25%, que significa 14.25 partes por 100.

$$14.25\% = \frac{14.25}{100}$$ Use la definición de porcentaje: escriba 14.25 sobre 100.

$$= 14.25 \div 100$$ La fracción indica división.

$$= 0.14\,25$$ Para dividir el decimal entre 100 mueva el punto decimal dos cifras a la izquierda.

$$14.25\% = 0.1425$$

Este ejemplo sugiere el siguiente procedimiento.

Cambio de un porcentaje a un decimal

Para cambiar un porcentaje a un decimal, quite el símbolo % y divida entre 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la izquierda.

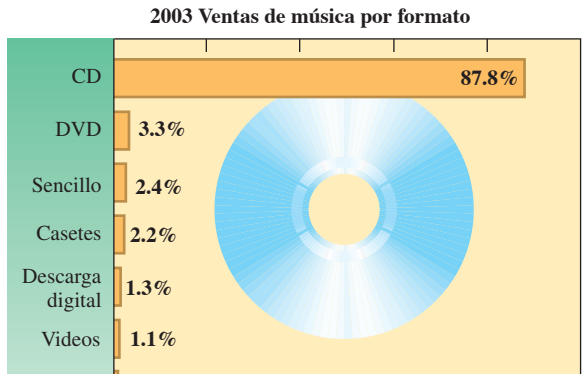
Autoevaluación 4

¿Qué porcentaje de toda la música vendida se produce en LP (álbumes musicales de larga duración hechos de acetato)? Escriba el porcentaje como un decimal.

EJEMPLO 4

La industria de la música

La figura 5.2 muestra que el disco compacto se ha vuelto el formato preferido entre la mayoría de los consumidores. ¿Qué porcentaje de toda la música vendida se produce en CDs? Escriba el porcentaje como un decimal.



Fuente: *Asociación de la Industria de la Grabación de América.*

FIGURA 5.2

Solución De la gráfica vemos que 87.8% de toda la música vendida se produce en CD. Para escribir 87.8% como decimal procedemos como sigue:

$87.8\% = .87\,8$ Quite el símbolo de porcentaje y divida entre 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la izquierda.

$= 0.878$ Escriba un cero a la izquierda del punto decimal.

Respuesta 0.5% o 0.005

EJEMPLO 5 Escriba 310% como un decimal.

Solución El número entero 310 tiene un punto decimal implícito a la derecha de 0.

$310\% = 310.0\%$ Escriba un punto decimal y un cero a la derecha de 310.

$= 3.10\,0$ Quite el símbolo % y divida entre 100 moviendo el punto decimal 2 lugares a la izquierda.

$= 3.100$

$= 3.1$ Quite los ceros innecesarios a la derecha de 1.

Respuesta 6

Autoevaluación 5
Escriba 600% como decimal.

EJEMPLO 6 **Estados de Norteamérica.** La población del estado de Oregon es aproximadamente $1\frac{1}{4}\%$ de la población de Estados Unidos. Escriba este porcentaje como decimal.

Solución Para cambiar un porcentaje a un decimal, quitamos el símbolo de porcentaje y dividimos entre 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la izquierda. Sin embargo, en este caso no hay punto decimal que se pueda mover en $1\frac{1}{4}\%$. Como $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, y como el equivalente decimal de $\frac{1}{4}$ es 0.25, podemos escribir $1\frac{1}{4}\%$ en una forma equivalente como 1.25%.

$1\frac{1}{4}\% = 1.25\%$ Escriba $1\frac{1}{4}$ como 1.25.

$= 0.01\,25$ Quite el símbolo % y divida entre 100 moviendo el punto decimal 2 lugares a la izquierda.

$= 0.0125$

Respuesta 0.1575

Autoevaluación 6
Escriba $15\frac{3}{4}\%$ como decimal.

Cambio de un decimal a un porcentaje

Para cambiar un porcentaje a un decimal, quitamos el símbolo % y movemos el punto decimal 2 cifras a la izquierda. Para escribir un decimal como porcentaje hacemos lo opuesto: movemos el punto dos cifras a la derecha e insertamos el símbolo %.

Cambio de un decimal a un porcentaje

Para cambiar un decimal a un porcentaje, multiplicamos el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 lugares a la derecha y luego insertamos el símbolo %.

EJEMPLO 7 **Geografía.** Las zonas de tierra firme representan 0.291 de la superficie de la Tierra. Escriba esta cifra decimal como porcentaje.

Solución

$0.291 = 0\,29.1\%$ Multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la derecha y luego inserte un símbolo %.

$= 29.1\%$

Respuesta 53.43%

Autoevaluación 7
Escriba 0.5343 como un porcentaje.

Cambio de una fracción a un porcentaje

Para cambiar una fracción a un porcentaje se aplica un proceso de dos pasos. Primero, se escribe la fracción como decimal. Luego se cambia ese decimal a un porcentaje.

Fracción ⟶ decimal ⟶ porcentaje

Cambio de una fracción a un porcentaje

Para cambiar una fracción a un porcentaje:

1. Escriba la fracción como decimal dividiendo su numerador entre su denominador.
2. Multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la derecha.
3. Inserte un símbolo %.

Autoevaluación 8

Escriba $\frac{7}{8}$ como porcentaje.

Respuesta 87.5%

EJEMPLO 8 **Televisión.** El programa de televisión que presentó una mayor cantidad de audiencia de todos los tiempos fue un episodio especial de "M*A*S*H" que se transmitió el 28 de febrero de 1983. Las encuestas indicaron que 3 de cada 5 hogares norteamericanos vieron este programa. Exprese la audiencia como porcentaje.

Solución Tres de cada cinco se puede expresar como $\frac{3}{5}$. Se tiene que cambiar esta fracción por un decimal.

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5\overline{)3.0} \\ \underline{3\,0} \\ 0 \end{array}$$

Se escribe 3 como 3.0 y luego se divide el numerador entre el denominador.

$\frac{3}{5} = 0.6$ El resultado es un decimal finito.

$0.6 = 0\,60.\,\%$ Escribimos un cero a la derecha de 6. Multiplicamos el decimal por 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la derecha y luego insertamos un símbolo %.

$= 60\%$

En consecuencia 60% de los hogares norteamericanos vieron el episodio especial de "M*A*S*H".

En el ejemplo 8 el resultado de la división fue un decimal finito. Algunas veces cuando pasamos de una fracción a un decimal el resultado de la división es un decimal que se repite.

EJEMPLO 9 Escriba $\frac{5}{6}$ como porcentaje.

Solución El primer paso es cambiar $\frac{5}{6}$ a un decimal.

$$\begin{array}{r} 0.8333 \\ 6\overline{)5.0000} \\ \underline{4\,8} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array}$$

Escriba 5 como 5.0000. Divida el numerador entre el denominador.

$\frac{5}{6} = 0.8333\ldots$ El resultado es un decimal que se repite.

$= 0\,83.33\ldots\%$ Cambie 0.8333. . . a un porcentaje. Multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la derecha, y luego inserte el símbolo %.

$= 83.33\ldots\%$ 83.333. . . es un decimal que se repite.

Ahora tenemos que decidir si se quiere una aproximación o una respuesta exacta. Para una aproximación podemos redondear 83.333…% a una cifra específica. Para una respuesta exacta tenemos que representar la parte que se repite del decimal usando una fracción equivalente.

Aproximación		**Número exacto**	
$\frac{5}{6} = 83.33\ldots\%$		$\frac{5}{6} = 83.3333\ldots\%$	
$\approx 83.3\%$	Redondee al décimo más cercano.	$= 83\frac{1}{3}\%$	Use la fracción $\frac{1}{3}$ para representar .333. . . .
$\frac{5}{6} \approx 83.3\%$		$\frac{5}{6} = 83\frac{1}{3}\%$	

Algunos porcentajes se presentan con tanta frecuencia que resulta útil memorizar sus equivalentes fraccionarios y decimales.

Porcentaje	Decimal	Fracción	Porcentaje	Decimal	Fracción
1%	0.01	$\frac{1}{100}$	$33\frac{1}{3}\%$	0.3333. . .	$\frac{1}{3}$
10%	0.1	$\frac{1}{10}$	50%	0.5	$\frac{1}{2}$
20%	0.2	$\frac{1}{5}$	$66\frac{2}{3}\%$	0.6666. . .	$\frac{2}{3}$
25%	0.25	$\frac{1}{4}$	75%	0.75	$\frac{3}{4}$

Sección 5.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

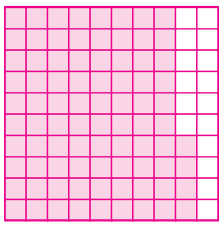
1. _____ significa partes por ciento.
2. Cuando cambiamos una fracción a un decimal, el resultado es un _____ o un decimal que se repite.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

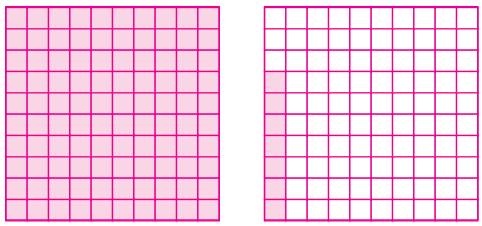
3. Para escribir un porcentaje como fracción, quite el símbolo % y escriba el número dado sobre _____. Luego _____ la fracción en caso de que sea posible.
4. Para cambiar un porcentaje a un decimal, quite el símbolo % y divida entre 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la _____.
5. Para cambiar un decimal a porcentaje, multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la _____, y luego inserte un símbolo %.
6. Para escribir una fracción como porcentaje primero escriba la fracción como un _____. Luego multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la _____, e inserte un símbolo %.

NOTACIÓN

7. **a.** Vea la ilustración de la siguiente página. Exprese la parte de la figura que está sombreada como un decimal, un porcentaje y una fracción.
   b. ¿Qué porcentaje de la figura no está sombreada?



8. En la ilustración cada conjunto de 100 cuadrados representa 100%. ¿Qué porcentaje está sombreado?



PRÁCTICA

Cambie cada porcentaje a una fracción. Simplifique cuando sea necesario.

9. 17%
10. 31%
11. 5%
12. 4%
13. 60%
14. 40%
15. 125%
16. 210%
17. $\frac{2}{3}\%$
18. $\frac{1}{5}\%$
19. $5\frac{1}{4}\%$
20. $6\frac{3}{4}\%$
21. 0.6%
22. 0.5%
23. 1.9%
24. 2.3%

Cambie cada porcentaje a un decimal.

25. 19%
26. 83%
27. 6%
28. 2%
29. 40.8%
30. 34.2%
31. 250%
32. 600%
33. 0.79%
34. 0.01%
35. $\frac{1}{4}\%$
36. $8\frac{1}{5}\%$

Cambie cada decimal a un porcentaje.

37. 0.93
38. 0.44
39. 0.612
40. 0.727
41. 0.0314
42. 0.0021
43. 8.43
44. 7.03
45. 50
46. 3
47. 9.1
48. 8.7

Cambie cada fracción a un porcentaje.

49. $\frac{17}{100}$
50. $\frac{29}{100}$
51. $\frac{4}{25}$
52. $\frac{47}{50}$
53. $\frac{2}{5}$
54. $\frac{21}{50}$
55. $\frac{21}{20}$
56. $\frac{33}{20}$
57. $\frac{5}{8}$
58. $\frac{3}{8}$
59. $\frac{3}{16}$
60. $\frac{1}{32}$

Encuentre el equivalente porcentual exacto para cada fracción.

61. $\frac{2}{3}$
62. $\frac{1}{6}$
63. $\frac{1}{12}$
64. $\frac{4}{3}$

Exprese cada una de las fracciones dadas como un porcentaje. Redondee al centésimo más cercano de un porcentaje.

65. $\frac{1}{9}$
66. $\frac{2}{3}$
67. $\frac{5}{9}$
68. $\frac{7}{3}$

APLICACIONES

69. EL CONSEJO DE SEGURIDAD DE LA ONU Las Naciones Unidas tienen 191 miembros. Estados Unidos, Rusia, el Reino Unido, Francia y China, junto con otras diez naciones forman el Consejo de Seguridad.

a. ¿Qué fracción de los miembros de las Naciones Unidas pertenece al Consejo de Seguridad?

b. Escriba su respuesta a la parte a en forma porcentual. Redondee a la unidad porcentual más cercana.

70. PRONÓSTICOS ECONÓMICOS Un indicador económico de la economía nacional es el número de pedidos colocados por los fabricantes. En un mes determinado, el número de órdenes se elevó un cuarto de 1 por ciento.

a. Escriba esto usando un símbolo %.

b. Expréselo como una fracción.

c. Expréselo como un decimal.

71. TECLAS DE PIANO De las 88 teclas de un piano, 36 son negras.

a. ¿Qué fracción de las teclas son negras?

b. ¿Qué porcentaje de las teclas son negras? (Redondee a la unidad porcentual más cercana.)

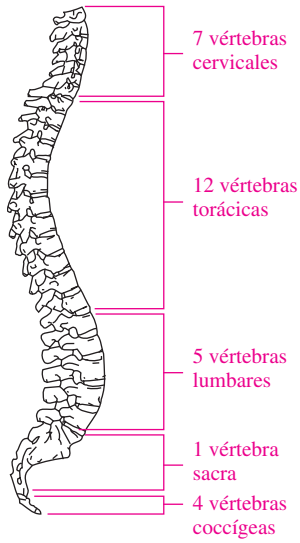
72. TASAS DE INTERÉS Escriba como un decimal la tasa de interés asociada con cada una de estas cuentas.

a. Préstamo para casa: 7.75%

b. Cuenta de ahorros: 5%

c. Tarjeta de crédito: 14.25%

73. LA ESPINA DORSAL HUMANA La espina dorsal humana está formada por un grupo de huesos (vértebras) como se muestra en la figura.



a. ¿Qué fracción de las vértebras pertenecen a la región lumbar?

b. ¿Qué porcentaje de las vértebras son lumbares? (Redondee al 1 por ciento más próximo)

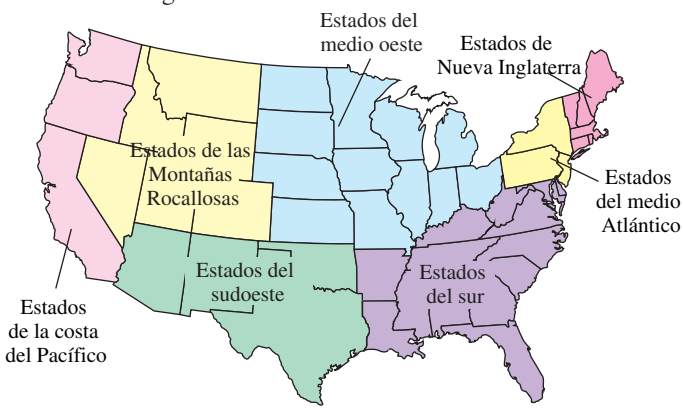
c. ¿Qué porcentaje de las vértebras con verticales? (Redondee el 1 por ciento más próximo)

74. REGIONES DEL PAÍS La parte continental de Estados Unidos se divide en siete regiones como se muestra.

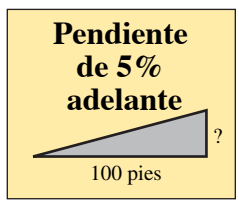
a. ¿Qué porcentaje de los 50 estados está en la región de las Montañas Rocallosas?

b. ¿Qué porcentaje de los 50 estados está en la región del medio oeste?

c. ¿Qué porcentaje de los 50 estados no se localiza en ninguna de las siete regiones que se muestran en la figura?


Estados del medio oeste
Estados de Nueva Inglaterra
Estados de las Montañas Rocallosas
Estados del medio Atlántico
Estados del sudoeste
Estados del sur
Estados de la costa del Pacífico

75. PENDIENTES PRONUNCIADAS Algunas veces se usan letreros para prevenir a los camioneros cuando se aproximan a una pendiente pronunciada en la autopista. Para una pendiente de 5% ¿cuántos pies sube el camino al recorrer 100 metros?



76. LOGOTIPOS DE COMPAÑÍAS En la ilustración ¿qué parte del logotipo de la compañía está sombreado de rojo? Exprese su respuesta como un porcentaje, una fracción y un decimal. No redondee.

Recycling Industries Inc.

77. JABÓN El jabón Marfil se promociona como un producto $99\frac{44}{100}\%$ puro. Escriba este porcentaje como decimal.

78. MANEJAR ALCOHOLIZADO En la mayoría de los estados de la unión americana es ilegal manejar con una concentración de alcohol en la sangre superior o igual a 0.08%. Cambie este porcentaje a una fracción. No simplifique. Explique qué representan el numerador y el denominador de la fracción.

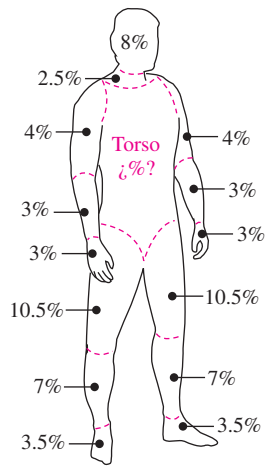
79. BALONCESTO En las estadísticas se observa que Chicago ha ganado 60 de 67, o $\frac{60}{67}$, de sus juegos. ¿De qué forma se presenta el porcentaje de juegos ganados en el periódico? Expréselo como porcentaje.

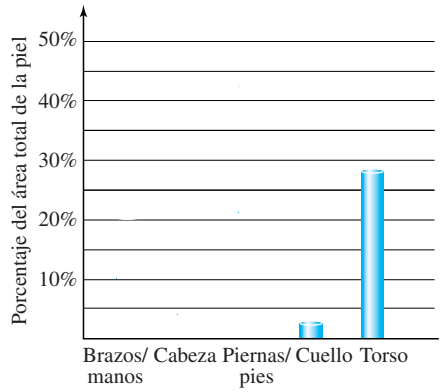
Conferencia Este			
Equipo	G	P	Porcentaje
Chicago	60	7	.896

80. RÉCORD DE GANADOS-PERDIDOS En los deportes, cuando un equipo tiene igual cantidad de juegos ganados y perdidos, se dice que juega "bola 500". Examine las estadísticas y explique el significado del número 500 usando los conceptos estudiados en esta sección.

Conferencia Este			
Equipo	G	P	Porcentaje
Orlando	33	33	.500

81. PIEL HUMANA La ilustración muestra el porcentaje aproximado que representa cada sección del cuerpo respecto al área total. Determine el porcentaje faltante y complete la gráfica de barras en la siguiente página.

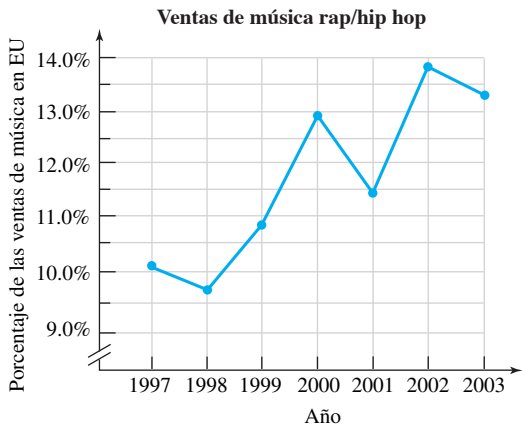




82. MÚSICA RAP La tabla muestra qué porcentaje del total de las ventas de música RAP grabada en los EU de los años 1997-2003, los cuales corresponden al rap/hip hop. Construya una gráfica de líneas en la ilustración usando los datos dados.

1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
10.1%	9.7%	10.8%	12.9%	11.4%	13.8%	13.3%

Fuente: *Asociación de la Industria de la Grabación de América*



83. LA CRUZ ROJA Un folleto de la Cruz Roja americana afirmaba que "En los tres años fiscales pasados, un promedio de 92 centavos de cada dólar gastados por la Cruz Roja se destinaron a programas y servicios de ayuda a los necesitados". ¿Qué porcentaje del dinero gastado por la Cruz Roja se otorgó a los programas y servicios?

84. IMPUESTOS El hipódromo de Santa Anita en Arcadia, California tiene que pagar un impuesto de un tercio de 1% de lo apostado en el hipódromo. Escriba el porcentaje como fracción.

Una calculadora sería de utilidad para resolver estos problemas.

85. CUMPLEAÑOS Si el día de su cumpleaños representa $\frac{1}{365}$ de un año, ¿qué porcentaje del año es? Redondee al centésimo más cercano.

86. POBLACIÓN Como fracción, un residente de Estados Unidos representa aproximadamente $\frac{1}{295\,000\,000}$ de la población de los EU. Exprese lo anterior como porcentaje. Redondee a una cifra distinta de cero.

POR ESCRITO

87. Si tuviera que redactar un anuncio ¿qué forma piensa que atraería más clientes?: "25% de descuento" o "$\frac{1}{4}$ de descuento". Explique su razonamiento.

88. Muchos entrenadores le piden a sus jugadores que den 110% durante las prácticas y los juegos. ¿Qué significado tiene esta expresión? ¿Es posible?

89. Explique cómo cambiar una fracción a un porcentaje.

90. Expliqué cómo es que un parque de diversiones puede tener una asistencia igual a 103% de su capacidad.

91. BOXEO Muhammad Ali ganó 92% de sus peleas profesionales. ¿Significa eso que tuvo exactamente 100 peleas y ganó 92? Explique su respuesta.

92. CALCULADORAS Para cambiar la fracción $\frac{15}{16}$ a un porcentaje, un estudiante usó una calculadora para dividir 15 entre 16. La indicación de la pantalla se muestra abajo:

¿Qué teclas debe oprimir el estudiante para cambiar este decimal a porcentaje?

REPASO

93. Reste: $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$.

94. Sume: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.

95. Evalúe: $3 - |4 - 8|$.

96. Encuentre el perímetro de un rectángulo que mide 6.5 cm de ancho y 10.5 cm de largo.

97. Encuentre el área del rectángulo del ejercicio 96.

98. Reste: $41 - 10.287$.

5.2 Resolución de problemas con porcentajes

• Ecuaciones • Problemas con porcentajes • Determinación de la cantidad
• Cálculo del porcentaje • Determinación de la base • Gráficas circulares

Los problemas con porcentajes ocurren en tres formas. En esta sección estudiamos un método que se puede usar para resolver los tres tipos. Este método tiene que ver con la resolución de ecuaciones sencillas.

Ecuaciones

Una **ecuación** es una afirmación que establece que dos cantidades son iguales. He aquí algunos ejemplos de ecuaciones:

$$4 + 4 = 8, \qquad \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \qquad \text{y} \qquad 38 = p \cdot 40$$

Nótese que cada ecuación contiene un símbolo $=$. Las siguientes afirmaciones no son ecuaciones porque no contienen un símbolo $=$.

$$3 \cdot 5, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \qquad \text{y} \qquad 2p + 2l$$

En esta sección se *resolverán* ecuaciones sencillas dividiendo ambos lados de la ecuación entre el mismo número. En el capítulo 8 se analizará cómo resolver ecuaciones con mayor detalle.

Problemas con porcentajes

Los artículos en la portada del periódico de la figura 53 sugieren tres tipos de problemas con porcentajes.

Tipo 1: En el artículo laboral, si queremos saber cuántos miembros de un sindicato votaron por aceptar la nueva oferta, tendríamos que preguntar:

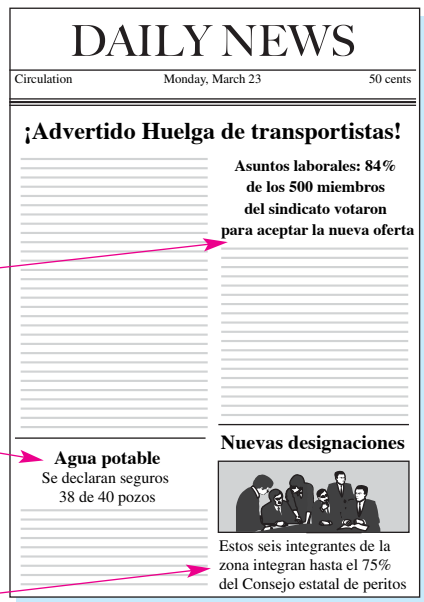
¿Qué número es 84% de 500?

Tipo 2: En el artículo sobre agua potable, si queremos saber qué porcentaje de los pozos son seguros, tendríamos que preguntar:

¿Qué porcentaje es 38 de 40?

Tipo 3: En el artículo sobre nuevos seleccionados, si queremos saber cuántos peritos hay en el Consejo Estatal, tendríamos que preguntar:

¿6 es el 75% de qué número?


DAILY NEWS

Circulation Monday, March 23 50 cents

¡Advertido Huelga de transportistas!

Asuntos laborales: 84% de los 500 miembros del sindicato votaron para aceptar la nueva oferta

Agua potable
Se declaran seguros 38 de 40 pozos

Nuevas designaciones

Estos seis integrantes de la zona integran hasta el 75% del Consejo estatal de peritos

FIGURA 5.3

Estos problemas de porcentajes tienen varios aspectos en común:

- Cada problema tiene la palabra *es.* Aquí *es* se puede traducir como un símbolo $=$.
- Cada problema contiene una frase similar a: *qué número es*, o *qué porcentaje es.* En otras palabras, hay una cantidad desconocida.
- Cada problema contiene la palabra *de.* En este contexto, *de* significa multiplicar.

Estas observaciones sugieren que cada uno de los problemas de porcentajes se puede traducir en una ecuación. La ecuación, llamada **ecuación porcentual,** contiene una cantidad desconocida y está involucrada la operación de multiplicación.

Determinación de la cantidad

Para resolver el primer tipo de problema *(¿Qué número es 84% de 500?),* multiplicamos.

$$\begin{aligned} 84\% \text{ de } 500 &= 84\% \cdot 500 && \text{La palabra } \textit{de} \text{ significa multiplicar.} \\ &= 0.84 \cdot 500 && \text{Para hacer la multiplicación cambie 84\% por el decimal 0.84.} \\ &= 420 \end{aligned}$$

Encontramos que 420 es 84% de 500.

En la afirmación "420 es 84% de 500" al número 420 se designa **cantidad**, 84% es el **porcentaje** y 500 es la **base**. Dicho con palabras, la relación entre la cantidad, el porcentaje y la base es: la cantidad es el *porcentaje de la base.* Esta relación se muestra en la **fórmula del porcentaje**.

Fórmula del porcentaje

Cantidad = porcentaje · base

Autoevaluación 1

¿Qué número es 240% de 80?

EJEMPLO 1

¿Qué número es 160% de 15.8?

Solución En este ejemplo el porcentaje es 160% y la base es 15.8, el número que sigue a la palabra *de.* Podemos hacer que A represente la cantidad y usar la fórmula del porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
A	=	160%	·	15.8	Sustituya el porcentaje por 160% y la base por 15.8.

La afirmación $A = 160\% \cdot 15.8$ es una ecuación donde la cantidad se desconoce (la incógnita). Para esta ecuación podemos encontrar la cantidad desconocida multiplicando. Al proceso de encontrar la incógnita se conoce como *resolver la ecuación*.

$$\begin{aligned} A &= 1.6 \cdot 15.8 && \text{Cambie 160\% a decimal.} \\ &= 25.28 && \text{Realice la multiplicación.} \end{aligned}$$

Respuesta 192

Por tanto, 25.28 es 160% de 15.8.

Cálculo del porcentaje

En el segundo tipo de problema *(¿Qué porcentaje es 38 de 40?),* tenemos que encontrar el porcentaje. En este problema 38 es la cantidad y 40 es la base. Otra vez formamos una ecuación usando la fórmula del porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
38	=	p	·	40	38 es la cantidad, p es el porcentaje y 40 es la base.

$$\begin{aligned} 38 &= p \cdot 40 && \text{Ésta es la ecuación a resolver.} \\ \frac{38}{\mathbf{40}} &= \frac{p \cdot 40}{\mathbf{40}} && \text{Para deshacer la multiplicación de } p \text{ por 40 dividimos ambos lados entre 40.} \\ 0.95 &= p && \tfrac{38}{40} = 0.95 \text{ y } \tfrac{40}{40} = 1. \\ p &= 95\% && \text{Para cambiar un decimal a un porcentaje mueva el punto decimal 2 cifras a la derecha e inserte un símbolo \%.} \end{aligned}$$

En consecuencia, 38 es 95% de 40%.

EJEMPLO 2 ¿Qué porcentaje es 14 de 32?

Solución En este ejemplo, 14 es la cantidad y 32 es la base. Otra vez usamos la fórmula del porcentaje y hagamos que p represente el porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
14	=	p	·	32	Sustituya la cantidad por 14 y la base por 32.

La afirmación $14 = p \cdot 32$ es una ecuación, donde el porcentaje es la incógnita. Al realizar la división se puede encontrar el porcentaje desconocido para esta ecuación.

$14 = p \cdot 32$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{14}{\mathbf{32}} = \frac{p \cdot 32}{\mathbf{32}}$ Para deshacer la multiplicación de p por 32 se dividen ambos lados entre 32.

$0.4375 = p$ Se realizan las divisiones: $\frac{14}{32} = 0.4375$ y $\frac{32}{32} = 1$.

$p = 43.75\%$ Para cambiar el decimal a porcentaje mueva el punto decimal dos cifras a la derecha e inserte un símbolo %.

Por tanto, 14 es 43.75% de 32.

Autoevaluación 2
¿Qué porcentaje es 9 de 16?

Respuesta 56.25%

Bolsas de aire

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Se estima que una bolsa de aire puede aumentar $500 USD el costo de un auto. ¿Qué porcentaje del precio de un auto de $16 295 representa el costo de la bolsa de aire?

En este problema, 500 es la cantidad y 16 295 es la base. Podemos formar una ecuación usando la fórmula del porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
500	=	p	·	16 295	Sustituya la cantidad por 500 y la base por 16 295. Luego se hace que p represente el porcentaje.

Luego se resuelve la ecuación.

$500 = p \cdot 16\,295$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{500}{\mathbf{16\,295}} = \frac{p \cdot 16\,295}{\mathbf{16\,295}}$ Para deshacer la multiplicación de p por 16 295 se dividen ambos lados entre 16 295.

$\frac{500}{16\,295} = p$ $\frac{16\,295}{16\,295} = 1$.

Para efectuar la división con la ayuda de la calculadora se teclean los números y las teclas de división e igual.

500 ÷ 16295 =

Esta pantalla da la respuesta en forma decimal. Para cambiarla a un porcentaje se multiplica el resultado por 100 y se coloca el símbolo %. Esto mueve el punto decimal dos cifras a la derecha. Si se redondea al décimo más cercano de un por ciento, el costo de la bolsa de aire es de aproximadamente 3.1% del precio de venta.

Determinación de la base

En el tercer tipo de problema (¿6 es el 75% de qué número?), tenemos que encontrar la base. De nuevo, sustituimos en la fórmula del porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
6	=	75%	·	b	6 es la cantidad y 75% es el porcentaje. Hagamos que b represente a la base.

La afirmación $6 = 75\% \cdot b$ es una ecuación donde la base es la incógnita. Para encontrar la base en esta ecuación se realiza la división.

$6 = 0.75 \cdot b$ Cambie 75% a 0.75. Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{6}{\mathbf{0.75}} = \frac{0.75 \cdot b}{\mathbf{0.75}}$ Para deshacer la multiplicación de b por 0.75 se dividen los dos lados entre 0.75.

$8 = b$ Se realizan las divisiones $\frac{6}{0.75} = 8$ y $\frac{0.75}{0.75} = 1$.

Por tanto, 6 es 75% de 8.

EJEMPLO 3 **Arrendamiento.** En un complejo de departamentos, 110 de las unidades están actualmente arrendadas. Si esto representa una tasa de ocupación del 88%, ¿cuántas unidades hay en el complejo?

Solución Una tasa de ocupación del 88% significa que 88% de las unidades están rentadas. En este problema el porcentaje es 88% y la cantidad es 110. Tenemos que encontrar la base que es el número total de unidades. Formamos una ecuación usando la fórmula del porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
110	=	88%	·	b	Hagamos que b represente la base.

Podemos entonces resolver la ecuación para encontrar la base.

$110 = 0.88 \cdot b$ Cambie 88% a 0.88. Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{110}{\mathbf{0.88}} = \frac{0.88 \cdot b}{\mathbf{0.88}}$ Para deshacer la multiplicación de b por 0.88 divida ambos lados por 0.88.

$125 = b$ Efectúe las divisiones $\frac{110}{0.88} = 125$ y $\frac{0.88}{0.88} = 1$.

El complejo tiene 125 unidades.

En el siguiente ejemplo los cálculos son más fáciles si cambiamos el porcentaje a una fracción en lugar de un decimal.

Autoevaluación 4
150 es ¿$66\frac{2}{3}$% de qué número?

EJEMPLO 4 ¿31.5 es $33\frac{1}{3}$% de qué número?

Solución En este ejemplo 31.5 es la cantidad y $33\frac{1}{3}$ el porcentaje. Para encontrar la base formamos una ecuación usando la fórmula del porcentaje.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
31.5	=	$33\frac{1}{3}$%	·	b	Sustituya la cantidad por 31.5 y el porcentaje por $33\frac{1}{3}$%.

La afirmación $31.5 = 33\frac{1}{3}\% \cdot b$ es una ecuación donde la base b es la incógnita. En esta ecuación, podemos encontrar la cantidad desconocida si realizamos una división.

$31.5 = 33\frac{1}{3}\% \cdot b$ Esta es la ecuación a resolver.

$31.5 = \frac{1}{3} \cdot b$ Reemplace $33\frac{1}{3}\%$ con su equivalente fraccionario: $33\frac{1}{3}\% = \frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{1}{3}$.

$31.5 \div \mathbf{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot b \div \mathbf{\frac{1}{3}}$ Para deshacer la multiplicación b por $\frac{1}{3}$, divida ambos lados por $\frac{1}{3}$.

$31.5 \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{3}{1}$ Para dividir por $\frac{1}{3}$, multiplique por $\frac{3}{1}$.

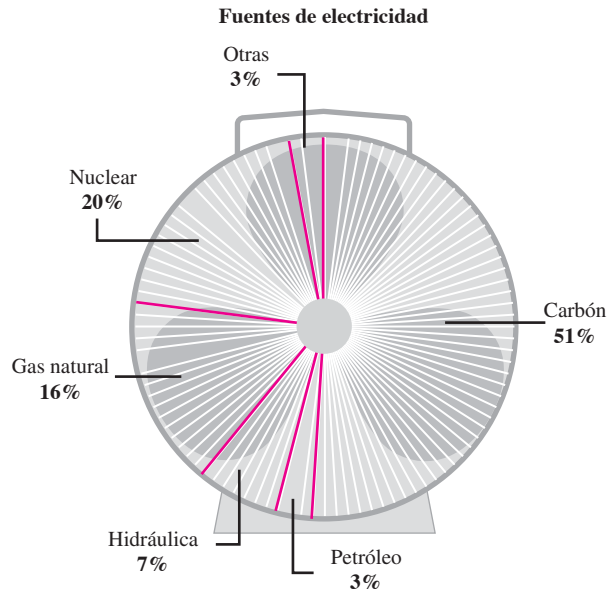
$94.5 = b$ Haga las multiplicaciones: $31.5 \cdot 3 = 94.5$ y $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$.

En consecuencia, 31.5 es $33\frac{1}{3}\%$ de 94.5. Respuesta 225

Gráficas circulares

Los porcentajes y las **gráficas circulares,** o **gráficas pastel,** se utilizan como medios para presentar los datos para fines de comparación. En la figura 5.4 el círculo completo representa la cantidad total de electricidad generada en Estados Unidos durante 2003. Los pedazos con forma de rebanada de pastel muestran los tamaños relativos de las fuentes de energía que se usan para generar la electricidad. Por ejemplo, se observa que la mayor cantidad de electricidad (51%) se generó a partir del carbón. Nótese que si se suman los porcentajes de todas las categorías (51% + 3% + 7% + 16% + 20% + 3%) el resultado es 100%.

Las 100 marcas con separación uniforme que están alrededor del círculo sirven como ayuda visual cuando se construye una gráfica circular. Por ejemplo, para representar la hidráulica como 7% se dibuja una línea desde el centro del círculo hasta una marca. Después contamos 7 marcas y trazamos una segunda línea desde el centro del círculo para completar la rebanada de forma de pastel.

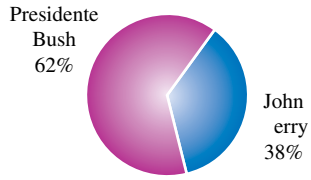


Fuente: Administración de información de energía

FIGURA 5.4

EJEMPLO 5 **Elecciones presidenciales.** En la figura 5.5 se muestran los resultados de la elección presidencial de 2004. Use la información para encontrar el número de estados en los que ganó George W. Bush.

Solución La gráfica circular muestra que George W. Bush ganó en 62% de los 50 estados. Aquí, el porcentaje es 62% y la base es 50. Se usa la fórmula del porcentaje y se resuelve para la cantidad.



Elección presidencial de 2004
Estados ganados por cada candidato

FIGURA 5.5

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
A	=	62%	·	50	Sustituya el porcentaje por 62% y la base por 50.

$A = 0.62 \cdot 50$ Cambie 62% a un decimal 62% = 0.62. Esta es la ecuación a resolver.

$A = 31$ Efectúe la multiplicación.

George W. Bush ganó 31 estados en la elección presidencial de 2004.

PARA PENSAR A DETALLE — Estudiantes de colegios comunitarios

"Los colegios comunitarios son centros de oportunidades educativas. Hace más de 100 años, esta singular invención estadounidense desarrolló la educación superior financiada estatalmente en instalaciones cercanas a los hogares, e inició una práctica de dar la bienvenida a todos los que quisieran estudiar sin importar su nivel socioeconómico, patrimonio o experiencia académica previa. En la actualidad, los colegios comunitarios continúan el proceso de hacer disponible la educación superior a un número máximo de personas en 1166 colegios públicos e independientes." Asociación Estadounidense de Colegios Comunitarios (AACC).

Más de 33 500 estudiantes respondieron a la Encuesta de Compromiso Estudiantil de Colegios Comunitarios 2002. Abajo se muestran algunos resultados. Estudie cada gráfica circular y después complete su leyenda.

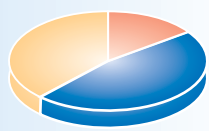
Matrícula en colegios comunitarios

- 64% están inscritos en tiempo parcial
- ?

¿Cuánto leen los estudiantes de colegios comunitarios?

- 31% de los estudiantes de tiempo completo leen cuatro o menos de los libros de texto, manuales o libros asignados durante el ciclo escolar actual.
- ?

Estudiantes de colegios comunitarios que discutieron ideas con instructores fuera de clase



- 15% a menudo o muy a menudo
- 47% nunca
- ?

Sección 5.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

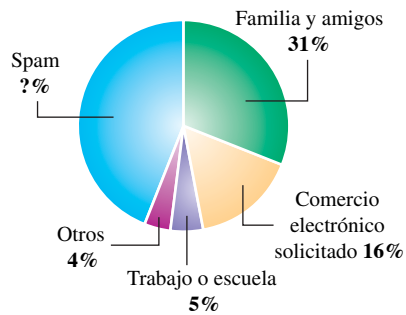
1. En una _____, circular se usan rebanadas de forma de pastel para mostrar la división del total de una cantidad en las partes que la componen.
2. En la afirmación "45 es 90% de 50", 45 es _____, 90% es _____, y 50 es _____.

NOTACIÓN *Use la fórmula del porcentaje para escribir cada oración como una ecuación.* **No resuelva la ecuación.**

3. ¿Qué número es 10% de 50?
4. ¿16 es 55% de qué número?
5. ¿Qué porcentaje de 47 es 48?
6. ¿Qué porcentaje de 20 es 12?

CONCEPTOS

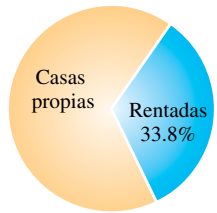
7. Cuando se calculan porcentajes debemos cambiar el porcentaje a un decimal o una fracción. Cambie cada porcentaje a un decimal.
   a. 12% **b.** 5.6%
   c. 125% **d.** $\frac{1}{4}\%$
8. Cuando se calculan porcentajes debemos cambiar el porcentaje a un decimal o una fracción. Cambie cada porcentaje a una fracción.
   a. $33\frac{1}{3}\%$ **b.** $66\frac{2}{3}\%$
   c. $16\frac{2}{3}\%$ **d.** $83\frac{1}{3}\%$
9. Sin hacer los cálculos, indique si 120% de 55 es mayor que 55, o menor que 55.
10. Sin hacer los cálculos, diga si 12% de 55 es mayor que 55, o menor que 55.
11. CORREO ELECTRÓNICO La gráfica circular muestra los tipos de correos electrónicos que recibe un usuario típico de internet. Se le llama *spam* al correo "chatarra" que se envía a un número grande de usuarios para promover productos o servicios. ¿Qué porcentaje de los mensajes de correo electrónico es spam?



Fuente: *USA Today*, 31 de octubre de 2003.

12. VIVIENDA En el último trimestre de 2000 estaban ocupadas aproximadamente 105.5 millones de viviendas en Estados Unidos. Use los datos en la gráfica circular para determinar qué porcentaje eran casas propias.

Inventario de vivienda 2000



Fuente: *Oficina del Censo de EU*

13. ¿Cuánto es 100% de 25?
14. ¿Qué porcentaje de 32 es 32?
15. ¿Cuánto es 200% de 25?
16. ¿Cuánto es 300% de 25?

PRÁCTICA *Solucione cada problema resolviendo una ecuación con porcentaje.*

17. ¿Qué número es 36% de 250?
18. ¿Qué número es 82% de 300?
19. ¿Qué porcentaje es 16 de 20?
20. ¿Qué porcentaje es 13 de 25?
21. ¿7.8 es 12% de qué número?
22. ¿39.6 es 44% de qué número?
23. ¿Qué número es 0.8% de 12?
24. ¿Qué número es 5.6% de 40?
25. ¿Qué porcentaje de 40 es 0.5?
26. ¿Qué porcentaje de 15 es 0.3?
27. ¿3.3 es 7.5% de qué número?
28. ¿8.4 es 20% de qué número?

Escriba si cada problema es de tipo 1, tipo 2 o tipo 3 y resuélvalo. Por ejemplo, el ejercicio 29 se puede escribir como "¿qué número es $7\frac{1}{4}\%$ de 60?"

29. Encuentre $7\frac{1}{4}\%$ de 600.
30. Encuentre $1\frac{3}{4}\%$ de 800.
31. El 102% de 105 es ¿qué número?
32. El 210% de 66 es ¿qué número?

33. ¿$33\frac{1}{3}\%$ de qué número es 33?

34. ¿$66\frac{2}{3}\%$ de qué número es 28?

35. ¿$9\frac{1}{2}\%$ de qué número es 5.7?

36. ¿$\frac{1}{2}\%$ de qué número es 5000?

37. ¿Qué porcentaje de 8000 es 2500?

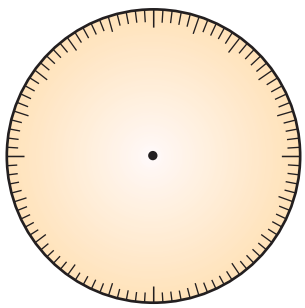
38. ¿Qué porcentaje de 3200 es 1400?

Use una gráfica circular para ilustrar los datos dados. Se da un círculo dividido en 100 secciones para ayudar en el proceso de graficación.

39. ENERGÍA Complete la ilustración para mostrar qué porcentaje de la energía total generada en EUA provino de cada una de las fuentes en 2003.

Renovable	12%
Nuclear	11%
Carbón	31%
Gas natural	29%
Petróleo	17%

Fuente: *Administración de Información sobre Energía*

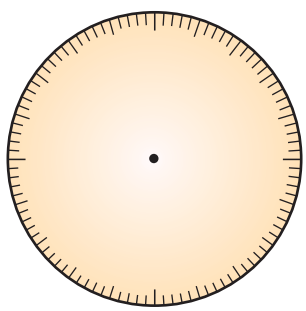


Fuente: Administración de Información sobre Energía

40. EFECTO INVERNADERO Complete la ilustración para mostrar qué porcentaje de las emisiones totales (generadas por las actividades humanas en 2002) en EU provino de cada tipo de gas invernadero.

Dióxido de carbono	83%
Óxido nitroso	6%
Metano	9%
PFCs, HFCs	2%

Fuente: *Almanaque Mundial 2005*

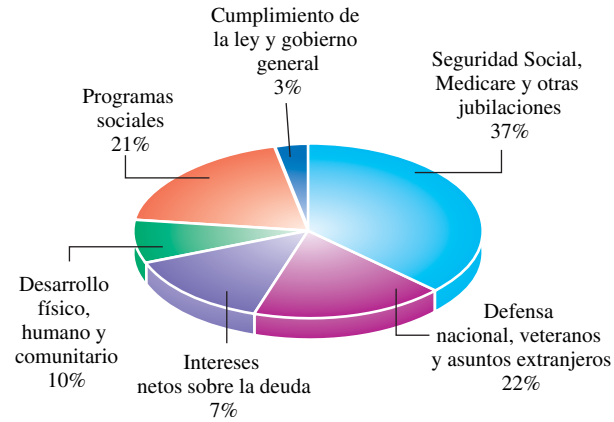


APLICACIONES

41. CUIDADO INFANTIL Después del primer día de inscripción, en una guardería se han registrado 84 niños. Eso representa 70% de los lugares disponibles. ¿Cuál era el número máximo de niños que podía recibir la guardería?

42. PROGRAMACIÓN DE CARRERAS Un mes antes de una carrera de stock-car, era lenta la venta de anuncios para el programa oficial. Sólo se habían vendido 12 anuncios, o 60%, de las páginas disponibles. ¿Cuál era el número total de páginas dedicadas a anuncios en el programa?

43. GASTOS GUBERNAMENTALES La ilustración muestra la caída del gasto federal para el año fiscal 2003 en EU. Si el gasto total fue de aproximadamente $1800 miles de millones, ¿cuántos dólares se gastaron en Seguridad Social, Medicare y otros programas de retiro?


Cumplimiento de la ley y gobierno general 3%
Seguridad Social, Medicare y otras jubilaciones 37%
Programas sociales 21%
Desarrollo físico, humano y comunitario 10%
Intereses netos sobre la deuda 7%
Defensa nacional, veteranos y asuntos extranjeros 22%

Fuente: Formato federal 1040 para impuestos sobre ingresos 2004

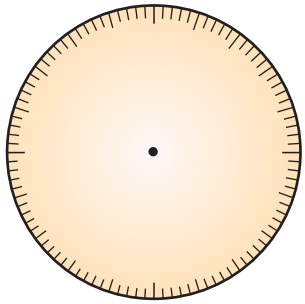
44. INGRESOS GUBERNAMENTALES Complete la tabla calculando qué porcentaje del ingreso federal total vino de cada fuente en 2003. Redondee al por ciento más cercano. Después complete la grafica circular en la siguiente página.

Ingreso total, año fiscal 2003: $2200 miles de millones

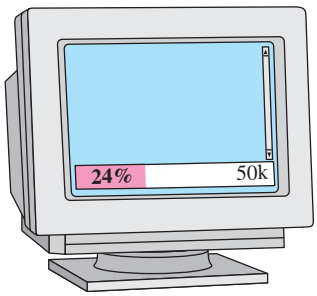
Fuente del ingreso	Cantidad	Porcentaje del total
Seguridad social, Medicare, impuestos de desempleo	$726 miles de millones	
Impuestos de ingresos personales	$814 miles de millones	
Impuestos de ingresos corporativos	$132 miles de millones	
Impuestos sobre consumos específicos, bienes raíces y aduanas	$154 miles de millones	
Deuda para cubrir déficit	$374 miles de millones	

Fuente: Formato de impuestos federales de ingresos 1999

Fuentes de ingreso federal 2003



45. LA INTERNET Vea la ilustración. El mensaje en el fondo de la pantalla indica que 24% de 50K bytes de la información que ha decidido ver el usuario se han descargado a su computadora. ¿Cuántos bytes adicionales de información faltan por descargar? (50K significa 50 000).



46. REEMBOLSOS Una compañía de larga distancia ofreció a sus clientes un reembolso de 20% del costo de todas las llamadas hechas en el mes de julio. En la tabla se enlistan las llamadas de un cliente. ¿Qué cantidad le será reembolsada al cliente?

Fecha	Hora	Destino de la llamada	Minutos	Cantidad
Jul 4	3:48 P.M.	Denver	47	$3.80
Jul 9	12:00 P.M.	Detroit	68	$7.50
Jul 20	8:59 A.M.	San Diego	70	$9.45

47. PROMOCIÓN DE PRODUCTOS Para promover las ventas, a cada botella de shampoo grande se le anexa gratuitamente otra botella de 6 onzas. Use la información en el paquete para averiguar cuántas onzas contiene la botella grande.

48. INFORMACIÓN NUTRIMENTAL Abajo se muestra la etiqueta de nutrición en un paquete de frituras de maíz.

a. ¿Cuántos miligramos de sodio hay en una porción de frituras?

b. De acuerdo a la etiqueta, ¿qué porcentaje del valor diario del sodio es esto?

c. ¿Qué valor diario de ingesta de sodio se considera saludable?

INFORMACIÓN NUTRIMENTAL
Tamaño de la porción: 1 onza (28 g /alrededor de 29 piezas)
Raciones por paquete: alrededor de 11

Cantidad por ración
Calorías 160 Calorías de grasas 90

	% del valor diario
Grasas totales 10g	**15%**
Grasas saturadas 1.5 g	**7%**
Colesterol 0mg	**0%**
Sodio 240mg	**12%**
Carbohidratos totales 15g	**5%**
Fibra dietética 1g	**4%**
Azúcares: menos de 1g	
Proteínas 2g	

49. LICENCIAS DE CONDUCIR Un hombre contestó 28 de 40 preguntas correctamente en la parte escrita del examen de manejo. Si con 70% se aprueba el examen, ¿pasó el examen?

50. ALFABETO ¿Qué porcentaje del alfabeto inglés son las vocales a, e, i, o y u? (Redondee al 1 por ciento más cercano.)

51. MEZCLAS Complete la tabla para encontrar el número de galones de ácido sulfúrico en cada uno de los dos tanques de almacenamiento.

	Galones de solución en el tanque	% de ácido sulfúrico	Galones de ácido sulfúrico en el tanque
Tanque 1	60	50%	
Tanque 2	40	30%	

52. GARANTÍAS Para asegurar a sus clientes precios bajos el Club del Hogar ofrece una garantía de "10% adicional". Si el cliente encuentra el mismo artículo en venta por menos en cualquier lugar, recibe la diferencia en el precio más 10% de la diferencia. Una mujer compró unas mini persianas en el Club del Hogar por $120 pero después vio las mismas persianas a la venta en $98 en otra tienda. ¿Cuánto puede esperar que se le reembolse?

53. FOTOCOPIAS La tecla de zoom en el tablero de control de una fotocopiadora la programa para hacer una copia agrandada o reducida del documento original. Si el zoom se fija en 180% y el documento original contiene letras que son de 1.5 pulgadas de alto, ¿cuál será la altura de las letras en la copia?

54. FOTOCOPIAS El ajuste del zoom para una copiadora se introduce como un decimal: 0.98. Expréselo como porcentaje y encuentre el tamaño de letras resultante en la copia si en el original las letras tienen 2 pulgadas de alto.

55. SEGUROS El costo de reparación de un automóvil después de una colisión fue de $4000. La póliza de seguro del automóvil pagó el total de la cuenta excepto un deducible de $200 que fue pagado por el conductor. ¿Qué porcentaje del costo pagó él?

56. ESPACIOS HABITACIONALES Una casa tiene 1200 pies cuadrados en el primer piso y 800 pies cuadrados en el segundo piso. ¿Qué porcentaje del área de la casa está en el primer piso?

57. MAYORÍAS En las elecciones del Concejo de la Ciudad de Los Ángeles si ningún candidato recibe más de 50% de la votación, se hace una segunda vuelta entre el primero y el segundo lugar. A partir de los resultados de la elección en la tabla determine si debe haber una segunda vuelta en el Distrito 10.

Concejo de la Ciudad	Distrito 10
Nate Holden	8501
Madison T. Shockley	3614
Scott Suh	2630
Marsha Brown	2432

58. PUERTOS En 2002, el puerto con mayor movimiento en Estados Unidos fue el puerto de South Louisiana que movió 216 396 497 toneladas de mercancías. De esa cantidad 124 908 067 fueron mercancías domésticas y 91 488 430 fueron extranjeras. ¿Qué porcentaje del total fue doméstico? Redondee al décimo más cercano.

POR ESCRITO

59. Explique la relación en un problema de porcentajes entre la cantidad, el porcentaje y la base.

60. Escriba una situación de la vida real que se pueda describir con "9 es ¿qué porcentaje de 20?"

61. Explique por qué 150% de un número es mayor que el número.

62. Explique por qué "9% de 100" es un problema fácil de resolver.

REPASO

63. Sume: $2.78 + 6 + 9.09 + 0.3$.

64. Evalúe: $\sqrt{64} + 3\sqrt{9}$.

65. ¿Qué está más cerca de 5 sobre la recta numérica: el número 4.9 o el número 5.001?

66. Multiplique: $34.5464 \cdot 1000$.

67. Encuentre: $(0.2)^3$.

68. Evalúe la fórmula $d = 4t$ para $t = 25$.

5.3 Aplicaciones de los porcentajes

• Impuestos • Comisiones • Porcentaje de aumento o disminución • Descuentos

En esta sección analizaremos las aplicaciones de los porcentajes. Tres de ellos (impuestos, comisiones y descuentos) se relacionan directamente con las compras. Usted será un mejor consumidor si tiene un entendimiento sólido de estos conceptos. El cuarto usa el porcentaje para describir aumentos o disminuciones de cosas tales como el desempleo y las ventas de tiendas de abarrotes.

Impuestos

El recibo de ventas de la figura 5.6 de la página siguiente da una cuenta detallada de los artículos que se compraron, cuántos de cada uno se compraron y el precio de cada artículo.

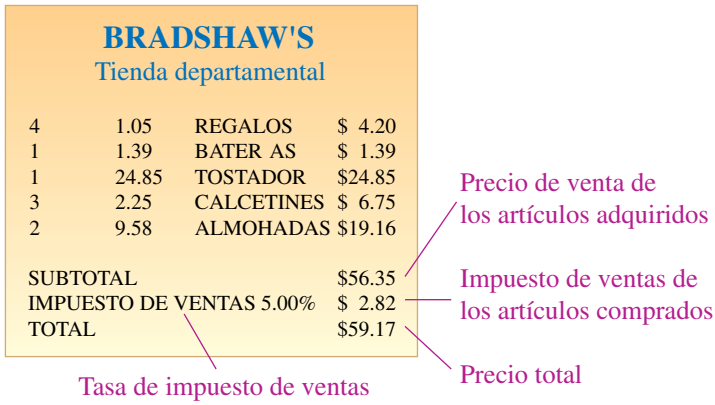

BRADSHAW'S
Tienda departamental
4 1.05 REGALOS $ 4.20
1 1.39 BATER AS $ 1.39
1 24.85 TOSTADOR $24.85
3 2.25 CALCETINES $ 6.75
2 9.58 ALMOHADAS $19.16
SUBTOTAL $56.35
IMPUESTO DE VENTAS 5.00% $ 2.82
TOTAL $59.17
Precio de venta de los artículos adquiridos
Impuesto de ventas de los artículos comprados
Precio total
Tasa de impuesto de ventas

FIGURA 5.6

El recibo muestra que el precio de venta $56.35 (*etiquetado subtotal*) se tasó a 5%. Se sumó después el impuesto de venta de $2.82 al subtotal para obtener el precio total de $59.17.

Para encontrar el precio total de venta

Precio total = precio de compra + impuesto de venta

En el ejemplo 1 verificamos que la cantidad del impuesto de venta mostrado en el recibo de la figura 5.6 sea el correcto.

EJEMPLO 1 **Impuesto de venta.** Encuentre el impuesto de venta de una compra de $56.35 si la tasa de impuesto de venta es 5%.

Solución Primero usamos la fórmula del porcentaje para escribir una ecuación. El porcentaje es 5% y la base es 56.35. Tenemos que encontrar la cantidad del impuesto.

Cantidad	=	porcentaje	·	base	
A	=	5%	·	56.35	Sustituya porcentaje por 5% y la base por 56.35.

$A = 0.05 \cdot 56.35$ Cambie 5% a decimal: 5% = 0.05.

$A = 2.8175$ Realice la multiplicación.

Redondeando al centavo más cercano (centésimos) encontramos que el impuesto de ventas es $2.82. El recibo de venta de la figura 5.6 es correcto.

Autoevaluación 1
¿Cuánto sería el impuesto de venta si se hace una compra de $56.35 en un estado que tiene una tasa de impuesto de venta estatal de 6.25%?

Respuesta $3.52

Además del impuesto de ventas pagamos muchos otros impuestos en nuestras vidas cotidianas. Impuestos de ingresos, impuesto a la gasolina e impuestos de la seguridad social son sólo unos pocos.

EJEMPLO 2 **Impuesto retenido.** Una camarera encontró que se le habían deducido $11.04 de sus ingresos brutos semanales de $240 por impuesto de ingresos federal. ¿Qué tasa de impuesto retenido se usó?

Solución Primero, usamos la fórmula del porcentaje para escribir una ecuación. La cantidad es 11.04 y la base es 240. Tenemos que encontrar la tasa de impuesto.

Autoevaluación 2
Se pagó un impuesto de $5250 por una herencia de $15 000. ¿Cuál fue la tasa de impuesto por herencia?

Cantidad	=	porcentaje	·	base
11.04	=	p	·	240

$11.04 = p \cdot 240$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{11.04}{240} = \frac{p \cdot 240}{240}$ Para deshacer la multiplicación por 240 divida ambos lados entre 240.

$0.046 = p$ Haga las divisiones.

$4.6\% = p$ Cambie 0.046 a un porcentaje.

Respuesta 35%

La tasa de impuesto retenido fue de 4.6%.

Comisiones

A muchos vendedores se les paga por **comisión** en lugar de trabajar por un salario o recibir una paga por hora. Ganan una cantidad basada en los bienes o servicios que venden.

Autoevaluación 3
Un vendedor de seguros recibe una comisión de 4.1% por cada $120 de prima pagada por un cliente. ¿De cuánto es la comisión por esta prima?

EJEMPLO 3 **Ventas de electrodomésticos.** La tasa de comisión para un vendedor en una tienda de electrodomésticos es 16.5%. Encuentre su comisión por la venta de un refrigerador que cuesta $499.95.

Solución Se usa la fórmula del porcentaje para escribir una ecuación. El porcentaje es 16.5% y la base es $499.95. Tenemos que encontrar la cantidad de la comisión.

Cantidad	=	porcentaje	·	base
A	=	16.5%	·	499.95

$A = 0.165 \cdot 499.95$ Cambie 16.5% a decimal: 16.5% = 0.165.

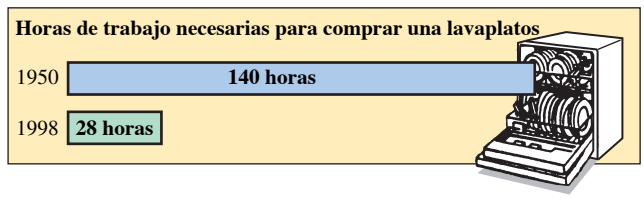
$A = 82.49175$ Use una calculadora para hacer la multiplicación.

Respuesta $4.92

Redondeando al centavo más cercano (centésimo) encontramos que la comisión es $82.49.

Porcentaje de aumento o disminución

Los porcentajes se pueden usar para describir cómo ha cambiado una cantidad. Por ejemplo, considere la figura 5.7 que compara el número de horas de trabajo que le tomaba al trabajador promedio de EU poder comprar una lavaplatos en 1950 y en 1998.



Fuente: Banco de la Reserva Federal de Dallas.

FIGURA 5.7

De la figura se ve que el número de horas que un trabajador estadunidense tiene que trabajar para comprar una lavaplatos ha disminuido con los años. Para describir esta disminución usando un porcentaje primero restamos para encontrar la cantidad en que disminuye.

$140 - 28 = 112$ Reste las horas de trabajo necesarias en 1998 de las horas de trabajo necesarias en 1950.

Después encontramos el porcentaje que representa esta diferencia del número original de horas necesarias en 1950.

Cantidad	=	porcentaje	·	base
112	=	p	·	140

$112 = p \cdot 140$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{112}{\mathbf{140}} = \frac{p \cdot 140}{\mathbf{140}}$ Para deshacer la multiplicación por 140 divida ambos lados entre 140.

$0.8 = p$ Haga las divisiones.

$80\% = p$ Cambie a 0.8 a un porcentaje.

De 1950 a 1998 ha habido una disminución de 80% en el número de horas que le tomaba al trabajador promedio de EU ganar lo suficiente para comprar una lavaplatos.

Para encontrar el porcentaje de aumento o disminución

Para encontrar el porcentaje de aumento o disminución:

1. Reste el número menor del mayor para encontrar la cantidad del aumento o disminución.
2. Encuentre qué porcentaje es la diferencia de la cantidad original.

EJEMPLO 4 **JFK.** Una subasta en 1996 incluyó una mecedora de roble que utilizó el presidente John F. Kennedy en la Oficina Oval. La silla, originalmente valuada en $5000, se vendió en $453 500. Encuentre el porcentaje de aumento en el valor de la mecedora.

Solución Primero encuentre la cantidad del aumento.

$453\,500 - 5000 = 448\,500$ Reste el valor original del precio pagado en la subasta.

La mecedora aumentó su valor en $448 500. Después hallamos qué porcentaje del valor original representa el aumento. Aquí la cantidad es 448 500 y la base es 5000.

Cantidad	=	porcentaje	·	base
448 500	=	p	·	5000

$448\,500 = p \cdot 5000$ Esta es la ecuación a resolver

$\frac{448\,500}{\mathbf{5000}} = \frac{p \cdot 5000}{\mathbf{5000}}$ Para deshacer la multiplicación por 5000 divida ambos lados entre 5000.

$89.7 = p$ Realice las divisiones.

$8970\% = p$ Cambie 89.7 a un porcentaje.

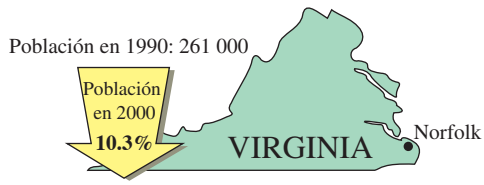
La mecedora de Kennedy aumentó su valor en un asombroso 8970%.

Autoevaluación 4
En un distrito escolar el número de niños internos aumentó de 15 a 150 en 4 años. Encuentre el porcentaje de aumento.

Respuesta 900%

EJEMPLO 5 **Disminución de la población.** Norfolk, Virginia, experimentó una disminución en población en el periodo de diez años de 1990 a 2000. Use la información en la figura 5.8 de la siguiente página para determinar la población en Norfolk en 2000.

Solución En 1990 la población era 261 000. Se nos dice que el número disminuyó y necesitamos saber cuánto. Para saberlo resolvemos la siguiente fórmula con porcentaje.



Fuente: Virginia QuickFacts

FIGURA 5.8

Cantidad	=	porcentaje	·	base
A	=	10.3%	·	261 000

$A = 0.103 \cdot 261\,000$ Cambie 10.3% a un decimal: 10.3% = 0.103.

$A = 26\,883$ Realice la multiplicación.

De 1990 a 2000 la población disminuyó en 26 883. Para encontrar la población en 2000 restamos la disminución de la población de 1990.

$$261\,000 - 26\,883 = 234\,117$$

En 2000 la población de Norfolk, Virginia era 234 117.

Se puede resolver este problema de otra manera. Si la población de Norfolk disminuyó 10.3%, entonces la población en 2000 era 100% − 10.3% = 89.7% de la población en 1990. Usando este enfoque podemos encontrar la población en 2000 directamente resolviendo la fórmula con porcentaje siguiente:

Cantidad	=	porcentaje	·	base
A	=	89.7%	·	261 000

$A = 0.897 \cdot 261\,000$ Cambie 89.7% a un decimal: 89.7% = 0.897.

$A = 234\,117$ Haga la multiplicación.

Como antes, vemos que la población en Norfolk en 2000 era 234 117.

PARA PENSAR A DETALLE — Estudio de las matemáticas

"Todos los estudiantes, sin importar sus características personales, antecedentes o desafíos físicos, deben tener oportunidades para estudiar —y apoyo para aprender— matemáticas." Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

La tabla de abajo muestra el número de estudiantes inscritos en clases de matemáticas básicas en universidades de dos años.

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Matrícula	57 000	100 000	146 000	142 000	147 000	134 000	122 000

Fuente: Encuesta 2000 del CBMS de programas de estudiantes universitarios.

1. ¿En qué periodo de 5 años hubo el mayor aumento porcentual en la matrícula en las clases de matemáticas básicas? ¿Cuál fue el porcentaje de aumento?
2. ¿Sobre qué periodo de 5 años hubo la mayor disminución porcentual en la matrícula en las clases de matemáticas básicas? ¿Cuál fue el porcentaje de disminución?

Descuentos

A la diferencia de precio entre el precio original y el precio de venta de un artículo se le llama **descuento.** Si el descuento se expresa como porcentaje del precio de venta se le llama **tasa de descuento.** Usaremos la información en el anuncio mostrado en la figura 5.9 para discutir cómo hallar un descuento y cómo encontrar la tasa de descuento.

FIGURA 5.9

EJEMPLO 6 **Ventas de zapatos.** Encuentre la cantidad del descuento en el par de zapatos tenis para baloncesto para hombre que se muestran en la figura 5.9. Después encuentre el precio de venta.

Solución Para encontrar el descuento encontramos el 25% del precio normal, $59.80. Aquí el porcentaje es 25% y la base 59.80.

Cantidad	=	porcentaje	·	base
A	=	25%	·	59.80

$A = 0.25 \cdot 59.80$ Cambie 25% a decimal: 25% = 0.25.

$A = 14.95$ Haga la multiplicación.

El descuento es $14.95. Para encontrar el precio de venta restamos la cantidad del descuento del precio normal.

$59.80 - 14.95 = 44.85$

El precio de venta para los zapatos de baloncesto para hombre es $44.85.

Autoevaluación 6
Unos lentes oscuros que se venden normalmente en $15.40 tienen 15% de descuento. Determine el precio de venta.

Respuesta $13.09

En el ejemplo 6 usamos la siguiente fórmula para el precio de venta.

Cómo hallar el precio de venta

Precio de venta = precio original − descuento

EJEMPLO 7 **Descuentos.** ¿Cuál es la tasa de descuento de los zapatos aeróbicos para dama anunciados en la figura 5.9?

Solución Podemos pensar este problema como uno de porcentaje de disminución. Primero calculamos la cantidad del descuento. Esta disminución en el precio se encuentra restando.

$39.99 - 21.99 = 18$

A los zapatos se les descuentan $18. Ahora encontramos qué porcentaje del precio original es el descuento. Aquí la cantidad es 18 y la base es 39.99.

Cantidad	=	porcentaje	·	base
18	=	p	·	39.99

Autoevaluación 7
Un restaurante ofrece una cena con prime rib de $10.99 por sólo $7.95 si se ordena antes de las 6 P.M. Encuentre la tasa de descuento. Redondee a la unidad porcentual más cercana.

$$18 = p \cdot 39.99$$ Esta es la ecuación a resolver.

$$\frac{18}{39.99} = \frac{p \cdot 39.99}{39.99}$$ Para deshacer la multiplicación por 39.99 divida ambos lados entre 39.99.

$$0.450113 \approx p$$ Haga la división.

$$45.0113\% \approx p$$ Cambie 0.450113 a un porcentaje.

Respuesta 28%

Redondeado a la unidad porcentual la tasa de descuento es 45%.

Sección 5.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. A algunos vendedores se les paga por _____. Se basa en un porcentaje de la cantidad total en dólares de bienes o servicios que vendan.
2. Cuando usamos un porcentaje para describir cómo aumenta una cantidad comparada con su valor original estamos hallando el porcentaje de _____.
3. A la diferencia entre el precio original y el precio de venta de un artículo se le llama _____.
4. La _____ de impuesto de ventas se expresa como un porcentaje.

CONCEPTOS

5. Llene los espacios: Para encontrar el porcentaje de disminución, _____ el número menor del número mayor para encontrar la cantidad de la disminución. Luego encuentre qué porcentaje de la cantidad _____ es la diferencia.
6. PERIÓDICOS La tabla de abajo muestra cómo cambió la circulación de dos diarios de 1997 a 2003.

CIRCULACIÓN		
	Miami Herald	USA Today
1997	356 803	1 629 665
2003	315 850	2 154 539

Fuente: *Almanaque Mundial 2005*

   a. ¿Cuál fue la *cantidad de la disminución* de la circulación del *Miami Herald*?
   b. ¿Cuál fue la *cantidad del aumento* de la circulación del *USA Today*?

APLICACIONES *Resuelva cada problema. Si una respuesta no es exacta redondee a la unidad porcentual más cercana.*

7. IMPUESTO DE VENTAS La tasa de impuesto de ventas de Utah es 4.75%. Encuentre el impuesto de venta de un comedor que se vende en $900.
8. IMPUESTO DE VENTAS Encuentre el impuesto de venta de un par de pantalones que cuestan $40 si se compran en Missouri que tiene una tasa de impuesto de venta de 4.225%.
9. IMPUESTO DE HABITACIÓN Después de registrar la salida de un hotel, un hombre notó que la cuenta de hotel incluía un cargo adicional etiquetado como impuesto de habitación. Si el precio de la habitación era de $129 más $10.32 de impuesto de habitación encuentre la tasa del impuesto de habitación.
10. IMPUESTO SOBRE CONSUMOS ESPECÍFICOS Una mujer notó un cargo adicional de $1.24 etiquetado como *impuesto sobre consumos específicos* mientras examinaba su cuenta telefónica mensual. Si los cargos del servicio básico para ese periodo fueron $42, ¿cuál es la tasa del impuesto sobre consumos específicos?
11. RECIBOS DE VENTA Complete el recibo de venta de abajo encontrando el subtotal, el impuesto de venta y el total.

CENTRO DE JARDINERÍA
Su proveedor universal de jardinería

3	2.99	Mezcla para plantar	$ 8.97
1	9.87	Cubierta de suelo	$ 9.87
2	14.25	Arbustos	$28.50
SUBTOTAL			$
IMPUESTO DE VENTA		6.00%	$
TOTAL			$

12. RECIBOS DE VENTAS Complete el recibo de ventas que se muestra a continuación, calcule los precios, el subtotal, el impuesto de venta y el total.

MUEBLES McCOY

1	450.00	SOFÁ	$
2	90.00	MESAS BAJAS	$
1	350.00	LOVE SEAT	$
SUBTOTAL			$
IMPUESTO DE VENTAS		4.20%	$
TOTAL			$

13. AUMENTOS EN LAS OBLIGACIONES FISCALES Algunos estados suben la tasa de impuesto de venta con el fin de tener mayores ingresos. ¿Cuánto dinero adicional se recaudaría en la venta de un automóvil de $15 000 si la tasa de impuesto de venta se sube 1%?

14. VIAJE AL EXTRANJERO El impuesto al valor agregado (IVA) es un impuesto al consumidor sobre bienes y servicios. Actualmente, se aplican sistemas de IVA en todo el mundo. (Estados Unidos es una de las pocas naciones industrializadas que no usan un sistema de impuesto al valor agregado.) Complete la tabla determinando el IVA que un viajero tendría que pagar en cada país por una cena que cueste $20.95.

País	Tasa de IVA	Impuesto por una cena de $20.95
Canadá	7%	
Alemania	16%	
Inglaterra	17.5%	
Suecia	25%	

15. NÓMINAS Use la información del talón de pago para encontrar la tasa de impuesto retenido, compensaciones al trabajador, Medicare y Seguro Social que se dedujeron de su pago bruto.

6286244

Fecha de emisión: 27 03 05

PAGO BRUTO	$360.00
IMPUESTOS	
IMPUESTO FEDERAL	$ 28.80
COMP. TRAB.	$ 4.32
MEDICARE	$ 5.22
SEGURO SOCIAL	$ 22.32
PAGO NETO	$299.34

16. IMPUESTO A LA GASOLINA En un estado el galón de gasolina sin plomo se vende a $1.89. Este precio incluye los impuestos federales y estatales que son aproximadamente $0.54 en total. Por tanto, el precio de un galón de gasolina antes de impuestos es alrededor de $1.35. ¿Cuál es la tasa del impuesto a la gasolina?

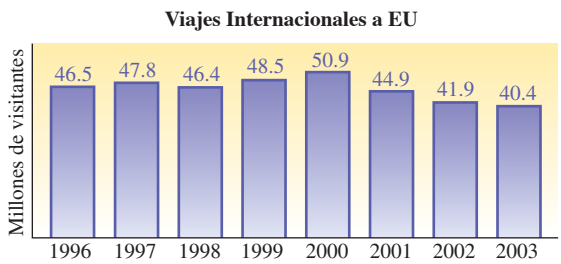
17. TIEMPO EXTRA La gerencia de una fábrica quiere reducir las horas de tiempo extra en 25%. Si el número total de horas de tiempo extra este mes es de 480, ¿cuál es el objetivo de horas de tiempo extra para el mes siguiente?

18. AUMENTO DEL COSTO DE LA VIDA Si una mujer que gana $32 000 anuales y recibe un aumento para compensar la inflación de 2.4%, ¿cuánto recibe? ¿Cuál es su nuevo salario?

19. CALORÍAS REDUCIDAS Una compañía anuncia que sus nuevas frituras mejoradas tienen 36% menos calorías por ración que las del estilo original. ¿Cuántas calorías hay en una ración de las nuevas frituras si la del estilo original tenía 150 calorías?

20. FUERZA POLICIACA Un departamento de policía planea aumentar su fuerza de 80 personas en 5%. ¿Cuántos oficiales nuevos serán contratados? ¿De qué tamaño será el nuevo departamento?

21. TURISMO La gráfica de abajo muestra el número de viajeros internacionales a Estados Unidos de 1996 a 2003. ¿Entre qué par de años ocurrió la mayor disminución de visitantes? ¿Cuál fue el porcentaje de disminución? Redondee a la unidad porcentual más cercana.



Fuente: *Almanaque Mundial 2005*

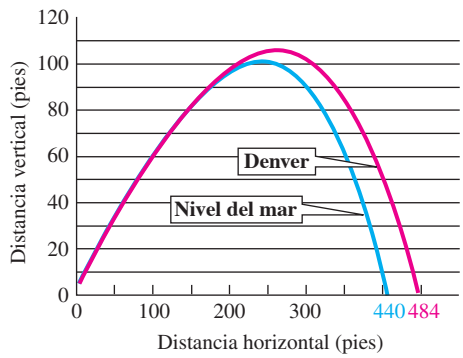
22. DAÑO A LAS COSECHAS Después de que una inundación dañó gran parte de la cosecha, el costo de una lechuga aumentó de $0.99 a $2.20. ¿Qué porcentaje de aumento significa?

23. SEGURO DE AUTOS Una estudiante pagó una prima de seguro de auto de $400 cada tres meses. Luego la prima bajó a $360 porque ella fue elegida para un descuento por ser buena estudiante. ¿Cuál fue el porcentaje de disminución de la prima?

24. PASES DE AUTOBÚS Para aumentar el número de pasajeros una compañía redujo el precio de un pase mensual de $112 a $98. ¿Cuál fue el porcentaje de la reducción?

25. ORILLAS LACUSTRES Debido a fuertes escurrimientos primaverales, la ribera de un lago aumentó de 5.8 millas a 7.6 millas. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento de la ribera?

26. BÉISBOL La ilustración muestra la trayectoria de una pelota que sale a 110 mph con un ángulo de lanzamiento de 35 grados a nivel del mar y en Coors Field, casa de los Rockies de Colorado. ¿Cuál es el porcentaje de aumento en la distancia que viaja la pelota en Coors Field?

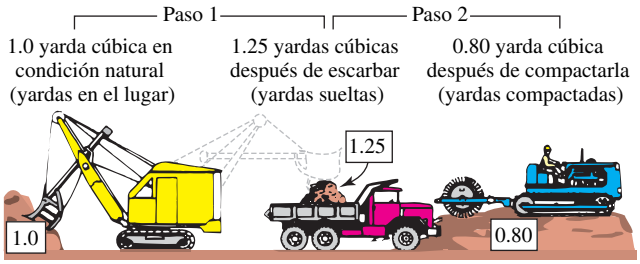


Fuente: *Los Angeles Times* (16 de septiembre de 1996)

27. MOVIMIENTO DE TIERRA La ilustración muestra el cambio de volumen típico durante un movimiento de tierra. (Una yarda cúbica de tierra es un cubo que tiene 1 yarda de largo, 1 yarda de ancho y 1 yarda de alto.)

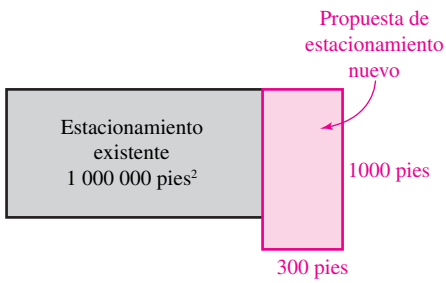
a. Encuentre el porcentaje de aumento en el volumen del suelo al pasar por el Paso 1 del proceso.

b. Encuentre el porcentaje de disminución del volumen del suelo al pasar por el Paso 2 del proceso.


Paso 1
Paso 2
1.0 yarda cúbica en condición natural (yardas en el lugar)
1.25 yardas cúbicas después de escarbar (yardas sueltas)
0.80 yarda cúbica después de compactarla (yardas compactadas)
1.25
1.0
0.80

Fuente: Departamento de Defensa de EU

28. ESTACIONAMIENTO La gerencia de una plaza comercial ha decidido aumentar el área de estacionamiento. Los planos se muestran abajo. ¿Cuál será el porcentaje de aumento del área de estacionamiento una vez completado el proyecto?



29. BIENES RAÍCES Después de vender una casa en $98 500, un agente de bienes raíces divide en dos la comisión de 6% con otro agente. ¿Cuánto recibe cada persona?

30. SUMINISTROS MÉDICOS A una vendedora de una compañía de suministros médicos se le paga una comisión de 9% por pedidos menores de $8 000. Por los pedidos que excedan de $8 000 recibe 2% adicional en comisión sobre la venta total. ¿Cuál es su comisión por una venta de $14 600?

31. AGENTES DEPORTIVOS Una agente deportivo le cobra a sus clientes una cuota por representarlos durante las negociaciones de un contrato. La cuota se basa en un porcentaje de la cantidad del contrato. Si la agente ganó $37 500 cuando su cliente firmó un contrato de fútbol profesional de $2 500 000, ¿qué porcentaje cobró por sus servicios?

32. GALERÍAS DE ARTE Una galería de arte exhibe pinturas de artistas y recibe una comisión del artista cuando se vende una pintura. ¿Cuál es el porcentaje de comisión si una galería recibe $135.30 cuando se vende una pintura por $820?

33. ESTACIONAMIENTO EN UN CONCIERTO Un promotor de conciertos recibe $33\frac{1}{3}\%$ de la recaudación que recibe el local por su concesión de estacionamiento, durante la noche de la función. ¿Cuánto puede ganar el promotor si se esperan 6000 automóviles y el costo por automóvil es $6?

34. DEMOSTRACIONES Una constructora de casas invitó a sus vecinos a una demostración de cocina para presentar artículos y utensilios de cocina. Como anfitriona de la fiesta recibió 12% de las ventas totales. ¿Cuánto se compró si recibió $41.76 por ser anfitriona de la fiesta?

35. VENTA DE RELOJES Encuentre el precio normal y la tasa de descuento para el reloj que se muestra en la figura.

36. VENTA DE EQUIPOS ESTEREOFÓNICOS Encuentre el precio normal y la tasa de descuento para el sistema estereofónico que se muestra en el anuncio.

37. VENTA DE ANILLOS ¿En cuánto se vende un anillo normalmente si tiene 20% de descuento y se vende en $149.99? (*Sugerencia*: el anillo se vende a 80% de su precio normal.)

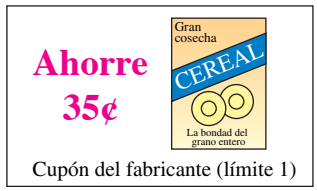
38. VENTA DE PERSIANAS ¿En cuánto se venden normalmente las persianas si tienen un descuento de 55% y se venden en $49.50? (*Sugerencia*: las persianas se venden a 45% de su precio normal.)

39. VENTA DE VIDEOCASETERAS ¿Cuál es el precio de venta y la tasa de descuento para una videocasetera que normalmente se vende por $399.97 y se le descuentan $50?

40. VENTA DE VIDEOCÁMARAS ¿Cuál es el precio de venta y la tasa de descuento para una videocámara que normalmente se vende en $559.97 y se le descuentan $80?

41. REEMBOLSOS Encuentre el descuento, la tasa de descuento y el precio reducido de una caja de aceite para motor si el comprador recibe el reembolso del fabricante mencionado en el anuncio.

42. CUPONES DOBLES Encuentre el descuento, la tasa de descuento y el precio reducido de una caja de cereal que normalmente se vende en $3.29 si un comprador presenta un cupón en la tienda que duplica el valor del cupón.



43. COMPRA POR TV Determine el precio de Home Shopping Network (HSN) para el anillo descrito en la ilustración si se vende con un descuento de 55% del precio de venta al público. Ignore los gastos de envío.

44. INFOMERCIALES El presentador de un informercial de TV dice que el precio sugerido de venta al público de una parrilla para asar es $249.95 y que ahora se ofrece "en 4 fáciles pagos de sólo $39.95". ¿Cuál es el descuento y cuál es la tasa de descuento?

POR ESCRITO

45. Mencione las ventajas y desventajas de trabajar por comisión.

46. Explique por qué se obtiene la respuesta correcta en el ejemplo 6 para el precio de venta hallando 75% del precio normal.

47. Explique la diferencia entre un impuesto y una tasa de impuesto.

48. Explique cómo encontrar el precio de venta de un artículo si conoce el precio de venta normal y la tasa de descuento.

REPASO

49. Multiplique: $-5(-5)(-2)$.

50. Divida: $\frac{3}{5} \div \frac{3}{10}$. 2

51. Evalúe: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

52. Multiplique: $0.45 \cdot 675$.

53. Divida: $0.2\overline{)34.68}$

54. Evalúe: $-4 - (-7)$.

55. Evalúe: $|-5 - 8|$.

56. Evalúe: $\sqrt{25} - \sqrt{16}$.

Estimación

Discutimos ahora algunos métodos de estimación que puede usar cuando trabaje con porcentajes. Para empezar, consideramos una forma para hallar rápidamente 10% de un número. Recuerde que para hallar 10% de un número se multiplica el número por 10% o 0.1. Cuando se multiplica un número por 0.1 simplemente movemos el punto decimal 1 cifra a la izquierda para encontrar el resultado.

EJEMPLO 1 **10% de un número.** Calcule el 10% de 234.

Solución Para encontrar 10% de 234 mueva el punto decimal 1 cifra a la izquierda.

$$234 = 23.4\,0$$

Por tanto, 10% de 234 es 23.4, o aproximadamente 23.

Para encontrar 15% de un número primero encuentre 10% del número. Luego encuentre la mitad de eso para obtener el otro 5%. Finalmente sume los dos resultados.

EJEMPLO 2 **Estimación de 15% de un número.** Estime 15% de 78.

Solución

10% de 78 es 7.8 o aproximadamente 8 ⟶ 8
Sume la mitad de 8 para obtener el otro 5%. ⟶ + 4
12

Por tanto, 15% de 78 es aproximadamente 12.

Para encontrar 20% de un número primero encuentre 10% de él y luego duplique el resultado. Se puede usar un procedimiento semejante cuando trabaje con cualquier múltiplo de 10%.

EJEMPLO 3 **Estimación de 20% de un número.** Estime 20% de 3234.15.

Solución 10% de 3234.15 es 323.415 o alrededor de 323. Para encontrar 20% duplíquelo.

Por tanto, 20% de 3234.15 es aproximadamente 646.

EJEMPLO 4 **1% de un número.** Encuentre 1% de 0.8.

Solución Para encontrar 1% de un número multiplíquelo por 0.01 porque 1% = 0.01. Cuando se multiplica un número por 0.01 simplemente mueva el punto decimal dos cifras a la izquierda para encontrar el resultado.

$0.8 = .00\,8$

$= 0.008$

Por tanto, 1% de 0.8 es 0.008.

EJEMPLO 5 **50% de un número.** Encuentre 50% de 2 800 000 000.

Solución Encontrar 50% de un número significa encontrar $\frac{1}{2}$ de ese número. Para encontrar la mitad de un número simplemente divídalo entre 2. Por tanto, 50% de 2 800 000 000 es 2 800 000 000 ÷ 2 = 1 400 000 000.

Para calcular 25% de un número, calcule primero el 50% del número, y luego divida el resultado entre 2.

EJEMPLO 6 **Estimación de 25% de un número.** Estime 25% de 16 813.

Solución 16 813 es alrededor de 16 800. La mitad de eso es 8400. En consecuencia, 50% de 16 813 es aproximadamente 8400.

Para estimar 25% de 16 813 dividimos 8400 entre 2. Por consiguiente, 25% de 16 813 es aproximadamente 4200.

100% de un número es el número mismo. Para encontrar 200% de un número duplique el número.

EJEMPLO 7 **Estimación de 200% de un número.** Estime 200% de 65.198.

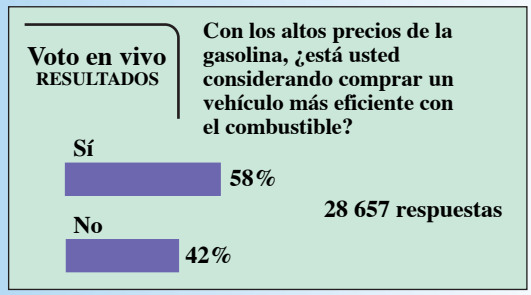
Solución 65.198 es alrededor de 65. Para encontrar 200% de 65 duplíquelo. Por tanto, 200% de 65.198 es aproximadamente 65 · 2 o 130.

EJERCICIOS DE ESTUDIO *Estime cada respuesta.*

1. CURSOS UNIVERSITARIOS 20% de los 815 estudiantes que asisten a una pequeña universidad se matricularon en una clase de ciencia. ¿Cuántos estudiantes son?
2. OFERTAS ESPECIALES En la tienda de abarrotes una botella de 65 onzas de un limpiador para ventanas estaba marcado como 25% gratis. ¿Cuántas onzas son gratis?
3. DESCUENTOS ¿Cuánto se descuenta del precio de una videograbadora si el precio normal de $196.88 se reduce 30%?
4. PROPINA La propina normal de un restaurante es 15% del costo de la comida. Encuentre la propina de una cena que cuesta $38.64.
5. DAÑO POR INCENDIO Una compañía de seguros pagó 50% de $107 809 que costó reconstruir una casa que fue destruida por el fuego. ¿Cuánto pagó la compañía de seguros?
6. INSPECCIONES DE SEGURIDAD De los 2 580 vehículos inspeccionados en un punto de revisión de seguridad 10% tenían violaciones al reglamento. ¿Cuántos automóviles tenían violaciones al reglamento?
7. LEVANTAMIENTO DE PESAS Un levantador de pesas de 158 libras puede levantar 200% de su peso corporal. ¿Cuántas libras puede levantar?
8. EXÁMENES En un examen de 120 preguntas falso/verdadero 5% de las respuestas de una estudiante estaban equivocadas. ¿En cuántas preguntas se equivocó?
9. ESTUDIOS DE TRÁFICO De acuerdo con un monitor electrónico de tráfico 20% de los 650 conductores que pasaron frente a él iban con exceso de velocidad. ¿Cuántos conductores iban con exceso de velocidad?
10. VENTA DE UNA CASA Una propietaria ha sido informada que recuperará 70% de su inversión de $5000 si pinta su casa antes de venderla. ¿Cuánto recuperaría de la inversión si pinta su casa?

Aproxime el porcentaje y luego estime cada respuesta.

11. AUSENCIAS La asistencia a un seminario fue sólo 31% de lo que los organizadores habían anticipado. Si se esperaban a 68 personas, ¿cuántas asistieron realmente al seminario?
12. LISTA DE HONOR De los 900 estudiantes de una escuela 16% estaban en la lista de honor del director. ¿Cuántos estudiantes estaban en la lista de honor?
13. ENCUESTAS EN INTERNET La ilustración muestra una pregunta de una encuesta en línea. ¿Cuántas personas votaron sí?



14. MEDICARE La tasa de impuesto de nómina de Medicare es 1.45%. ¿Cuánto impuesto de Medicare se descontará de un sueldo de $596?
15. VOTACIÓN El día de la elección 48% de los 6200 trabajadores en las encuestas eran voluntarios. ¿Cuántos voluntarios ayudaron en la elección?
16. PRESUPUESTOS A cada departamento de una universidad se le pidió reducir su presupuesto en 21%. ¿Cuánto dinero debería reducirse el presupuesto del departamento de matemáticas si actualmente es de $4515?

5.4 Interés

- Interés simple
- Interés compuesto

Cuando se pide dinero, el acreedor espera que se le pague la cantidad del préstamo más un cargo adicional por el uso del dinero. Al cargo adicional se le llama **interés.** Cuando el dinero se deposita en un banco al depositante se le paga por el uso del dinero. Al dinero que gana el depósito también se le llama interés. En general, el interés es dinero que se paga por el uso del dinero.

Interés simple

El interés se calcula de una de dos maneras: como **interés simple** o como **interés compuesto.** Empezamos discutiendo el interés simple. Primero necesitamos introducir algunos términos clave asociados con pedir o prestar dinero.

Capital: la cantidad de dinero que se ha invertido, depositado o prestado.

Tasa de interés: un porcentaje que se usa para calcular la cantidad de interés a pagar. Usualmente se expresa como una tasa anual.

Plazo: el periodo (usualmente en años) que el dinero es invertido, depositado o prestado.

La cantidad de interés a pagar depende del capital, de la tasa y del plazo. Esta es la razón por la cual usualmente se mencionan en los anuncios de las cuentas de banco, inversiones y préstamos. (Véase la figura 5.10.)

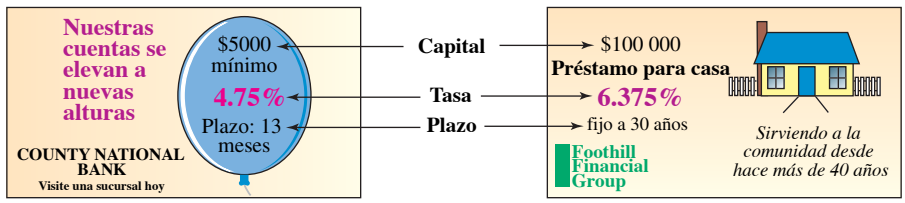


FIGURA 5.10

El interés simple es el interés ganado por el capital original. Se encuentra usando una fórmula.

Fórmula del interés simple

$$\text{Interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{plazo} \quad \text{o} \quad I = C \cdot t \cdot p$$

donde la tasa t se expresa como tasa anual y el plazo p se expresa en años. Esta fórmula se puede escribir sencillamente como $I = Ctp$.

Autoevaluación 1
Si se invierten $4200 por 2 años a una tasa de interés anual de 4%, ¿qué interés se gana?

EJEMPLO 1 Si se invierten $3000 por un año a una tasa de 5%, ¿cuánto interés se gana?

Solución Usamos la fórmula $I = Ctp$ para calcular el interés ganado. El capital es $3000, la tasa de interés es 5% (o 0.05) y el plazo es 1 año.

$C = 3000 \qquad t = 5\% = 0.05 \qquad p = 1$ año

$I = Ctp$ Esta es la fórmula del interés.

$I = 3000 \cdot 0.05 \cdot 1$ Sustituya los valores en C, t, y p.

$I = 150$ Haga la multiplicación.

El interés ganado en 1 año es $150.

La información dada en este problema y el resultado se pueden resumir en una tabla.

Capital	Tasa	Plazo	Interés ganado
$3000	5%	1 año	$150

Respuesta $336

Cuando usamos la fórmula $I = Ctp$, el tiempo tiene que expresarse en años, si el tiempo se da en días o meses lo reescribimos como la parte fraccionaria de un año. Por ejemplo, una inversión de 30 días dura $\frac{30}{365}$ de un año ya que hay 365 días en un año. Para un préstamo a 6 meses expresamos el tiempo como $\frac{6}{12}$ o $\frac{1}{2}$ de un año ya que hay 12 meses en un año.

EJEMPLO 2 Para iniciar un negocio una pareja pide $5500 para comprar equipo y suministros. Si el préstamo tiene una tasa de 14% de interés, ¿cuánto deben pagar al final de un periodo de 90 días?

Solución Primero, encontramos la cantidad de interés pagado por el préstamo. Debemos rescribir el periodo como parte fraccionaria de un año de 365 días.

$$C = 5500 \qquad t = 14\% = 0.14 \qquad p = \frac{90}{365}$$

$I = Ctp$ Esta es la fórmula del interés.

$I = \mathbf{5500} \cdot \mathbf{0.14} \cdot \frac{\mathbf{90}}{\mathbf{365}}$ Sustituya los valores de C, t y p.

$I = \frac{5500}{1} \cdot \frac{0.14}{1} \cdot \frac{90}{365}$ Escriba 5500 y 0.14 como fracciones.

$I = \frac{69\,300}{365}$ Use una calculadora para multiplicar los numeradores. Multiplique los denominadores.

$I \approx 189.86$ Use una calculadora para hacer la división. Redondee al centavo más cercano.

El interés sobre el préstamo es $189.86. Para encontrar cuánto deben pagar sumamos el capital y el interés.

$$5500 + 189.86 = 5689.86$$

La pareja debe pagar $5689.86 al cabo de 90 días.

Autoevaluación 2
¿Cuánto debe pagarse si se piden $3200 a una tasa de 15% por 120 días?

Respuesta $3357.81

Interés compuesto

La mayoría de las cuentas de ahorros pagan **interés compuesto** más que interés simple. El interés compuesto es interés pagado sobre interés acumulado. Para ilustrar este concepto, supongamos que se depositan $2000 en una cuenta de ahorros a una tasa de 5% por 1 año. Podemos usar la fórmula $I = Ctp$ para calcular el interés ganado al cabo de un año.

$I = Ctp$

$I = \mathbf{2000} \cdot \mathbf{0.05} \cdot \mathbf{1}$ Sustituya en C, t y p.

$I = 100$ Haga la multiplicación.

Se ganó un interés de $100. Al final del primer año, la cuenta contiene el interés ($100) más el capital inicial ($2000) para dar un saldo de $2100.

Suponga que el dinero permanece en la cuenta de ahorros por otro año a la misma tasa de interés. Para el segundo año, el interés se pagará sobre un capital de $2100.

Esto es, durante el segundo año ganamos interés sobre interés así como sobre el capital original de \$2000. Usando $I = Ctp$, podemos encontrar el interés ganado el segundo año.

$$I = Ctp$$
$$I = 2100 \cdot 0.05 \cdot 1 \quad \text{Sustituya en } C, t \text{ y } p.$$
$$I = 105 \quad \text{Haga la multiplicación.}$$

En el segundo año se ganan \$105 de interés. La cuenta ahora tiene ese interés más los \$2100 del capital para un total de \$2205.

Como se ve en la figura 5.11 calculamos el interés simple dos veces para encontrar el interés compuesto.

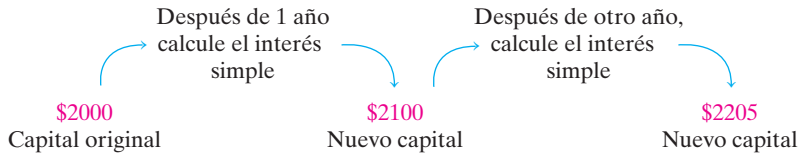


FIGURA 5.11

Si calculáramos el interés simple sobre \$2000 a 5% por 2 años, el interés ganado es $I = 2000 \cdot 0.05 \cdot 2 = 200$. Por tanto, el saldo de la cuenta sería \$2200. Comparando los saldos encontramos que la cuenta que paga interés compuesto tendrá \$5 más que la cuenta que gana interés simple.

En el ejemplo previo el interés se calculó al final de cada año o **anualmente**. Cuando se compone se puede calcular el interés en otros incrementos de tiempo tales como **semestralmente** (dos veces al año), **trimestralmente** (cuatro veces al año) o incluso **diariamente**.

EJEMPLO 3 **Interés compuesto.** Como regalo para su nieta recién nacida, una abuela abre una cuenta de ahorros con \$1000 a nombre de la bebé. La tasa de interés es 4.2% pagadero trimestralmente. Encuentre la cantidad de dinero que tendrá la niña en el banco para su primer cumpleaños.

Solución Si el interés se compone trimestralmente el interés se calculará cuatro veces en un año. Para encontrar el interés de \$1000 que se ganará en el primer trimestre del año usamos la fórmula del interés simple donde p es $\frac{1}{4}$ de año.

Interés ganado en el primer trimestre

$$C = 1000 \qquad t = 4.2\% = 0.042 \qquad p = \frac{1}{4}$$

$$I = 1000 \cdot 0.042 \cdot \frac{1}{4}$$
$$I = \$10.50$$

El interés ganado en el primer trimestre es \$10.50. Esto se vuelve parte del capital para el segundo trimestre.

$$\$1000 + \$10.50 = \$1010.50$$

Para encontrar la cantidad de interés que obtendrán \$1010.50 en el segundo trimestre del año usamos la fórmula del interés simple donde p es de nuevo $\frac{1}{4}$ de año.

$$C = 1010.50 \qquad t = 0.042 \qquad p = \frac{1}{4}$$

$$I = 1010.50 \cdot 0.042 \cdot \frac{1}{4}$$
$$I \approx \$10.61 \quad \text{(Redondeado)}$$

El interés ganado en el segundo trimestre es \$10.61. Esto se hace parte del capital para el tercer trimestre.

\$1010.50 + \$10.61 = \$1021.11

Para encontrar el interés que ganarán \$1021.11 en el tercer trimestre del año procedemos como sigue.

$$C = \mathbf{1021.11} \qquad t = \mathbf{0.042} \qquad p = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$I = \mathbf{1021.11} \cdot \mathbf{0.042} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$I \approx \$10.72$ (Redondeado)

El interés ganado en el tercer trimestre es \$10.72. Esto se hace parte del capital para el cuatro trimestre.

\$1021.11 + \$10.72 = \$1031.83

Para encontrar el interés que ganarán \$1031.83 en el cuarto trimestre de nuevo usamos la fórmula de interés simple.

$$C = \mathbf{1031.83} \qquad t = \mathbf{0.042} \qquad p = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$I = \mathbf{1031.83} \cdot \mathbf{0.042} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$I \approx \$10.83$ (Redondeado)

El interés ganado en el cuarto trimestre es \$10.83. Sumándolo al capital existente tenemos,

\$1031.83 + \$10.83 = \$1042.66

La cantidad que se ha acumulado en la cuenta después de cuatro trimestres, o 1 año, es \$1042.66.

El cálculo del interés compuesto a mano es tedioso. Se puede usar la **fórmula** para **interés compuesto** para calcular la cantidad total de dinero que tendrá una cuenta al final del plazo.

Fórmula de interés compuesto

La cantidad total A en una cuenta se puede encontrar usando la fórmula

$$A = C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{np}$$

donde C es el capital, t es la tasa de interés anual expresada como decimal, p es el intervalo de tiempo en años y n es el número de pagos de interés en un año.

A menudo es útil una calculadora para resolver problemas de interés compuesto.

Interés compuesto INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Un hombre de negocios invierte \$9250 a 7.6% de interés pagadero mensualmente. Para encontrar cuánto valdrá la inversión en 3 años use la fórmula de interés compuesto con los valores siguientes.

$C = \$9250$ $t = 7.6\% = 0.076$ $p = 3$ años $n = 12$ veces al año (mensualmente)

(*continúa*)

Aplicamos la fórmula de interés compuesto.

$$A = C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{np}$$ Esta es la fórmula del interés compuesto.

$$A = 9250\left(1 + \frac{0.076}{12}\right)^{12(3)}$$ Sustituya los valores de C, t, p y n. np significa $n \cdot p$.

$$A = 9250\left(1 + \frac{0.076}{12}\right)^{36}$$ Simplifique la expresión: $12(3) = 36$.

Para evaluar la expresión del lado derecho de la ecuación introducimos estos números y oprimimos estas teclas.

9250 [×] [(] 1 [+] .076 [÷] 12 [)] [y^x] 36 [=] 11610.43875

Redondeada al centavo más cercano la cantidad en la cuenta después de 3 años será $11 610.44.

Si su calculadora no tiene teclas de paréntesis calcule la suma dentro del paréntesis primero. Luego encuentre la potencia. Finalmente multiplique por 9250.

Autoevaluación 4

Encuentre el interés que ganarán $25 000 en 10 años si se deposita en una cuenta con 5.99% de interés pagadero diariamente.

Respuesta $20 505.20

EJEMPLO 4 Un hombre depositó $50 000 en una cuenta a largo plazo a 6.8% de interés pagadero diariamente. ¿Cuánto dinero podrá retirar en 7 años si el capital permanece en el banco?

Solución "Pagadero diariamente" significa que el pago será hecho 365 veces en un año.

$C = \$50\,000$ $t = 6.8\% = 0.068$ $p = 7$ años $n = 365$ veces en un año

$$A = C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{np}$$ Esta es la fórmula del interés compuesto.

$$A = 50\,000\left(1 + \frac{0.068}{365}\right)^{365(7)}$$ Sustituya los valores de C, t, p, y n. np significa $n \cdot p$.

$$A = 50\,000\left(1 + \frac{0.068}{365}\right)^{2555}$$ Multiplique en el exponente.

$A \approx 80\,477.58$ Use una calculadora. Redondee al centavo más cercano.

La cuenta tendrá $80 477.58 al cabo de 7 años. Para encontrar la cantidad que puede retirar el hombre, restamos.

$$80\,477.58 - 50\,000 = 30\,477.58$$

El hombre puede retirar $30 477.58 sin tener que tocar los $50 000 del capital.

Sección 5.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. En la banca, la cantidad original de dinero prestada o depositada es conocida como el _____.
2. Los deudores pagan _____ a los acreedores por el uso de su dinero.
3. El porcentaje que se usa para calcular la cantidad de interés a pagar se llama tasa de _____ .
4. El interés _____ es el interés pagado sobre el interés acumulado.

5. El interés calculado sólo sobre el capital original se llama interés _____.
6. Porcentaje significa partes por _____.

CONCEPTOS

7. Cuando hacemos cálculos con porcentajes se tienen que cambiar a decimales o fracciones. Cambie cada porcentaje a decimal.

   a. 7% **b.** 9.8% **c.** $6\frac{1}{4}\%$

8. Exprese cada uno de los siguientes como fracción de un año. Simplifique la fracción.

   a. 6 meses **b.** 90 días
   c. 120 días **d.** 1 mes

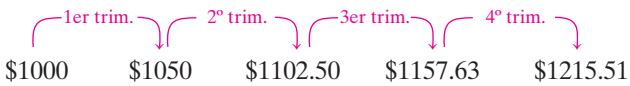
9. Complete la tabla encontrando el interés simple ganado.

Capital	Tasa	Plazo	Interés ganado
$10 000	6%	3 años	

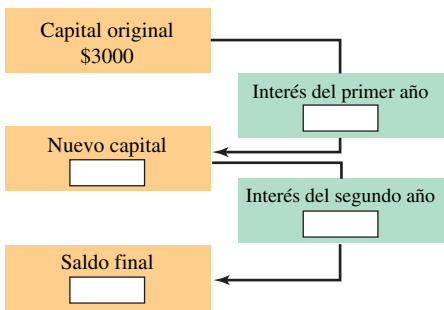
10. Determine cuántas veces al año se calcula el interés en una cuenta de ahorros si el interés se paga

    a. semestralmente **b.** trimestralmente
    c. diariamente **d.** mensualmente

11. **a.** ¿Qué concepto estudiado en esta sección se ilustra con el diagrama de la ilustración?
    b. ¿Cuánto es el capital original?
    c. ¿Cuántas veces se calculó el interés?
    d. ¿Cuánto interés se ganó en el primer pago?
    e. ¿Por cuánto tiempo se invirtió el dinero?



12. Se depositan $3000 en una cuenta de ahorros que da 10% de interés pagadero anualmente. Complete la serie de cálculos en la ilustración para encontrar cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de 2 años.



NOTACIÓN

13. En la fórmula $I = Ctp$, ¿qué operaciones se indican con Ctp?

14. En la fórmula $A = C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{np}$, ¿cuántas operaciones se tienen que hacer para encontrar A?

APLICACIONES *En los problemas 15.26 use interés simple.*

15. INGRESO DE JUBILACIÓN Un jubilado invierte $5000 en un plan de ahorro que paga 6% anual. ¿Cuál será el saldo de la cuenta al cabo del primer año?

16. INVERSIONES Una desarrolladora prometió una ganancia de 8% de interés anual sobre una inversión de $15 000 en su compañía. ¿Cuánto puede esperar ganar un inversionista en el primer año?

17. REMODELACIÓN Un propietario pide $8000 para pagar un proyecto de remodelación de una cocina. Los términos del préstamo son 9.2% de interés anual y liquidación en 2 años. ¿Cuánto se pagará de interés por el préstamo?

18. UNIONES DE CRÉDITO Un granjero pidió $7000 a una unión de crédito. El dinero se prestó a 8.8% de interés anual por 18 meses. ¿Cuánto interés le cobra la unión de crédito por el uso del dinero?

19. NÓMINA DE EMERGENCIA Para de cubrir las obligaciones de la nómina a fin de mes un pequeño negocio tuvo que pedir $4200 por 30 días. ¿Cuánto tuvo que devolver si la tasa de interés fue 18%?

20. PRÉSTAMOS PARA AUTOMÓVIL Para comprar un auto, un hombre toma un préstamo por $2000. Si la tasa de interés es 9% anual, ¿qué interés tendrá que pagar al final del plazo de 120 días del préstamo?

21. CUENTAS DE AHORROS Encuentre el interés ganado sobre $10 000 a $7\frac{1}{4}\%$ a dos años. Use la tabla para organizar sus cuentas.

C	t	p	I

22. GASTOS DE ESTUDIO Un estudiante pide $300 a un fondo educativo para pagar por los libros del semestre de primavera. Si el préstamo es por 45 días a un interés de $3\frac{1}{2}\%$ anual, ¿cuánto deberá el estudiante al final del periodo del préstamo?

23. SOLICITUDES DE PRÉSTAMO Complete la siguiente solicitud de préstamo.

Hoja de solicitud de préstamo

1. Cantidad del préstamo (capital) $1200.00
2. Plazo del préstamo 2 AÑOS
3. Tasa de interés anual 8%
4. Interés a cobrar _____
5. Cantidad total a liquidar _____
6. Forma de pago:
   ☐ 1 pago único ☑ pagos mensuales

   El deudor está de acuerdo en hacer 24 pagos iguales de _____ para liquidar el préstamo.

24. SOLICITUDES DE PRÉSTAMO Complete la siguiente solicitud de préstamo.

Hoja de solicitud de préstamo

1. Cantidad del préstamo (capital) $810.00
2. Plazo del préstamo 9 meses
3. Tasa de interés anual 12%
4. Interés a cobrar _____
5. Cantidad total a liquidar _____
6. Forma de pago
   ☐ pago único ☑ pagos mensuales

   El deudor está de acuerdo en hacer 9 pagos iguales de _____ para liquidar el préstamo.

25. PRÉSTAMOS DE INTERÉS BAJO Un país subdesarrollado recibe un préstamo con bajo interés para financiar la construcción de una planta de tratamiento de agua. ¿Cuánto debe liquidar el país al cabo de 2 años si el préstamo es por $18 millones a 2.3%?

26. REMODELACIÓN Se premia a una ciudad con un préstamo de bajo interés para ayudar a renovar el distrito de negocios del centro. El préstamo de $40 millones a 1.75% se tiene que liquidar en $2\frac{1}{2}$ años. ¿Qué interés tiene que pagar la ciudad?

Una calculadora podría ser útil para resolver estos problemas.

27. PAGO ANUAL Si se invierten $600 en una cuenta que da 8%, pagaderos anualmente, ¿cuál será el saldo de la cuenta al cabo de 3 años?

28. PAGO SEMESTRAL Si se invierten $600 en una cuenta que da un interés anual de 8%, pagaderos semestralmente, ¿cuál será el saldo de la cuenta al cabo de 3 años?

29. FONDOS UNIVERSITARIOS Una estudiante de noveno grado abre una cuenta de ahorros a plazo fijo por 4 años con una tasa anual de 6% pagadero diariamente. Si el depósito inicial es de $1000 ¿cuánto dinero habrá en la cuenta cuando comience en la universidad dentro de 4 años?

30. CERTIFICADO DE DEPÓSITOS Un certificado de depósito a 3 años paga una tasa de interés anual de 5%, pagaderos diariamente. El máximo permitido del depósito es de $90 000. ¿Cuál es el interés máximo que puede ganar un depositante del CD?

31. DEVOLUCIÓN DE IMPUESTOS Una pareja deposita un cheque de devolución de impuestos de ingresos en una cuenta que paga una tasa de interés anual de 4.6% pagaderos diariamente. ¿De qué tamaño será la cuenta al cabo de un año?

32. HERENCIAS Tras recibir una herencia de $11 000 un hombre deposita el dinero en una cuenta que paga una tasa anual de 7.2% pagaderos diariamente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de un año?

33. LOTERÍAS Suponga que ganó en la lotería $500 000 y depositó el dinero en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual pagadero diariamente. ¿Cuánto interés ganaría cada año?

34. REGALOS EN EFECTIVO Tras recibir un regalo en efectivo de $250 000 un universitario decide depositar el dinero en una cuenta que paga una tasa anual de 5.88% pagaderos trimestralmente. ¿Cuánto dinero contendrá la cuenta en 5 años?

POR ESCRITO

35. ¿Cuál es la diferencia entre interés simple y compuesto?

36. Explique lo siguiente: *El interés es la cantidad de dinero pagada por el uso de dinero.*

37. En algunas cuentas el banco cobra una penalización si el depositante retira el dinero antes del plazo. ¿Por qué haría esto el banco?

38. Explique por qué es mejor para un depositante abrir una cuenta de ahorros que paga 5% de interés pagadero diariamente que una que paga 5% pagadero mensualmente.

REPASO

39. Simplifique: $\sqrt{\frac{1}{4}}$.

40. Encuentre: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

41. Sume: $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$.

42. Reste: $\frac{3}{7} - \frac{2}{5}$.

43. Multiplique: $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$.

44. Divida: $-12\frac{1}{2} \div 5$.

45. Encuentre 6% de 200.

46. Evalúe: $(0.2)^2 - (0.3)^2$.

CONCEPTO CLAVE

Porcentaje

Como la palabra *porcentaje* significa *partes por un ciento,* podemos pensar un porcentaje como una fracción cuyo denominador es 100.

Para cambiar el porcentaje a una fracción, quitamos el símbolo % y escribimos el número dado sobre 100. Termine cada conversión.

$$67\% = \frac{\quad}{100} \qquad 56\% = \frac{56}{\quad} = \frac{14}{25} \qquad 0.05\% = \frac{\quad}{100} = \frac{5}{10\,000} = \frac{1}{\quad}$$

Para cambiar el porcentaje a un decimal, quitamos el símbolo % y movemos el punto decimal dos cifras a la izquierda. Termine cada conversión.

$$67\% = \quad \qquad 56\% = \quad \qquad 0.05\% = \quad$$

Para cambiar una fracción a un porcentaje, escribimos la fracción como un decimal y luego movemos el punto decimal 2 cifras a la derecha e insertamos un símbolo %. Termine cada conversión.

$$\frac{3}{4} = 0.75 = \quad \qquad \frac{4}{5} = \quad = 80\%$$

$$\frac{5}{8} = \quad = 62.5\% \qquad \frac{25}{4} = 6.25 = \quad$$

Para resolver problemas que involucren porcentajes, usamos la fórmula del porcentaje.

$$\text{Cantidad} = \text{porcentaje} \cdot \text{base}$$

Resuelva cada problema.

1. Encuentre 32% de 620.

2. 300 es ¿qué porcentaje de 500?

3. 25 es 40% ¿de qué número?

4. Encuentre 125% de 850.

5. 106.25 es ¿qué porcentaje de 625?

6. 163.84 es 32% ¿de qué número?

Los porcentajes se usan para calcular intereses. Si I es el interés, C el capital, t es es la tasa anual (o porcentaje) y p es el plazo en años, la fórmula del interés simple es

$$I = Ctp$$

7. Encuentre la cantidad de interés que devengarán $10 000 invertidos por 5 años a 6% de interés anual.

Si A es la cantidad, C es es el capital, t es la tasa de interés anual, p es el plazo en años y n es el número de pagos de interés en un año, la fórmula para el interés compuesto es

$$A = C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{np}$$

8. Encuentre la cantidad de interés que devengarán $10 000 invertidos por 5 años a 6% de interés anual, pagaderos trimestralmente.

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

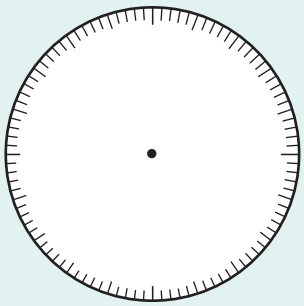
SECCIÓN 5.1

M & M's Proporcione a cada miembro de su equipo una bolsa de dulces M & M's.

a. Determine qué porcentaje del número total de M & M's en su bolsa son amarillos. Haga lo mismo para los otros colores. Introduzca los resultados en la tabla. (Redondee a la unidad porcentual más cercana.)

Color de M & M's	Porcentaje
Amarillo	
Café	
Verde	
Rojo	
Azul	

b. Presente los datos en la tabla usando una gráfica circular. Compare su gráfica con las de los demás miembros de su grupo. ¿Aparecen los colores en los mismos porcentajes en cada bolsa?



SECCIÓN 5.2

NUTRICIÓN Haga que cada persona en su grupo traiga una etiqueta nutrimental como la que se muestra y escriba atrás el nombre del producto. Haga que los miembros del grupo intercambien etiquetas. Con la etiqueta que recibió determine qué porcentaje de las calorías provienen de grasas.

El Departamento de Salud de EU recomienda que no más de 30% de las calorías diarias de una persona provengan de grasas. ¿Qué productos exceden la recomendación?

Información Nutrimental
Tamaño de la porción: 1 comida

Cantidad por porción	
Calorías 560	Calorías de grasas 190
	% Daily Value
Grasas totales 21g	**32%**
Grasas saturadas 9 g	**43%**
Colesterol 60mg	**20%**
Sodio 2110mg	**88%**
Carbohidratos totales 67g	**22%**
Fibra dietética 7g	**29%**
Azúcares menos de 25g	
Proteína 27g	

SECCIÓN 5.3

MATRÍCULA Consiga las cifras de la matrícula de los últimos 10 años de la oficina de la administración de su escuela. Calcule el porcentaje de aumento (o disminución) en la matrícula para cada uno de los siguientes periodos.

- De hace diez años al momento
- De hace cinco años al momento
- De hace un año al momento

ANUNCIOS DE PERIÓDICO Haga que cada persona en su grupo encuentre un anuncio de periódico de algún artículo que esté en venta. El anuncio debe incluir sólo dos de los cuatro detalles listados abajo.

- El precio normal
- El precio de venta
- El descuento
- La tasa de descuento

Por ejemplo, el siguiente anuncio da el precio normal y el precio de venta, pero no da el descuento o la tasa de descuento.

Haga que los miembros de su grupo intercambien anuncios. Determine los dos detalles que faltan en el anuncio que reciba. ¿Qué artículo en su grupo tenía la mayor tasa de descuento?

SECCIÓN 5.4

TASAS DE INTERÉS Recuerde que el interés es el dinero que paga el deudor al acreedor por el uso del dinero. La cantidad de interés que el deudor tiene que pagar depende de la tasa de interés cobrada por el acreedor.

Haga que los miembros de su grupo llamen a bancos, ahorros y préstamos, uniones de crédito y otros servicios financieros para saber las tasas de préstamos para varios tipos de créditos.

Encuentre la tasa de interés cobrada por tarjetas de crédito como VISA, tiendas departamentales y compañías de gasolina. Enliste las tasas de interés en orden, de la mayor a la menor, y presente sus resultados a la clase.

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 5.1 *Porcentajes, decimales y fracciones*

CONCEPTOS

Porcentaje significa partes por un ciento.

Para cambiar un porcentaje a una fracción quite el símbolo % y ponga el número dado sobre 100.

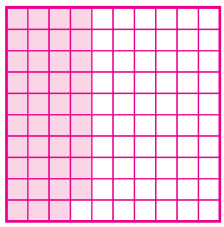
Para cambiar un porcentaje a un decimal quite el símbolo % y divida entre 100 moviendo el punto decimal dos cifras a la izquierda.

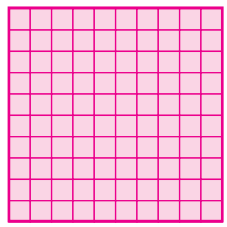
Para cambiar un decimal a un porcentaje multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la derecha y luego inserte un símbolo %.

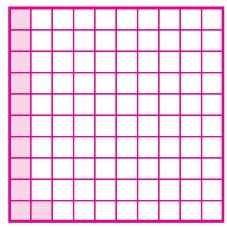
Para cambiar una fracción a un porcentaje, escriba la fracción como un decimal dividiendo su numerador entre su denominador. Multiplique el decimal por 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la derecha y luego inserte un símbolo %.

EJERCICIOS DE REPASO

Exprese la cantidad de cada figura que está sombreada como un porcentaje, como un decimal y como una fracción. Cada conjunto de cuadrados representa 100%.

1. 

2. 



3. En el problema 1, ¿qué porcentaje de la figura no está sombreada?

Cambie cada porcentaje a una fracción

4. 15% **5.** 120% **6.** $9\frac{1}{4}\%$ **7.** 0.1%

Cambie cada porcentaje a un decimal.

8. 27% **9.** 8% **10.** 155% **11.** $1\frac{4}{5}\%$

Cambie cada decimal a un porcentaje.

12. 0.83 **13.** 0.625 **14.** 0.051 **15.** 6

Cambie cada fracción a un porcentaje.

16. $\frac{1}{2}$ **17.** $\frac{4}{5}$ **18.** $\frac{7}{8}$ **19.** $\frac{1}{16}$

Encuentre el porcentaje equivalente exacto para cada fracción.

20. $\frac{1}{3}$ **21.** $\frac{5}{6}$

Cambie cada fracción a un porcentaje. Redondee al centésimo más cercano a una unidad porcentual.

22. $\frac{5}{9}$ **23.** $\frac{8}{3}$

24. DECLARACIÓN DE DERECHOS Hay 27 enmiendas a la Constitución de Estados Unidos. Las primeras diez se conocen como la Declaración de Derechos. ¿Qué porcentaje de las enmiendas se adoptaron después de la Declaración de Derechos? (Redondee a la unidad porcentual más cercana.)

25. Exprese un décimo de unidad porcentual como una fracción.

SECCIÓN 5.2 *Solución de problemas con porcentajes*

La fórmula del porcentaje:

Cantidad = porcentaje · base

26. Identifique la cantidad, la base y el porcentaje en la afirmación "15 es $33\frac{1}{3}\%$ de 45."

27. Traduzca la oración dada en una ecuación con porcentaje:

¿Qué número	es	32%	de	96?

Resuelva cada problema de porcentaje.

28. ¿Qué número es 40% de 500?

29. 20 es 16% ¿de qué número?

30. 1.4 es ¿qué porcentaje de 80?

31. ¿Qué número es $66\frac{2}{3}\%$ de 3150?

32. Encuentre 220% de 55.

33. ¿Cuánto es 0.05% de 60 000?

34. CARRERAS La mezcla de combustible de nitro-metano usada para dar potencia a ciertos automóviles experimentales es 96% nitro y 4% metano ¿Cuántos galones de cada uno de los componentes del combustible se necesitan para llenar un tanque de combustible de 15 galones?

35. VENTAS DE CASAS Después del primer día en el mercado 51 casas en una nueva subdivisión ya se habían vendido. Esto era 75% del total de casas disponibles. ¿Cuántas casas había originalmente en venta?

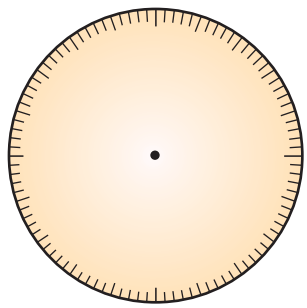
36. DAÑO POR HURACÁN En un estacionamiento de casas móviles fueron dañados o destruidos 96 de 110 remolques por lo vientos huracanados. ¿Qué porcentaje es esto? (Redondee a la unidad porcentual más cercana.)

37. PROPINAS El costo de una cena para una familia de cinco en un restaurante fue $36.20. Encuentre cuánto sería la propina si fuera 15% del costo de la cena.

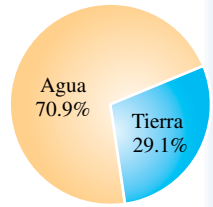
Una *gráfica circular* es una forma de representar datos para elaborar comparaciones. Los tamaños de los segmentos del círculo indican los porcentajes del todo que está designado por cada categoría.

38. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Complete la gráfica circular para mostrar los datos dados.

Fuentes de contaminación atmosférica por monóxido de carbono	
Vehículos de transporte	63%
Combustible quemado en casas, oficinas plantas eléctricas	12%
Procesos industriales	8%
Desecho de desperdicios sólidos	3%
Misceláneos	14%



39. SUPERFICIE TERRESTRE La superficie terrestre es aproximadamente 196 800 000 millas cuadradas. Use la información de la ilustración para encontrar el número de millas cuadradas de la superficie de la Tierra que están cubiertas por agua.



SECCIÓN 5.3 *Aplicaciones de los porcentajes*

Para encontrar el precio total de un artículo:

Precio total = precio de venta + impuesto de venta

40. RECIBOS DE VENTAS Complete el recibo de venta.

CENTRO DE CÁMARAS

Cámara Canon 35 mm		$59.99
SUBTOTAL		$59.99
IMPUESTO DE VENTAS	5.5%	
TOTAL		

41. TASAS DE IMPUESTOS DE VENTA Encuentre la tasa de impuesto de venta si el impuesto de venta es $492 en la compra de un automóvil con precio de $12 300.

La *comisión* se basa en un porcentaje de la cantidad total en dólares que corresponde a los bienes o servicios que se venden.

42. COMISIONES Si la tasa de comisión es 6% encuentre la comisión ganada por un vendedor de electrodomésticos que vende una lavadora en $369.97 y una secadora en $299.97.

43. Llene el espacio: Encuentre siempre el porcentaje de aumento o disminución de un monto con respecto a la cantidad _____.

Para calcular el *porcentaje de aumento o disminución*:

1. Se resta el número más pequeño del más grande para calcular el porcentaje de aumento o disminución.
2. Se calcula qué porcentaje de la diferencia corresponde a la cantidad original.

44. PACIFICACIÓN El tamaño de una fuerza pacificadora se incrementó de 10 000 a 12 500 soldados. Encuentre el porcentaje de aumento.

45. RENDIMIENTO DE GASOLINA Al experimentar con una nueva marca de gasolina en su camión una mujer encontró que su millaje cayó de 18.8 a 17.0 millas por galón. Encuentre el porcentaje de disminución. (Redondee al décimo más cercano de unidad porcentual.)

La diferencia entre el precio original y el precio de venta de un artículo es el *descuento*.

Para calcular el *precio de venta*:

Precio de venta = precio original − descuento

46. CAJA DE HERRAMIENTAS Use la información en el anuncio para encontrar el descuento, el precio original y la tasa de descuento en la caja de herramientas.

SECCIÓN 5.4 *Interés*

El *interés simple* es el interés que se gana sobre el capital original y se encuentra usando la fórmula

$$I = Ctp$$

donde C es el capital, t es la tasa de interés anual y p es el plazo en años.

El *interés compuesto* es el interés ganado sobre intereses La fórmula de interés compuesto es

$$A = C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{np}$$

donde A es la cantidad en la cuenta, C es el capital, t es la tasa de interés anual, n es el número de pagos de interés en un año y p es el plazo en años.

47. Encuentre el interés que ganan \$6000 invertidos a 8% anual por 2 años. Use la siguiente tabla para organizar sus cuentas.

C	t	p	I

48. VIOLACIONES AL REGLAMENTO Un negocio ordenó corregir las violaciones al reglamento de seguridad en una planta de producción. Para pagar las correcciones necesarias la compañía pidió \$10 000 a 12.5% por 90 días. Encuentre la cantidad total que tuvo que pagar a los 90 días.

49. PAGOS MENSUALES Una pareja pide \$1500 por 1 año a $7\frac{3}{4}\%$ y decide liquidar el préstamo haciendo 12 pagos iguales. ¿De cuánto debe ser cada pago?

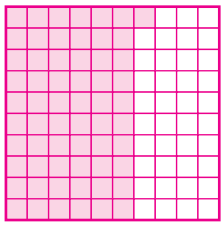
50. Encuentre la cantidad de dinero que habrá en una cuenta de ahorros al cabo de 1 año si el depósito inicial es de \$2000 y la tasa de interés anual de 7% se paga semestralmente. (*Sugerencia:* encuentre el interés simple dos veces.)

51. Encuentre la cantidad que habrá en una cuenta de ahorros al cabo de 3 años si un depósito de \$5000 gana un interés con tasa anual de $6\frac{1}{2}\%$, pagadero diariamente.

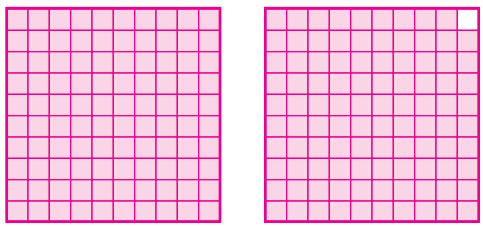
52. BECAS EN EFECTIVO Cada año se le da a un estudiante universitario destacado una beca en efectivo. La beca consiste en el interés ganado en ese año por una cuenta de ahorros de \$500 000. ¿Cuánto dinero recibe en el año si el dinero está invertido a una tasa de interés anual de 8.3% pagadero diariamente?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5

1. Exprese la cantidad de la figura que está sombreada como un porcentaje, como una fracción y como un decimal.



2. En la ilustración cada conjunto de 100 cuadrados representa 100%. Exprese como un porcentaje la cantidad de la figura que está sombreada. Luego exprese ese porcentaje como una fracción y como un decimal.



3. Cambie cada porcentaje a un decimal.

a. 67% **b.** 12.3% **c.** $9\frac{3}{4}\%$

4. Cambie cada fracción a un porcentaje.

a. $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{5}{8}$ **c.** $\frac{3}{25}$

5. Cambie cada decimal a un porcentaje.

a. 0.19 **b.** 3.47 **c.** 0.005

6. Cambie cada porcentaje a una fracción.

a. 55% **b.** 0.01% **c.** 125%

7. Cambie $\frac{7}{30}$ a un porcentaje. Redondee al centésimo más cercano de una unidad porcentual.

8. REPORTES DEL TIEMPO Un meteorólogo asegura que hay un 40% de probabilidad de lluvia. ¿Qué probabilidad hay de que no llueva?

9. Encuentre el porcentaje equivalente exacto de la fracción $\frac{2}{3}$.

10. Encuentre el porcentaje equivalente exacto de la fracción $\frac{1}{4}$.

11. ENCOGIMIENTO Vea la siguiente etiqueta de un par de pantalones nuevos.

a. ¿Qué longitud se perderá debido al encogimiento?
b. ¿Cuál será la longitud resultante?

CINTURA	LARGO
33	34

Encogimiento esperado en el largo: **3%** después de lavarse

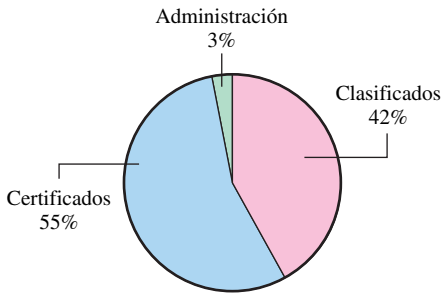
12. 65 es ¿qué porcentaje de 1000?

13. PROPINAS Encuentre la cantidad de una propina de 15% sobre una comida que cuesta $25.40.

14. FUGITIVOS En octubre de 2004 habían sido aprehendidos 450 de 479 fugitivos que habían aparecido en la lista de los Diez más Buscados del FBI. ¿Qué porcentaje es esto? Redondee al décimo más cercano de una unidad porcentual.

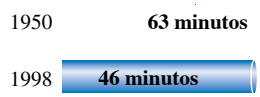
15. ENTRENAMIENTO DE NATACIÓN Un nadador había completado 18 vueltas antes de que una lesión en la espalda lo obligara a detenerse. Esto era solamente 20% de su entrenamiento típico. ¿Cuántas vueltas da normalmente en un entrenamiento?

16. EMPLEADOS UNIVERSITARIOS Los 700 empleados de la comunidad de una universidad caen en tres categorías principales como se muestra. ¿Cuántos empleados están en la administración?



17. ¿Qué número es 24% de 600?

18. CORTES DE PELO La ilustración muestra el número de minutos que le tomó a un trabajador promedio de EU ganar lo suficiente para pagar un corte de pelo en 1950 y en 1998. Encuentre el porcentaje de disminución hasta la unidad porcentual más cercana.



19. SEGUROS Una vendedora de seguros recibe una comisión de 4% sobre la prima anual de cualquier póliza que venda. Encuentre su comisión sobre una póliza que paga una prima de $898.

20. AUMENTO EN EL COSTO DE LA VIDA Un maestro que gana $40 000 recién recibió un aumento por alto costo de vida de 3.6%. ¿Cuál es su nuevo salario?

21. CUIDADO DEL AUTOMÓVIL Un estuche de encerado para automóvil que se vende normalmente a $14.95 está a la venta con $3 menos. Encuentre el precio de venta, el descuento y la tasa.

22. AUMENTO DE LA POBLACIÓN Después de que se terminó una nueva autopista se incrementó la población de una ciudad por la que pasaba de 12 808 a 15 565 en dos años. Encuentre el porcentaje de aumento. (Redondee a la unidad porcentual más cercana.)

23. Encuentre el interés simple de un préstamo de $3000 a 5% anual por un año.

24. Encuentre la cantidad de interés ganada por una inversión de $24 000 que paga una tasa de interés anual de 6.4% pagadero diariamente por 3 años.

25. ANUNCIOS POLÍTICOS Explique qué no queda claro en el siguiente anuncio.

Reelija a
Sal Berchetto
Para fiscal de distrito
Berchetto tiene un récord probado de disminución del crimen de 37%.
Un hombre con integridad y experiencia.

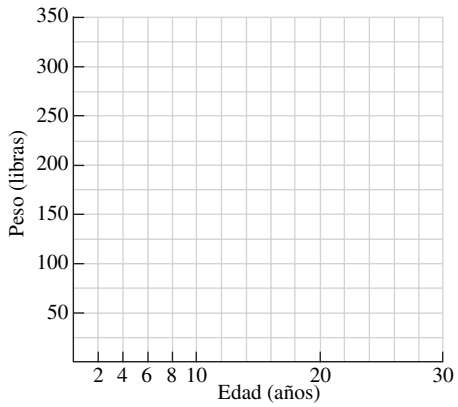
26. En la sección 5.4 discutimos sobre el interés. ¿Qué es el interés?

CAPÍTULOS 1–5 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

1. SHAQUILLE O'NEAL Use los datos en la tabla para completar la ilustración dibujando una gráfica de líneas para graficar el crecimiento de Shaquille O'Neal, centro de los Lakers de Los Ángeles.

Edad (años)	4	6	8	10	12	16	21	28
Peso (libras)	56	82	108	139	192	265	302	315

Basado en datos de *Los Angeles Times*



2. Use los números 6 y 8 para enunciar la propiedad conmutativa de la multiplicación.

3. **a.** Encuentre los factores de 40.

b. Encuentre la factorización en primos de 40.

4. SEGUROS DE AUTOMÓVILES Vea la comparación de primas en la ilustración. Encuentre la prima media de las compañías enlistadas.

Allstate	**$2672**	**Mercury**	**$1370**
Auto Club	**$1680**	**State Farm**	**$2737**
Farmers	**$2485**	**20th Century**	**$1692**

Criterios: Prima semestral. El esposo de 45 maneja un Explorer 12 000 millas anuales. La esposa de 43 maneja un Dodge Caravan mod.1996, 12 000 millas anuales. El hijo de 17 es un conductor ocasional. Todos tienen antecedentes de manejo limpios.

5. PINTURA Una lona cuadrada tiene 8 pies de largo. Cuando se extiende en el piso, ¿qué área cubre?

6. Evalúe: $-12 - (-5)$.

7. Evalúe: $12 - 2[-8 - 2^4(-1)]$.

8. Encuentre: $|-55|$.

9. Evalúe: $(-3)^2$.

10. Multiplique: $(-2)(-3)(-5)$.

11. ALMACENAMIENTO DE FRUTA Use la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para encontrar el número que falta en la etiqueta mostrada.

12. Simplifique: $2 - 4 \cdot 3$.

13. ORTOGRAFÍA ¿Qué fracción de las letras en la palabra *Mississippi* son vocales?

14. Simplifique: $\frac{10}{15}$.

Haga las operaciones.

15. $-\frac{16}{35} \cdot \frac{25}{48}$

16. $4\frac{2}{5} \div 11$

17. $\frac{4}{3} + \frac{2}{7}$

18. $34\frac{1}{9} - 13\frac{5}{6}$

19. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

20. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

21. $78.1 - 7.81$

22. $2.13(-4.05)$

23. $0.752(1000)$

24. $\frac{241.86}{2.9}$

25. Redondee 452.0298 al centésimo más cercano.

26. Redondee 452.0298 al milésimo más cercano.

27. Escriba $\frac{11}{15}$ como un decimal. Use una barra arriba.

28. Simplifique: $\sqrt{\frac{4}{9}}$.

29. Simplifique: $3\sqrt{81} - 8\sqrt{49}$.

30. COSTOS LABORALES Se muestra la cuenta de reparación de un automóvil. La cuenta está rota y no se lee una línea. ¿Cuántas horas de trabajo tomó reparar el automóvil?

***Brian Wood* Auto Repair**

Partes	$175.00
Trabajo total (a $35 por hora)	
Total	$297.50

31. Complete la tabla.

Porcentaje	Decimal	Fracción
	0.29	
47.3%		
		$\frac{7}{8}$

32. 20 es 16% ¿de qué número?

33. PROPINAS Complete el recibo de ventas si se deja a la camarera una propina de 15% redondeada al dólar más cercano.

STEAK STAMPEDE
Bloomington, MN
Mesero #12\ AT

VISA	67463777288
NOMBRE	DALTON/ LIZ
CANTIDAD	$75.18
PROPINA $	_____
TOTAL $	_____

34. GENEALOGÍA Por medio de una búsqueda extensiva por computadora, un genealogista determinó que a nivel mundial 180 de cada 10 millones de personas tenían su mismo apellido. ¿Qué porcentaje es esto?

35. CUENTAS DE AHORROS Encuentre el interés simple ganado por $10 000 a $7\frac{1}{4}\%$ por 2 años.

36. Encuentre 100% de 50.

CAPÍTULO 6

Razón, proporción y medida

6.1 Razones

6.2 Proporciones

6.3 Unidades norteamericanas de medida

6.4 Unidades métricas de medida

6.5 Conversión entre unidades norteamericanas y unidades métricas

Concepto clave: proporciones

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso

CORBIS

Todos estamos familiarizados con las unidades de medida básicas norteamericanas: pies, libras y galones. Sin embargo, la mayoría de los países del mundo usan un sistema de medidas diferente llamado *sistema métrico*. En el sistema métrico la unidad básica de longitud es el metro, la unidad básica de peso es el gramo y la unidad básica de capacidad es el litro.

El sistema métrico se inventó por los científicos franceses a finales del siglo XVIII. Hasta entonces las unidades de medida diferían de país a país e incluso de aldea a aldea. El objetivo era crear unidades estándar de medida a nivel mundial basados en el sistema decimal más que en fracciones.

Verifique sus conocimientos

1. Una _____ es un cociente de dos números o un cociente de dos cantidades con las mismas unidades.
2. Una _____ es una afirmación de que dos razones o tasas son iguales.
3. Pulgadas, pies y millas son ejemplos de unidades norteamericanas de _____. Metros, gramos y litros son unidades de medida en el sistema _____ .
4. En el sistema norteamericano las temperaturas se miden en grados _____. En el sistema métrico las temperaturas se miden en grados _____.

Reduzca las razones a su mínima expresión.

5. ¿Cuál es la razón de 14 libras a 10 libras?
6. ¿Cuál es la razón de 8 pulgadas a 3 pies?
7. David conduce un automóvil híbrido gasolina-eléctrico. Recientemente manejó 517 millas usando 11 galones de gasolina. ¿Cuántas millas por galón (mpg) logró?
8. Un café especial está a la venta en bolsas de 12 onzas en $8.95 y en bolsas de 2 libras en $23.95. ¿Cuál es la mejor compra?
9. Chelsea arrojó 20 dardos y le dio al blanco 16 veces. Encuentre la razón de aciertos a desaciertos.
10. Determine si cada enunciado es una proporción.
    a. $\frac{33}{44} = \frac{39}{52}$ **b.** $\frac{3.5}{2.7} = \frac{10.5}{8.3}$
11. ¿Son proporcionales los números 17, 27 y 125, 199?

Resuelva cada proporción.

12. $\frac{12}{x} = \frac{3}{17}$
13. $-\frac{3}{8} = \frac{15}{x}$
14. $\frac{13.2}{4} = \frac{x}{7.8}$
15. $\frac{x}{0.04} = \frac{-0.35}{0.07}$
16. Convierta 5 metros a centímetros.
17. ¿Cuántas yardas hay en 16 pies?
18. ¿Cuántos pies hay en 5 millas?
19. ¿Cuántas pulgadas hay en 7 yardas?
20. Convierta 100 metros a yardas (1 m $\approx$ 1.0936 yd). Redondee a una cifra decimal.
21. Convierta 5 pies 9 pulgadas a centímetros (1 pulg. $\approx$ 2.54 cm).
22. Para estimar la población de coyotes en un parque estatal los guardabosques atraparon, etiquetaron y liberaron 50 coyotes. Después, una muestra al azar de 100 coyotes sólo incluyó a 2 animales etiquetados. Estime el tamaño de la población de coyotes.
23. Media pulgada en un mapa corresponde a 25 millas. Dos ciudades están separadas 175 millas. ¿Cuántas pulgadas separan las dos ciudades en el mapa?
24. Convierta $-40°$ Fahrenheit a Celsius. $\left(\textit{Sugerencia: } C = \frac{5}{9}(F - 32) \right)$

Taller de habilidades para el estudio

ESTUDIO PARA LOS EXÁMENES

Es importante hacer tarea diariamente, pero los exámenes requieren otro tipo de estrategia de preparación. Antes de hacer un examen es importante que haya hecho lo máximo para memorizar los conceptos importantes.

¿Cuánto tiempo se debe dedicar a prepararse para un examen? El tiempo que se necesita para preparar un examen variará de acuerdo a qué tan bien se hayan entendido y memorizado los conceptos básicos. Planee preparar al menos cuatro días antes de su examen y prográmelo en su calendario.

¿Cómo lo preparo? **Cuatro días antes del examen.** Sepa exactamente qué material cubrirá el examen. Después imagine que podría llevar al examen una hoja de $8\frac{1}{2}'' \times 11''$. ¿Qué escribiría en esa hoja? Revise cada sección (y sus notas retrabajadas) para identificar las reglas y definiciones clave para incluir en su hoja de estudio. Mantenga junto a usted esta hoja todo el tiempo hasta el examen y revísela siempre que pueda.

Tres días antes del examen. Revise sus notas retrabajadas y encuentre los ejemplos que le haya dado su instructor en clase. Añada cualquier ejemplo que se le haya pasado a su hoja y continúe revisándola siempre que tenga tiempo.

Dos días antes del examen. Use un examen de capítulo en su libro de texto o haga su propio examen de práctica escogiendo una muestra de problemas de su texto o varias notas retrabajadas.

Un día antes del examen. Consiga ayuda de su instructor en horas de trabajo, en caso de ser necesaria, con los problemas del día anterior, de un profesor en el centro independiente de asesoría de la universidad o de algún compañero. Practique su ensayo de examen de nuevo sin libros o notas. Regrese a cualquier problema que no le haya salido. Descanse bien la noche anterior a su examen.

Día del examen. Repase su hoja de estudio si tiene tiempo. Enfóquese en qué tan bien se ha preparado y relájese lo más posible. Cuando presente su examen haga los problemas de los que esté seguro primero. Sáltese los problemas que no entienda de inmediato y regrese a ellos más tarde. Esté consciente del tiempo durante el examen para que no gaste demasiado tiempo en un solo problema.

TAREA

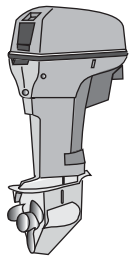
1. Cuatro días antes de su examen prepare su hoja de estudio.
2. Tres días antes de su examen revise todos los ejemplos en sus notas retrabajadas.
3. Dos días antes de su examen haga un examen de práctica escrito y dese un tiempo. Luego compruebe sus respuestas.
4. El día antes del examen corrija los problemas que haya hecho incorrectamente. Use para ayudarse su libro de texto, notas, compañeros, tutor o instructor. Revise todos sus problemas de práctica hasta que pueda hacerlos sin ayuda alguna. Junte todos los materiales que pudiera necesitar en su examen y descanse bien.
5. El día del examen llegue a clase unos minutos más temprano. Examine su hoja de estudio si tiene tiempo. Relájese lo más posible a sabiendas de que se ha preparado bien.

Las razones y proporciones se usan para comparar cantidades. También se usan para convertir una unidad de medida en otra.

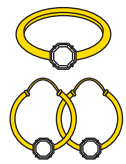
6.1 Razones

• Razones • Tasas • Tasas unitarias • Costos unitarios

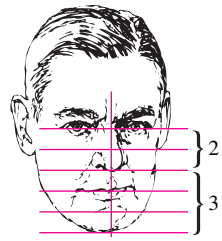
El concepto de *razón* se presenta a menudo en situaciones de la vida real.



Para preparar combustible para un motor marino fuera de borda, la gasolina se debe mezclar con aceite en razón de 50 a 1.



Para hacer joyería de 14 quilates, el oro se combina con otros metales en razón de 14 a 10.



En este dibujo la distancia ojos-nariz y la distancia nariz-mentón se dibujan usando una razón de 2 a 3.

En esta sección demostraremos cómo las razones y las tasas se usan para expresar relaciones entre dos cantidades.

Razones

Las razones nos dan una forma de comparar cantidades numéricas.

Razones

Una **razón** es el cociente de dos números o el cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades.

Hay tres formas de escribir una razón: como una fracción, como dos números separados por la palabra *a,* o como dos números separados por dos puntos. Por ejemplo, las razones descritas en los ejemplos de arriba se pueden escribir de tres maneras.

$$\frac{50}{1}, \qquad 14 \text{ a } 10 \qquad \text{y} \qquad 2:3$$

- La fracción $\frac{50}{1}$ se lee como "la razón de 50 a 1".
- 14 a 10 se lee como "la razón de 14 a 10".
- 2:3 se lee como "la razón de 2 a 3".

Autoevaluación 1

Exprese cada razón como una fracción en su mínima expresión:

a. la razón de 9 a 12

b. 3.2:16

EJEMPLO 1 Exprese cada razón como una fracción en su mínima expresión. **a.** la razón de 25 a 10 y **b.** la razón de 0.3 a 1.2.

Solución

a. Para escribir la frase "la razón de 25 a 10" en forma fraccionaria escribimos 25 como el numerador y 10 como el denominador. Luego simplificamos la fracción.

$$\frac{25}{10} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot 5}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$$ Factorice 25 como 5 · 5 y 10 como 2 · 5. Luego cancele el factor común 5.

$$= \frac{5}{2}$$

La razón 25 a 10 se puede escribir como fracción $\frac{25}{10}$, que se simplifica a $\frac{5}{2}$. Como las fracciones $\frac{25}{10}$ y $\frac{5}{2}$ representan números iguales, son **razones iguales**.

b. La razón 0.3 a 1.2 se puede escribir como la fracción $\frac{0.3}{1.2}$. Para escribir esto como una razón de números enteros necesitamos eliminar los decimales. Podemos hacerlo multiplicando el numerador y el denominador por 10.

$$\frac{0.3}{1.2} = \frac{0.3 \cdot \mathbf{10}}{1.2 \cdot \mathbf{10}}$$

$$= \frac{3}{12}$$ Haga las multiplicaciones: 0.3 · 10 = 3 y 1.2 · 10 = 12.

$$= \frac{1}{4}$$ Simplifique la fracción: $\frac{3}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 1}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} = \frac{1}{4}$.

Respuesta **a.** $\frac{3}{4}$, **b.** $\frac{1}{5}$

EJEMPLO 2 Equipaje de mano.

Las aerolíneas permiten a los pasajeros llevar una pieza de equipaje sólo si cabe en el espacio mostrado en la figura 6.1. ¿Cuál es la razón del largo del espacio a su ancho?

Solución Como la longitud del espacio del equipaje de mano es 24 pulgadas y su ancho es 10 pulgadas la razón de la longitud al ancho es $\frac{24 \text{ pulgadas}}{10 \text{ pulgadas}}$. Los factores y unidades comunes deben cancelarse.

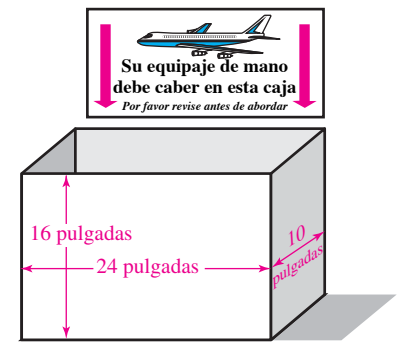


FIGURA 6.1

$$\frac{24 \text{ pulgadas}}{10 \text{ pulgadas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 12 \cancel{\text{ pulgadas}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cancel{\text{ pulgadas}}}$$ Cancele el factor común 2 y cancele las unidades comunes de pulgadas

$$= \frac{12}{5}$$

La razón longitud a ancho del espacio de equipaje de mano es $\frac{12}{5}$.

Respuesta $\frac{2}{3}$

Autoevaluación 2

¿Cuál es la razón de la altura a la longitud del espacio de equipaje de mano de la figura 6 .1?

EJEMPLO 3

Exprese la frase *12 onzas a 1 libra* como una razón en su mínima expresión.

Solución Recuerde que una razón es una comparación de dos cantidades con las mismas unidades. Como hay 16 onzas en una libra, la frase *12 onzas a 1 libra* se puede expresar como la razón $\frac{12 \text{ onzas}}{16 \text{ onzas}}$, que se simplifica a $\frac{3}{4}$.

Autoevaluación 3

Exprese la frase *2 pies a 1 yarda* como una razón. (*Sugerencia:* 3 pies = 1 yarda.)

Respuesta $\frac{2}{3}$

PARA PENSAR A DETALLE — Razón estudiante a instructor

"Para los estudiantes recién ingresados a la universidad, una atmósfera más personal en el salón de clase puede facilitar su adaptación. Es menos probable que se sientan como un número, sentimiento que a veces impacta en las calificaciones de los estudiantes del primer semestre."

Tomado *de La importancia del tamaño de la clase,* de Stephen Pemberton

Los datos de abajo provienen de un estudio a nivel nacional sobre los programas de matemáticas en universidades de dos años. Determine qué curso tiene la menor razón estudiante a instructor. Suponga que hay un instructor por sección.

	Matemáticas básicas	Álgebra elemental	Álgebra intermedia
Estudiantes matriculados	119 350	268 152	243 828
Número de secciones	5425	11 173	9378

Fuente: Conference Board of the Mathematical Science, Encuesta 2000 del CBMS sobre programas de estudiantes universitarios.

Tasas

Cuando se comparan dos cantidades de tipos distintos a la comparación la llamamos **tasa** y se puede escribir como fracción. Por ejemplo, en la etiqueta de la lata de pintura de la figura 6.2 se necesita un cuarto de pintura por cada 200 pies cuadrados que se quieran pintar. Si se escribe esto como una tasa, tenemos

$$\frac{1 \text{ cuadrado}}{200 \text{ pies cuadrados}}$$

Léase como "1 cuarto por cada 200 pies cuadrados".

Cuando se escriba una tasa siempre incluya las unidades.

Manténgase alejado de los niños
Evítese el contacto con los ojos y la piel
ESMALTE SEMIMATE DE LÁTEX
Seca en una hora
COBERTURA: un cuarto
cubre 200 pies cuadrados

FIGURA 6.2

Tasas

Una **tasa** es un cociente de dos cantidades con distintas unidades.

Autoevaluación 4

El expediente de crecimiento para una planta de flor es de 12 pies en 14 días. Encuentre la tasa de crecimiento en este periodo.

Respuesta $\frac{6 \text{ pies}}{7 \text{ días}}$

EJEMPLO 4 **Nevada.** De acuerdo con el *Libro de récords mundiales Guinness,* en un periodo de 24 horas en 1963 cayeron un total de 78 pulgadas de nieve en Mile 47 Camp, Cooper River Division, Arkansas. ¿Cuál fue la tasa de caída de nieve?

Solución Empezamos comparando la cantidad de nieve, 78 pulgadas, con el tiempo transcurrido, 24 horas. Después simplificamos la fracción.

$$\frac{78 \text{ pulgadas}}{24 \text{ horas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 13 \text{ pulgadas}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \text{ horas}}$$

Factorice 78 y 24. Luego divida entre el factor común 6.

La nieve cayó a una tasa de 13 pulgadas por cada 4 horas: $\frac{13 \text{ pulgadas}}{4 \text{ horas}}$.

Tasas unitarias

Una **tasa unitaria** es una tasa con denominador 1. Para ilustrar el concepto de tasa unitaria suponga que un conductor hace el viaje de 354 millas de Pittsburg a Indianápolis en 6 horas. Entonces la tasa del chofer (o más específicamente, tasa de velocidad) está dada por

$$\frac{354 \text{ millas}}{6 \text{ horas}} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 59 \text{ millas}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot 1 \text{ horas}} = \frac{59 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$$

Factorice 354 como 6 · 59 y cancele el factor común 6.

También podemos encontrar la tasa unitaria dividiendo 354 entre 6.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 6\overline{)354} \\ \underline{30} \\ 54 \\ \underline{54} \\ 0 \end{array}$$

La tasa unitaria $\frac{59 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$ se puede expresar en cualquiera de las siguientes formas:

$$59 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}, \quad 59 \text{ millas por hora}, \quad 59 \text{ millas/hora}, \quad \text{o} \quad 59 \text{ mph}$$

EJEMPLO 5 Un estudiante gana \$152 por trabajar 16 horas en una librería. Encuentre su tasa de pago por hora.

Solución Podemos escribir la tasa de pago como

$$\text{Tasa de pago} = \frac{\$152}{16 \text{ hr}}$$

Compare la cantidad de dinero ganada con el número de horas trabajadas.

Para encontrar la tasa de pago por 1 hora de trabajo, se divide 152 entre 16.

$$\begin{array}{r} 9.5 \\ 16\overline{)152.0} \\ \underline{144} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

Escriba un punto decimal y un 0 a la derecha de 2.

La tasa de pago unitaria es $\frac{\$9.50}{1 \text{ hora}}$, que se puede escribir como \$9.50 por hora.

Autoevaluación 5
Joan gana \$436 por una semana de 40 horas administrando una tienda de vestidos. Encuentre su tasa de pago por hora.

Respuesta \$10.90 por hora

EJEMPLO 6 **Consumo de energía.** En una casa se usaron 795 kilowatt-hora (kW/h) en un periodo de 30 días. Encuentre la tasa de consumo de energía en kilowatt-hora por día.

Solución Se puede escribir la tasa de consumo de energía como

$$\text{Tasa de consumo de energía} = \frac{795 \text{ kW/h}}{30 \text{ días}}$$

Para encontrar la tasa unitaria se divide 795 entre 30.

$$\text{Tasa unitaria de consumo de energía} = \frac{26.5 \text{ kW/h}}{1 \text{ día}}$$

La tasa de consumo de energía fue 26.5 kW/h por día.

Autoevaluación 6
Para calentar una casa por 30 días una caldera quemó 69 termos de gas natural. Encuentre la tasa de consumo de gas por día.

Respuesta 2.3 termos por día

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Cálculo del rendimiento de gasolina

Un hombre manejó de Houston a San Luis — un total de 775 millas. En el camino se detuvo tres veces a cargar gasolina llenando el tanque con 10.5, 11.3 y 8.75 galones. Empezó con medio tanque y terminó con medio tanque. Para encontrar cuántas millas por galón resultaron necesitamos comparar la distancia con el número total de galones de gasolina consumidos.

$$\frac{775 \text{ millas}}{(10.5 + 11.3 + 8.75) \text{ galones}}$$

Podemos simplificar esta tasa introduciendo estos números y oprimiendo estas teclas en una calculadora científica.

775 [÷] [(] 10.5 [+] 11.3 [+] 8.75 [)] [=]

25.368249

Hasta la centésima más cercana resultaron 25.37 mpg.

Costos unitarios

Si una tienda vende 5 libras de café por $18.75 a un consumidor podría interesarle saber cuál es el costo de café por libra. Cuando se encuentra el costo de 1 libra de café se encuentra el costo unitario. Para encontrar el *costo unitario* de un artículo se empieza comparando su costo con su cantidad.

$$\frac{\$18.75}{5 \text{ libras}}$$

Luego dividimos el costo por el número de artículos.

$$5\overline{)18.75}$$
$$3.75$$

El costo unitario del café es $3.75 por libra.

Autoevaluación 7
Un restaurante de comida rápida vende un refresco de cola de 12 onzas por 72¢ y uno de 16 onzas por 99¢. ¿Cuál es la mejor compra?

EJEMPLO 7 **Comparación de precios.** Las aceitunas se empacan en un frasco de 10 onzas que se vende en $2.49 o en un frasco de 6 onzas que se vende en $1.53. (Véase la figura 6 .3.) ¿Cuál es la mejor compra?

Solución Para encontrar la mejor compra se debe encontrar el costo unitario.

Frasco de 10 onzas:

$$\frac{\$2.49}{10 \text{ oz}} = \frac{249¢}{10 \text{ oz}}$$ Cambie $2.49 a 249 centavos.

$$= 24.9¢ \text{ por oz}$$ Divida 249 entre 10.

Frasco de 6 onzas:

$$\frac{\$1.53}{6 \text{ oz}} = \frac{153¢}{6 \text{ oz}}$$ Cambie $1.53 a 153 centavos.

$$= 25.5¢ \text{ por oz}$$ Realice la división.

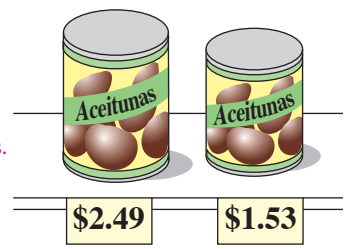


FIGURA 6.3

Respuesta el refresco de 12 onzas

Una onza por 24.9¢ es una mejor compra que una onza por 25.5¢. El costo unitario es menor cuando las aceitunas se empacan en frascos de 10 onzas por lo tanto es la mejor compra.

Sección 6.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Una _____ es un cociente de dos números o un cociente de dos cantidades con las mismas unidades.
2. A un cociente de dos cantidades con diferentes unidades se le llama _____.
3. Cuando se anuncia el precio de unos dulces en $1.75 por libra se nos está diciendo su _____unitario.
4. Una tasa _____ es una tasa en la que el denominador es 1.

CONCEPTOS

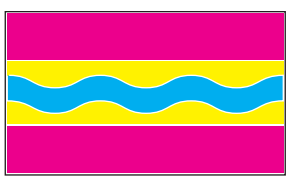
5. Para escribir la razón $\frac{15}{24}$ en su mínima expresión cancelamos todos los factores comunes en el numerador y el denominador. ¿Qué factor común tienen?
6. Complete la solución. Escriba la razón $\frac{14}{21}$ en su mínima expresión.

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{\square \cdot \square} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\square \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{\square}{\square}$$

7. Considere la razón $\frac{0.5}{0.6}$. ¿Por qué número se debe multiplicar numerador y denominador para hacer ésta una razón entre números enteros?
8. ¿Qué se tiene que hacer para escribir $\frac{15 \text{ pulgadas}}{22 \text{ pulgadas}}$ en su forma más simple?
9. Ya que una razón es una comparación entre cantidades con las mismas unidades, ¿se tendría que reescribir la razón $\frac{11 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}}$?
10. **a.** Considere la tasa $\frac{\$248}{16 \text{ horas}}$. ¿Cómo se puede encontrar la tasa unitaria ($ por hora)?
    b. Considere la tasa $\frac{\$7.95}{3 \text{ pares}}$. ¿Cómo se puede encontrar el costo unitario de un par de calcetines?

NOTACIÓN

11. Escriba la razón de la longitud de la bandera a su ancho usando una fracción, usando la palabra *a* y usando dos puntos.



12. La tasa $\frac{55 \text{ millas}}{1 \text{ h}}$ se puede expresar como
    - 55 _____ _____ (en tres palabras)
    - 55 _____ / _____ (en dos palabras)
    - 55 ___ ___ ___ (en tres letras)

PRÁCTICA *Escriba cada comparación como una razón en su forma más simple usando una fracción.*

13. 5 a 7
14. 3 a 5
15. 17 a 34
16. 19 a 38
17. 22:33
18. 14:21
19. 1.5:2.4
20. 0.9:0.6
21. 7 a 24.5
22. 0.65 a 0.15
23. 4 onzas a 12 onzas
24. 3 pulgadas a 15 pulgadas
25. 12 minutos a 1 hora
26. 8 onzas a una libra
27. 3 días a una semana
28. 4 pulgadas a 2 yardas
29. 18 meses a dos años
30. 8 pies a 4 yardas

Refiérase al presupuesto mensual dado en la ilustración. De cada razón en su mínima expresión.

31. Encuentre el total del presupuesto.
32. Encuentre la razón de la cantidad presupuestada para renta al presupuesto total.
33. Encuentre la razón de la cantidad presupuestada para alimentos al total del presupuesto.
34. Encuentre la cantidad presupuestada para el teléfono al presupuesto total.

Artículo	Cantidad
Renta	$800
Alimentos	$600
Gas y electricidad	$180
Teléfono	$100
Entretenimiento	$120

Refiérase a la lista de las deducciones de impuestos mostradas en la ilustración. De cada razón en su mínima expresión.

35. Encuentre la cantidad total de deducciones.

36. Encuentre la razón de la deducción de impuesto sobre bienes raíces al total de las deducciones.

37. Encuentre la razón de las contribuciones caritativas al total de las deducciones.

38. Encuentre la razón de la deducción de interés sobre hipoteca a la deducción sobre cuotas sindicales.

Artículo	Cantidad
Gastos médicos	$875
Impuestos sobre bienes raíces	$1250
Contribuciones caritativas	$1750
Interés sobre hipoteca	$4375
Cuotas sindicales	$500

Escriba cada tasa como fracción en su forma más simple.

39. 64 pies en 6 segundos.

40. 45 solicitudes por 18 aceptaciones.

41. 84 de 100 intentos.

42. 75 días por 20 galones de agua.

43. 3000 estudiantes sobre una carrera de 16 años.

44. 16 correctas comparadas con 34 erróneas.

45. 18 latidos cada 12 medidas.

46. 1.5 pulgadas como resultado de 30 turnos.

Escriba cada frase como una tasa unitaria.

47. 60 revoluciones en 5 minutos.

48. 14 viajes cada 2 meses.

49. 12 errores en 8 horas.

50. $50 000 pagados durante 10 años.

51. 245 regalos por 35 niños.

52. 108 acontecimientos en un periodo de 12 meses.

53. 4 000 000 de personas viviendo en 12 500 millas cuadradas.

54. 117.6 libras de fuerza (presión) sobre 8 pulgadas cuadradas.

Encuentre el costo unitario.

55. $3.50 por 50 pies.

56. 150 barriles cuestan $4950.

57. 65 onzas se venden en 78 centavos.

58. Cobraron $48 por 15 minutos.

59. Cuatro de nosotros donamos un total de $772.

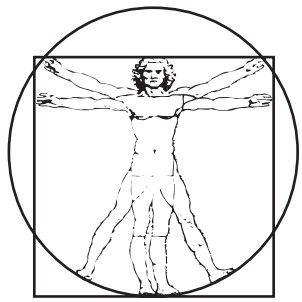
60. Por 7 docenas pagará $10.15.

61. $4 mil millones en un periodo de 5 meses.

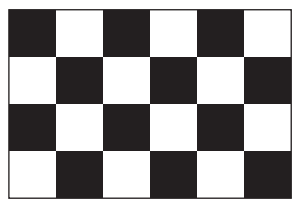
62. Con 7020 pesos se compran seis etiquetas.

APLICACIONES

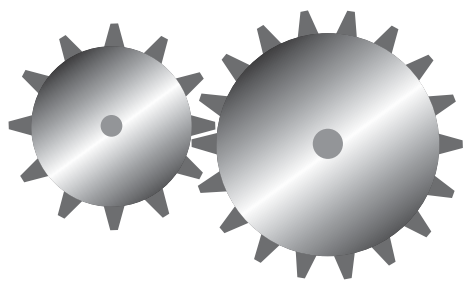
63. HISTORIA DEL ARTE Leonardo da Vinci dibujó dentro de un cuadrado la figura humana que se muestra. (Todos los lados de un cuadrado son de la misma longitud.) Encuentre la razón de la longitud de los brazos estirados a la altura del hombre.



64. BANDERAS La bandera con diseño de tablero de ajedrez se compone de cuadrados. (Todos los lados de un cuadrado son de la misma longitud.) ¿Cuál es la razón del ancho al largo de la bandera?



65. RAZONES DE ENGRANAJE Véase la ilustración. Encuentre la razón del numero de dientes del engrane mayor al número de dientes del engrane menor.



66. BANCARROTAS Después de declarar la bancarrota una compañía puede rembolsar a sus acreedores sólo 5¢ por dólar. Escriba esto como una razón en su mínima expresión.

67. COCINA Se muestra una receta de la revista *Easy Living*. Escriba la razón de azúcar a leche como una fracción. **No simplifique la razón**.

Nieve semiderretida de chocolate
(8 porciones)

Una vez congelado, este chocolate se puede cortar en cubos y almacenarse en bolsas selladas de plástico para un postre de improviso.

$\frac{1}{2}$ taza de polvo de cocoa holandés cernido.

$\frac{2}{3}$ taza de azúcar

$3\frac{1}{2}$ tazas de leche descremada

68. AUDICIÓN Determine de la gráfica la razón de pérdida auditiva en hombres en comparación con las mujeres.

Pérdida auditiva, por género

Fuente: National Academy on Aging

69. SOFTBALL Lisa Fernández encabezó el equipo femenil de softball de Estados Unidos que ganó la medalla de oro en los Juegos Olímpicos de 2004. Sus estadísticas de hits se muestran abajo. ¿Cuál fue su tasa de hits (H) a turnos al bat (TB) durante la competencia olímpica?

	BA	TB	H	R	2B	3B	HR	RBI
Fernández	.545	22	12	3	3	0	1	8

70. MECANOGRAFÍA Una secretaria mecanografió un documento con 330 palabras en 5 minutos. ¿Cuántas palabras por minuto mecanografió?

71. RCP Un paramédico realizó 125 compresiones por 50 respiraciones a un adulto sin pulso. ¿Qué tasa de compresiones a aspiraciones usó el paramédico?

72. VENTAS INTERNACIONALES Un sitio web determinó que tuvo 112 500 accesos en un mes. De los que visitaron el sitio, 4500 hicieron compras. ¿Cuántos no hicieron compras? Encuentre la razón de la tasa unitaria de curiosos/compradores para el sitio web ese mes.

73. QUEJAS CONTRA AEROLÍNEAS Una aerolínea tuvo 3.29 quejas por cada 1000 pasajeros. Escriba esta tasa como una fracción de números enteros.

74. UÑAS En promedio, las uñas crecen 0.02 pulgada por semana. Escriba esta tasa usando números enteros.

75. RELACIÓN ENTRE PROFESORES Y ALUMNOS En una universidad hay 125 profesores y 2000 estudiantes. Encuentre la razón de profesores a estudiantes. (A menudo se le llama a esto la razón profesor-estudiante, aunque las unidades sean diferentes.)

76. PARQUÍMETROS Un parquímetro requiere 25¢ por 20 minutos de estacionamiento. Encuentre el costo unitario.

77. COSTOS UNITARIOS Un conductor le echó 17 galones a su tanque con un costo de $32.13. Encuentre el costo unitario de la gasolina.

78. COSTOS UNITARIOS Una bolsa de semillas de planta de 50 libras cuesta $222.50. Encuentre el costo unitario de la semilla de planta.

79. COSTOS UNITARIOS Una lata de 12 onzas de jugo de frambuesa se vende en 84¢. Encuentre el costo unitario en centavos por onza.

80. COSTOS UNITARIOS Un paquete de 24 onzas de frijoles verdes se vende en $1.29. Encuentre el costo unitario en centavos por onza.

81. COMPARACIÓN DE PRECIOS Una lata de 6 onzas de jugo de china se vende en 89¢ y una de 8 onzas en $1.19. ¿Cuál es mejor compra?

82. COMPARACIÓN DE PRECIOS Una bolsa de 30 libras de fertilizante cuesta $12.25 y una de 80 libras cuesta $30.25. ¿Cuál es la mejor compra?

83. COMPARACIÓN DE PRECIOS Cierta marca de medicamento para resfriado y sinusitis se vende en cajas de 20 tabletas en $4.29 y en cajas de 50 tabletas en $9.59. ¿Cuál es la mejor compra?

84. COMPARACIÓN DE PRECIOS ¿Qué llanta de las mostradas es mejor compra?

85. COMPARACIÓN DE VELOCIDADES Un automóvil viaja 345 millas en 6 horas, y un camión viaja 376 en 6.2 horas. ¿Qué vehículo va más rápido?

86. LECTURA DE VELOCIDADES Un estudiante de séptimo grado leyó un libro de 54 páginas en 40 minutos. Otro leyó un libro de 80 páginas en 62 minutos. Si los libros eran igualmente difíciles, ¿qué estudiante leyó más rápido?

87. VACIADO DE TANQUES Un tanque de 11 880 galones se puede vaciar en 27 minutos. Encuentre la tasa de flujo en galones por minuto.

88. TASAS DE PAGO Ricardo trabajó 27 horas para ayudar a aislar una arena de jockey. Recibió $337.50 por su trabajo. Encuentre la tasa de pago por hora.

89. VIAJE EN AUTOMÓVIL El odómetro de un automóvil indica 34 746 al comienzo de un viaje. Cinco horas después indica 35 071. ¿Qué tan lejos ha llegado el automóvil? ¿Cuál es la tasa promedio de velocidad?

90. TASAS DE VELOCIDAD Un aeroplano viaja de Chicago a San Francisco, una distancia de 1883 millas en 3.5 horas. Encuentre la tasa de velocidad promedio del aeroplano.

91. MILLAJE DE GASOLINA Un automóvil viajó 1235 millas con 51.3 galones de gasolina y otro viajó 1456 con 55.78 galones. ¿Qué automóvil tuvo el mejor millaje de gasolina?

92. TASAS DE ELECTRICIDAD En una comunidad un recibo por 575 kilowatt-hora de electricidad es de $38.81. En una segunda comunidad un recibo por 831 kWh es de $58.10. ¿En qué comunidad es más barata la electricidad?

POR ESCRITO

93. ¿Son las mismas razones 3 a 1 que 1 a 3? Explique por qué sí o por qué no.

94. Dé tres ejemplos de razones (o tasas) que se haya encontrado la semana pasada.

95. ¿De qué forma los temas tratados en esta sección podrían hacerlo un mejor comprador?

96. ¿Qué es una tasa unitaria? Dé algunos ejemplos.

REPASO *Haga cada operación.*

97. $3.05 + 17.17 + 25.317$

98. $3.5\overline{)157.85}$

99. $13.2 + 25.07 \cdot 7.16$

100. $\frac{4}{3} - \frac{1}{4}$

6.2 Proporciones

- Proporciones
- Medios y extremos de una proporción
- Resolución de proporciones
- Escritura de proporciones para resolver problemas

Como cualquier herramienta, una escalera puede ser peligrosa si no se usa apropiadamente. Un panfleto de seguridad afirma que "cuando se usa una escalera de extensión, use la *regla 4 a 1* —Por cada 4 pies de altura de la escalera coloque las patas de la escalera a 1 pie de la base de la pared". La regla 4 a 1 para las escaleras se puede expresar usando una razón.

$$\frac{4 \text{ pies}}{1 \text{ pie}} = \frac{4 \cancel{\text{pies}}^{1}}{1 \cancel{\text{pie}}_{1}} = \frac{4}{1}$$

En la figura 6.4 se usó la regla 4 a 1 para colocar apropiadamente las patas de la escalera, a 3 pies de la base de una pared de 12 pies de alto. Se puede escribir una razón comparando la altura de la escalera con su distancia de la pared.

$$\frac{12 \text{ pies}}{3 \text{ pies}} = \frac{12 \cancel{\text{pies}}^{1}}{3 \cancel{\text{pies}}_{1}} = \frac{12}{3}$$

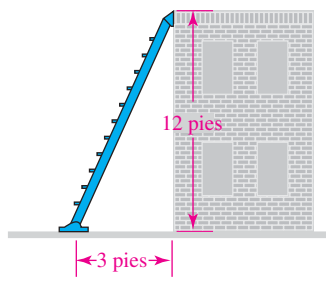


FIGURA 6.4

Como está razón satisface la regla 4 a 1 las dos razones $\frac{4}{1}$ y $\frac{12}{3}$ tienen que ser iguales. Por tanto, tenemos

$$\frac{4}{1} = \frac{12}{3}$$

Las ecuaciones que muestran que dos razones son iguales se llaman *proporciones*. En esta sección, introducimos el concepto de proporción y usamos las proporciones para resolver muchos tipos distintos de problemas.

Proporciones

Proporción

Una **proporción** es una aseveración de la igualdad de dos razones (o tasas).

Algunos ejemplos de proporciones son

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \text{y} \quad \frac{3 \text{ camareras}}{7 \text{ tablas}} = \frac{9 \text{ camareras}}{21 \text{ tablas}}$$

- La proporción $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ se puede leer como "1 son a 2 como 3 son a 6."
- La proporción $\frac{3 \text{ camareras}}{7 \text{ tablas}} = \frac{9 \text{ camareras}}{21 \text{ tablas}}$ mesas se puede leer como "3 camareras son a 7 mesas como 9 camareras son a 21 mesas".

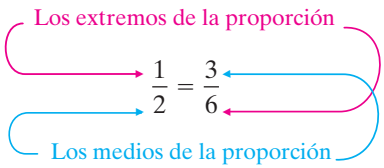
Los términos de la proporción $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ se organizan como sigue:

Primer término $\longrightarrow$ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ $\longleftarrow$ Tercer término
Segundo término $\longrightarrow$ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ $\longleftarrow$ Cuarto término

Medios y extremos de una proporción

En cualquier proporción el primero y cuarto términos se llaman **extremos**. El segundo y tercer términos se llaman **medios.**

En la proporción $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, 1 y 6 son los **extremos** y 2 y 3 son los **medios.**



En esta proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$1 \cdot 6 = 6 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 3 = 6$

Este ejemplo ilustra la propiedad fundamental de las proporciones.

Propiedad fundamental de las proporciones

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Como un ejemplo más, consideramos la proporción $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.

- El producto de los extremos es $5 \cdot 12 = 60$.
- El producto de los medios es $6 \cdot 10 = 60$.

Vemos, de nuevo, que en una proporción el producto de los extremos (60) es igual al producto de los medios (60). Para determinar si una ecuación es una proporción se puede comprobar que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Autoevaluación 1
Determine si la ecuación es una proporción:

$$\frac{6}{13} = \frac{18}{39}$$

Respuesta sí

EJEMPLO 1

Determine si cada ecuación es una proporción. **a.** $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$ y **b.** $\frac{8}{3} = \frac{13}{5}$.

Solución En cada caso comprobamos para ver si el producto de los extremos sea igual al producto de los medios.

a. El producto de los extremos es $3 \cdot 21 = 63$. El producto de los medios es $7 \cdot 9 = 63$.

$$3 \cdot 21 = 63 \qquad 7 \cdot 9 = 63$$
$$\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$$

Como los productos son iguales la ecuación es una proporción: $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$. El producto de los extremos y el producto de los medios también se conocen como **productos cruzados**.

b. El producto de los extremos es $8 \cdot 5 = 40$. El producto de los medios es $3 \cdot 13 = 39$.

$$8 \cdot 5 = 40 \qquad 3 \cdot 13 = 39$$
$$\frac{8}{3} = \frac{13}{5}$$

Como los productos cruzados no son iguales la ecuación no es una proporción: $\frac{8}{3} \neq \frac{13}{5}$.

Cuando dos pares de números como 2, 3 y 8, 12 forman una proporción, decimos que son **proporcionales.** Para mostrar que 2, 3 y 8, 12 son proporcionales, comprobamos que la ecuación

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

sea una proporción. Para hacerlo encontramos el producto de los extremos y el producto de los medios.

$$2 \cdot 12 = 24 \qquad 3 \cdot 8 = 24$$

Como los productos cruzados son iguales la ecuación es una proporción y los números son proporcionales.

Autoevaluación 2
Determine si 6, 11 y 54, 99 son proporcionales.

Respuesta sí

EJEMPLO 2

Determine si 3, 7 y 36, 91 son proporcionales.

Solución Comprobamos que $\frac{3}{7} = \frac{36}{91}$ sea una proporción encontrando dos productos.

$3 \cdot 91 = 273$ Este es el producto de los extremos.

$7 \cdot 36 = 252$ Este es el producto de los medios.

Como los productos cruzados no son iguales los números no son proporcionales.

Resolución de proporciones

Suponga que conocemos tres términos en la siguiente proporción.

$$\frac{?}{5} = \frac{24}{20}$$

Para encontrar el término que falta lo representamos con la letra x, multiplicamos los extremos y multiplicamos los medios, los igualamos y resolvemos para x.

$$\frac{x}{5} = \frac{24}{20}$$

$x \cdot 20 = 5 \cdot 24$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$x \cdot 20 = 120$ Haga la multiplicación: $5 \cdot 24 = 120$.

$\frac{x \cdot 20}{\mathbf{20}} = \frac{120}{\mathbf{20}}$ Para deshacer la multiplicación por 20 divida ambos lados entre 20.

$x = 6$ Haga las divisiones.

El primer término es 6. Para comprobar este resultado sustituimos 6 en x en $\frac{x}{5} = \frac{24}{20}$ encontramos los productos cruzados.

Comprobación:

$\frac{6}{5} \stackrel{?}{=} \frac{24}{20}$ $\quad 6 \cdot 20 = \mathbf{120}$

$5 \cdot 24 = \mathbf{120}$

Como los productos cruzados son iguales, x es 6.

EJEMPLO 3

Resuelva la proporción $\frac{12}{18} = \frac{3}{x}$ para x.

Solución

$$\frac{12}{18} = \frac{3}{x}$$

$12 \cdot x = 18 \cdot 3$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$12 \cdot x = 54$ Multiplique: $18 \cdot 3 = 54$.

$\frac{12 \cdot x}{\mathbf{12}} = \frac{54}{\mathbf{12}}$ Para deshacer la multiplicación por 12 divida ambos lados entre 12.

$x = \frac{9}{2}$ Simplifique: $\frac{54}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 9}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{6}}} = \frac{9}{2}$.

Por tanto, x es $\frac{9}{2}$. Compruebe este resultado en la proporción.

Autoevaluación 3

Resuelva la proporción: $\frac{15}{x} = \frac{20}{32}$ para x. Compruebe el resultado.

Respuesta 24

EJEMPLO 4

Encuentre el tercer término en la proporción $\frac{3.5}{7.2} = \frac{x}{15.84}$.

Solución

$$\frac{3.5}{7.2} = \frac{x}{15.84}$$

$3.5(15.84) = 7.2 \cdot x$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$55.44 = 7.2 \cdot x$ Multiplique $3.5(15.84) = 55.44$.

$\frac{55.44}{\mathbf{7.2}} = \frac{7.2 \cdot x}{\mathbf{7.2}}$ Para deshacer la multiplicación por 7.2 divida ambos lados entre 7.2.

$7.7 = x$ Haga las divisiones.

Por tanto, x es 7.7. Compruebe el resultado en la proporción.

Autoevaluación 4

Encuentre el segundo término de la proporción $\frac{6.7}{x} = \frac{33.5}{38}$.

Respuesta 7.6

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Resolución de proporciones con una calculadora

Para resolver la proporción del ejemplo 4 con una calculadora se puede proceder como sigue.

$$\frac{3.5}{7.2} = \frac{x}{15.84}$$

$$\frac{3.5(15.84)}{7.2} = x$$ Multiplique ambos lados para despejar x.

Se puede encontrar x introduciendo estos números y oprimiendo estas teclas en una calculadora científica.

3.5 [×] 15.84 [÷] 7.2 [=] 7.7

Por tanto, $x = 7.7$.

Escritura de proporciones para resolver problemas

Se pueden utilizar proporciones para resolver muchos problemas del mundo real. Si se nos da una razón (o una tasa) comparando dos cantidades, las palabras del problema se pueden traducir a una proporción y se puede resolver para encontrar la incógnita.

Autoevaluación 5
Si 9 boletos para un concierto cuestan $112.50, encuentre el costo de 15 boletos.

EJEMPLO 5 **Compras de víveres.** Si 5 manzanas cuestan $1.15, encuentre el costo de 16 manzanas.

Solución Decimos que c representa el costo de 16 manzanas. Si comparamos la cantidad de manzanas con su precio, sabremos que las dos cifras son iguales.

5 manzanas es a $1.15 como 16 manzanas es a $$c$.

$$\begin{matrix} \text{5 manzanas} \rightarrow \\ \text{Costo de 5 manzanas} \rightarrow \end{matrix} \frac{5}{1.15} = \frac{16}{c} \begin{matrix} \leftarrow \text{16 manzanas} \\ \leftarrow \text{Costo de 16 manzanas} \end{matrix}$$

Para encontrar el costo de 16 manzanas resolvemos la proporción para c.

$5 \cdot c = 1.15(16)$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$5 \cdot c = 18.4$ Haga la multiplicación: $1.15(16) = 18.4$.

$\frac{5 \cdot c}{\mathbf{5}} = \frac{18.4}{\mathbf{5}}$ Para deshacer la multiplicación por 5 divida ambos lados entre 5.

$c = 3.68$ Haga las divisiones.

Dieciséis manzanas costarán $3.68. Para comprobar el resultado sustituimos 3.68 en c en la proporción y encontramos los productos cruzados.

Comprobación:

$$\frac{5}{1.15} \stackrel{?}{=} \frac{16}{3.68} \qquad \begin{matrix} 5 \cdot 3.68 = \mathbf{18.4} \\ 1.15 \cdot 16 = \mathbf{18.4} \end{matrix}$$

Los productos cruzados son iguales. El resultado 3.68 es correcto.

Respuesta $187.50

En el ejemplo 5 podríamos haber comparado el costo de las manzanas al número de manzanas: \$1.15 es a 5 manzanas como \$$c$ es a 16 manzanas. Esto nos habría llevado a la proporción

$$\begin{array}{l}\text{Costo de 5 manzanas} \rightarrow \\ \text{5 manzanas} \rightarrow\end{array} \frac{1.15}{5} = \frac{c}{16} \begin{array}{l}\leftarrow \text{Costo de 16 manzanas} \\ \leftarrow \text{16 manzanas}\end{array}$$

Si resolvemos esta proporción para c obtenemos el mismo resultado: $c = 3.68$.

COMENTARIO Cuando resolvemos problemas usando proporciones asegúrese que las unidades de los numeradores sean las mismas y las unidades de los denominadores sean las mismas. En el ejemplo 5 sería incorrecto escribir

$$\begin{array}{l}\text{Costo de 5 manzanas} \rightarrow \\ \text{5 manzanas} \rightarrow\end{array} \frac{1.15}{5} = \frac{16}{c} \begin{array}{l}\leftarrow \text{16 manzanas} \\ \leftarrow \text{Costo de 16 manzanas}\end{array}$$

EJEMPLO 6 **Dibujos a escala.** Una **escala** es una razón (o tasa) que compara el tamaño de un modelo, dibujo o mapa con el tamaño de un objeto real. El aeroplano de la figura 6.5 se dibuja usando una escala de 1 pulgada: 6 pies. Esto significa que una pulgada en el dibujo es en realidad 6 pies en el aeroplano. La distancia de punta a punta de las alas (envergadura) en el dibujo es de 5 pulgadas. ¿Cuál es la envergadura real del avión?

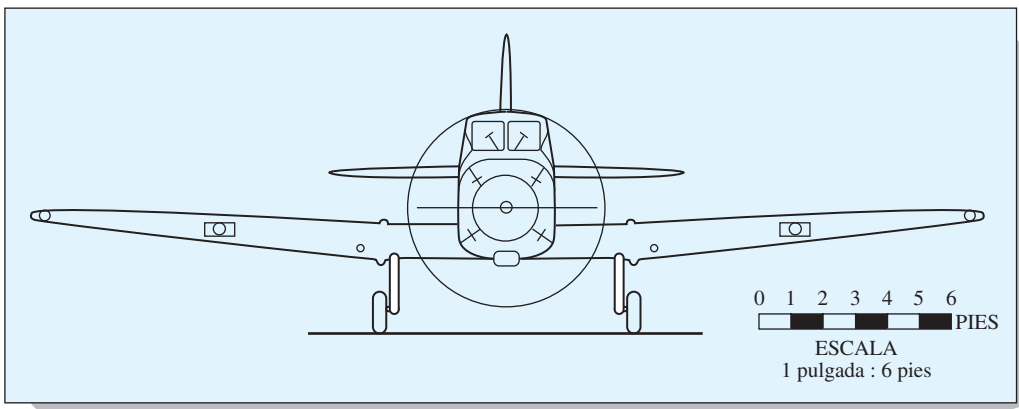


FIGURA 6.5

Solución Hagamos que w represente la envergadura real del avión. Ya que 1 pulgada corresponde a 6 pies como 5 pulgadas corresponden a w pies, podemos escribir la siguiente proporción.

$$\begin{array}{l}\text{Medida en el dibujo} \rightarrow \\ \text{Medida en el avión} \rightarrow\end{array} \frac{1}{6} = \frac{5}{w} \begin{array}{l}\leftarrow \text{Medida en el dibujo} \\ \leftarrow \text{Medida en el avión}\end{array}$$

$1 \cdot w = 6 \cdot 5$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$w = 30$ Se realizan las multiplicaciones.

La envergadura real del avión es 30 pies. Compruebe el resultado encontrando los productos cruzados.

EJEMPLO 7 **Horneado.** Una receta para un pastel de frutas requiere de $1\frac{1}{4}$ tazas de azúcar por cada $2\frac{1}{2}$ tazas de harina. ¿Cuántas tazas de harina se necesitan si el pastelero quiere usar 3 tazas de azúcar?

Autoevaluación 7
¿Cuántas tazas de harina se necesitarán para hacer varios pasteles de ruibarbo que requieren un total de 25 tazas de harina?

Solución Hagamos que f represente el número de tazas de harina que se mezclan con el azúcar. Las razones de las tazas de harina a las tazas de azúcar son iguales. Tenemos que $1\frac{1}{4}$ tazas de azúcar es a $2\frac{1}{2}$ tazas de harina como 3 tazas de azúcar es a f tazas de harina. Podemos escribir la proporción.

$1\frac{1}{4}$ tazas de azúcar $\rightarrow$ $\dfrac{1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{f}$ $\leftarrow$ 3 tazas de azúcar

$2\frac{1}{2}$ tazas de harina $\rightarrow$ $\leftarrow$ f tazas de harina

$$\frac{1.25}{2.5} = \frac{3}{f}$$ Cambie la fracciones a decimales $1\frac{1}{4} = 1.25$ y $2\frac{1}{2} = 2.5$.

$$1.25 \cdot f = 2.5 \cdot 3$$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$1.25 \cdot f = 7.5$$ Haga la multiplicación: $2.5 \cdot 3 = 7.5$.

$$\frac{1.25 \cdot f}{\mathbf{1.25}} = \frac{7.5}{\mathbf{1.25}}$$ Para deshacer la multiplicación por 1.25 divida ambos lados entre 1.25.

$$f = 6$$ Haga las divisiones.

Respuesta 12.5 tazas

El pastelero debe usar 6 tazas de harina.

Autoevaluación 8
¿Cuántas partes defectuosas se esperarían de una producción de 3000 partes?

EJEMPLO 8 **Manufactura.** En un proceso de manufactura, 15 de 90 partes resultaron defectuosas. ¿Cuántas partes defectuosas se esperarían en una operación de 120 partes?

Solución Hagamos que d represente el número esperado de partes defectuosas. En cada operación, la razón de partes defectuosas al número total de partes debiera ser el mismo: 15 partes defectuosas es a 90 como d partes defectuosas es a 120.

15 partes defectuosas $\rightarrow$ $\dfrac{15}{90} = \dfrac{d}{120}$ $\leftarrow$ d partes defectuosas

90 partes $\rightarrow$ $\leftarrow$ 120 partes

$$15 \cdot 120 = 90 \cdot d$$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$1800 = 90 \cdot d$$ Haga la multiplicación: $15 \cdot 120 = 1800$.

$$\frac{1800}{\mathbf{90}} = \frac{90 \cdot d}{\mathbf{90}}$$ Para deshacer la multiplicación por 90 divida ambos lados entre 90.

$$20 = d$$ Divida: $\frac{1800}{90} = 20$.

Respuesta 500

El número esperado de partes defectuosas es 20.

Sección 6.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Una _____ es una afirmación de que dos razones o tasas son iguales.
2. En $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, a los términos 1 y 10 se les llama los _____ de la proporción y a los _____ 2 y 5 se les llama los _____ de la proporción.
3. El producto de los extremos y el producto de los medios de una proporción también se le conoce como productos _____.
4. Cuando dos pares de números forman una proporción, decimos que los números son _____.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

5. La ecuación $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ será una proporción si el producto $\square \cdot 10$ es igual al producto $\square \cdot 4$.

6. $\square \cdot 10 = \square$ $\quad$ $2 \cdot \square = \square$

$$\frac{9}{2} = \frac{45}{10}$$

7. Escriba cada afirmación como una proporción.

a. 5 es a 8 como 15 es a 24.

b. 3 ayudantes de maestro es a 25 niños como 12 ayudantes de maestro es a 100 niños.

8. Considere la proporción $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$. ¿Cuáles son los dos productos cruzados?

9. Por cada 15 pies de reja se usan 4 postes de soporte. ¿Cuántos postes de soporte se necesitarán para 300 pies de reja? ¿Cuál de las siguientes proporciones se podría usar para resolver este problema?

i. $\frac{15}{4} = \frac{300}{x}$ $\quad$ **ii.** $\frac{15}{4} = \frac{x}{300}$

iii. $\frac{4}{15} = \frac{300}{x}$ $\quad$ **iv.** $\frac{4}{15} = \frac{x}{300}$

10. Escriba un problema que se pueda resolver usando la siguiente proporción.

$$\frac{\text{Onzas de nueces} \rightarrow 4}{\text{Calorías} \rightarrow 639} = \frac{10}{x} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Onzas de nueces} \\ \leftarrow \text{Calorías} \end{matrix}$$

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

11. Resuelva para x: $\frac{12}{18} = \frac{x}{24}$.

$$12 \cdot 24 = \square$$
$$\square = 18 \cdot x$$
$$\frac{288}{\square} = \frac{18 \cdot x}{\square}$$
$$16 = x$$

12. Resuelva para x: $\frac{14}{x} = \frac{49}{17.5}$.

$$14 \cdot \square = x \cdot 49$$
$$\square = x \cdot 49$$
$$\frac{245}{\square} = \frac{x \cdot 49}{\square}$$
$$5 = x$$

PRÁCTICA *Determine si cada afirmación es una proporción.*

13. $\frac{9}{7} = \frac{81}{70}$ $\quad$ **14.** $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$

15. $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ $\quad$ **16.** $\frac{13}{19} = \frac{65}{95}$

17. $\frac{9}{19} = \frac{38}{80}$ $\quad$ **18.** $\frac{40}{29} = \frac{29}{22}$

19. $\frac{10.4}{3.6} = \frac{41.6}{14.4}$ $\quad$ **20.** $\frac{13.23}{3.45} = \frac{39.96}{11.35}$

21. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{16}}$ $\quad$ **22.** $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{27}}$

23. $\frac{4\frac{1}{6}}{\frac{12}{7}} = \frac{2\frac{3}{16}}{\frac{9}{10}}$ $\quad$ **24.** $\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{3\frac{3}{4}}{\frac{9}{10}}$

Resuelva para la variable en cada proporción. **Compruebe cada resultado.**

25. $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$ $\quad$ **26.** $\frac{3}{6} = \frac{x}{8}$

27. $\frac{5}{10} = \frac{3}{c}$ $\quad$ **28.** $\frac{7}{14} = \frac{2}{x}$

29. $\frac{6}{x} = \frac{8}{4}$ $\quad$ **30.** $\frac{4}{x} = \frac{2}{8}$

31. $\frac{x}{8} = \frac{9}{2}$ $\quad$ **32.** $\frac{x}{2} = \frac{18}{6}$

33. $\frac{x}{2.5} = \frac{3.7}{9.25}$ $\quad$ **34.** $\frac{8.5}{x} = \frac{4.25}{1.7}$

35. $\frac{-0.8}{2} = \frac{x}{5}$ $\quad$ **36.** $\frac{0.9}{0.3} = \frac{-6}{x}$

37. $\frac{-0.4}{1.2} = \frac{-6}{x}$ $\quad$ **38.** $\frac{-5}{x} = \frac{-2}{4.4}$

39. $\frac{x}{5.2} = \frac{-4.65}{7.8}$ $\quad$ **40.** $\frac{-8.6}{2.4} = \frac{x}{6}$

41. $\frac{4000}{x} = \frac{3.2}{2.8}$ $\quad$ **42.** $\frac{0.4}{1.6} = \frac{96.7}{x}$

43. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{x}{2\frac{1}{4}}$ $\quad$ **44.** $\frac{x}{4\frac{1}{10}} = \frac{3\frac{3}{4}}{1\frac{7}{8}}$

APLICACIONES *Establezca y resuelva una proporción.*

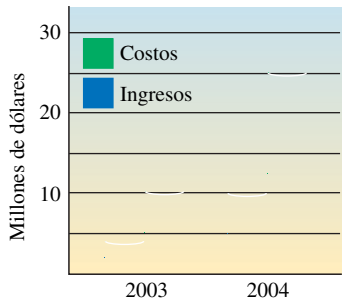
45. ALMUERZOS ESCOLARES Una gerente de una cafetería de una escuela pide 750 tazas para postre. ¿Cuál será el costo de la orden si las compra al mayoreo a 6 tazas por $1.75?

46. COMPRA DE ROPA Como parte de una liquidación de primavera, una tienda para caballeros pone camisas de vestir a la venta a 2 por $25.98. ¿Cuánto pagará un hombre de negocios si compra cinco camisas?

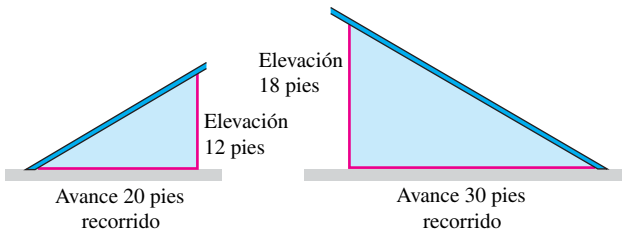
47. JARDINERÍA Tres paquetes de semilla para jardín se venden en 98¢. La líder de unas niñas exploradoras necesita comprar tres docenas de paquetes. ¿Cuánto le costarán?

48. COCINA Una receta para salsa de espagueti requiere 4 frascos de 16 onzas de salsa de tomate para hacer 2 galones de salsa. ¿Cuántos frascos de tomate se necesitan para hacer 10 galones de salsa?

49. DESEMPEÑO DE NEGOCIOS La gráfica de barras siguiente muestra los costos anuales y los ingresos de un negocio. ¿Cómo se comparan las razones de los costos a los ingresos para los años 2003 y 2004?



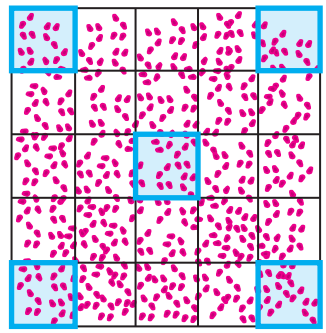
50. RAMPAS Escriba la razón de la elevación al recorrido para cada una de las rampas mostradas. Iguale las razones. ¿Resulta ser una proporción? ¿Es más inclinada una rampa que la otra?



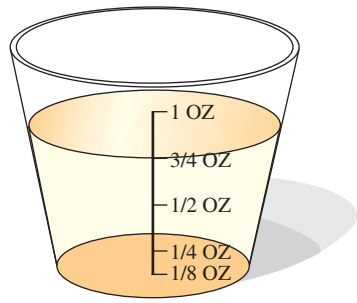
51. MEZCLA DE PERFUMES Un perfume se mezcla a razón de 3 gotas de esencia pura a 7 gotas de alcohol. ¿Cuántas gotas de esencia pura deben mezclarse con 56 gotas de alcohol?

52. PREPARACIÓN DE COLONIA Una colonia se puede hacer mezclando 2 gotas de esencia pura con 5 gotas de agua destilada. ¿Cuánta agua debe usarse con 15 gotas de esencia pura?

53. TRABAJO DE LABORATORIO En una cuenta de glóbulos rojos se coloca una gota de sangre diluida del paciente en una cuadrícula como la que se muestra. En lugar de contar todos y cada uno de los glóbulos rojos en la cuadrícula de 25 cuadrados, un técnico cuenta sólo el número de glóbulos en los cuadrados resaltados. Luego él o ella usan una proporción para estimar el número total de glóbulos rojos. Si hay 195 glóbulos rojos en los cuadrados azules, aproximadamente ¿cuántos glóbulos rojos hay en la cuadrícula completa?



54. DOSIFICACIONES Se muestra la dosificación apropiada de cierto medicamento para un niño que pesa 30 libras. A esta tasa, ¿cuál sería la dosificación para un niño que pesa 45 libras?



55. PREPARACIÓN DE GALLETAS Una receta para galletas con pedacitos de chocolate requiere $1\frac{1}{4}$ tazas de harina y 1 taza de azúcar. Con esa receta se pueden hacer $3\frac{1}{2}$ docenas de galletas. ¿Cuántas tazas de harina se necesitan para hacer 12 docenas de galletas?

56. PREPARACIÓN DE BIZCOCHOS Una receta para bizcochos requiere 4 huevos y $1\frac{1}{2}$ tazas de harina. Si con esa receta se preparan 15 bizcochos, ¿cuántas tazas de harina se necesitan para hacer 130 bizcochos?

57. VELOCIDAD DE COMPUTADORAS Al usar *Matemática 3.0* una computadora Dell Dimension XPS R350 (Pentium II) puede hacer un conjunto de 15 cálculos en 2.85 segundos. ¿Cuánto tardará la computadora en hacer 100 cálculos como ésos?

58. CONTROL DE CALIDAD De una muestra de 500 camisas para hombre se rechazaron 17 porque tenían el cuello torcido. ¿Cuántos cuellos torcidos se esperarían en una producción de 15 000 camisas?

59. CONSUMO DE COMBUSTIBLE Un "vehículo multipropósito con ruedas de alta movilidad" es mejor conocido como Hummer. Bajo condiciones normales un Hummer puede viajar 325 millas con un tanque lleno (25 galones) de diesel. ¿Qué tan lejos puede llegar usando su tanque auxiliar al que le caben 17 galones de diesel?

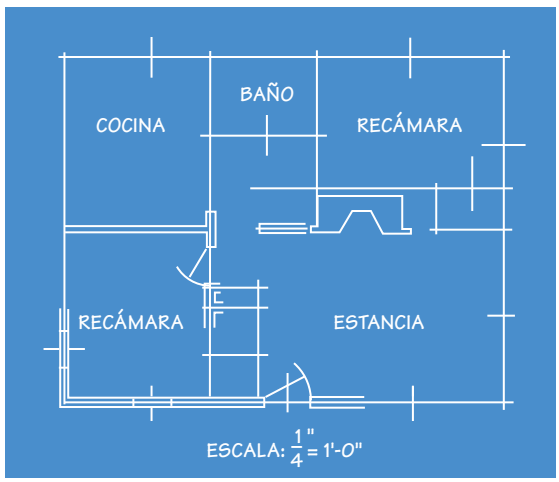
60. REGALOS DE ANIVERSARIO Un florista vende una docena de rosas de tallo largo en $57.99. Para celebrar su decimosexto aniversario de bodas, un hombre le quiere comprar 16 rosas a su esposa. ¿Cuánto le van a costar las rosas?

61. SUELDOS Billie gana $412 por una semana de 40 horas. Si faltó 10 horas al trabajo la semana pasada, ¿cuánto le pagaron?

62. NOMBRAMIENTO DE PERSONAL La dirección de una escuela ha determinado que debe haber 3 maestros por cada 50 estudiantes. Complete la tabla anotando el número de maestros que se necesitan en cada escuela.

	Glenwood High	Goddard Junior High	Sellers Elementary
Matrícula	2700	1900	850
Maestros			

63. PLANOS La escala del dibujo en el plano informa al lector que $\frac{1}{4}$ de pulgada en el dibujo corresponde a un tamaño real de 1 pie (1′0″). Suponga que la longitud de la cocina es $2\frac{1}{2}$ pulgadas en el plano. ¿Cuánto mide de largo la cocina real?

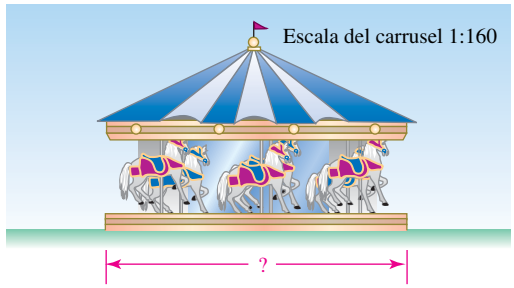


64. ANTEPROYECTO En un dibujo a escala una torre para una antena de 280 pies se dibuja de 7 pulgadas de alto. El edificio de junto se dibuja de 2 pulgadas de alto. ¿Qué altura tiene el edificio real?

65. TRENES A ESCALA Un modelo de locomotora a escala HO tiene 9 pulgadas de largo. Si la escala HO es 87 pies a 1 pie, ¿de qué largo es la locomotora real?

66. TRENES A ESCALA Un modelo de cabús a escala N mide 4 pulgadas de largo. Si la escala N es 169 pies a 1 pie, ¿de qué largo es el cabús?

67. CARRUSELES En la ilustración la razón indica que 1 pulgada en el modelo es equivalente a 160 pulgadas en el carrusel real. ¿Cuál sería la anchura del modelo si el carrusel real mide 35 pies de ancho?



68. MEZCLA DE COMBUSTIBLES Las instrucciones en una lata de aceite que se pretende agregar a la gasolina para una podadora de césped indica lo que se muestra. ¿Son correctas estas instrucciones? (*Sugerencia*: hay 128 onzas en un galón)

Recomendado	Gasolina	Aceite
50 a 1	6 galones	16 onzas

POR ESCRITO

69. Explique la diferencia entre una razón y una proporción.

70. Explique cómo determinar si $\frac{3.2}{3.7} = \frac{5.44}{6.29}$ es una proporción verdadera.

71. El párrafo siguiente es de un libro sobre casas de muñecas. ¿Qué concepto de esta sección se menciona?

> *Hoy, la escala reconocida internacionalmente para casas de muñecas y miniaturas es* 1 pulg = 1 pie. *Esto es lo suficientemente pequeño como para definirse como miniatura pero no tanto como para que los detalles de la decoración y de los muebles se vean claramente.*

72. Escriba un problema sobre una situación que encuentre en su vida diaria que se pueda resolver usando una proporción.

REPASO

73. Cambie $\frac{9}{10}$ a un porcentaje.

74. Cambie $\frac{7}{8}$ a un porcentaje.

75. Cambie $33\frac{1}{3}\%$ a una fracción.

76. Encuentre 30% de 1600.

77. Encuentre $\frac{1}{2}\%$ de 520.

78. DE COMPRAS Bill compró una camisa en $17.50. Encuentre el costo original de la camisa si estaba marcada con 30% de descuento.

6.3 Unidades norteamericanas de medida

• Unidades norteamericanas de longitud • Conversión de unidades de longitud • Unidades norteamericanas de peso • Unidades norteamericanas de capacidad • Unidades de tiempo

Dos sistemas comunes de medida son el sistema norteamericano (o inglés) y el sistema métrico. En esta sección discutimos las unidades norteamericanas y las unidades métricas en la siguiente. Algunas unidades norteamericanas comunes son *pulgadas, pies, millas, onzas, libras, toneladas, tazas, pintas, cuartos* y *galones*. Estas unidades se usan cuando se miden longitud, peso y capacidad.

- Un recién nacido mide 20 pulgadas de largo.
- La distancia de San Luis a Memphis es 285 millas.
- El costo de envío de primera clase para una carta que pesa menos de 1 onza es 37¢.
- La calabaza más grande jamás cultivada pesó 1092 libras.
- La leche se vende en recipientes de un cuarto y un galón.

Unidades norteamericanas de longitud

Uno de los dispositivos más comunes de medida para medir distancias o longitudes es una regla. La figura 6.6 muestra sólo una parte de una regla, la mayoría de las reglas son de 12 pulgadas (1 pie) de largo. Como 12 pulgadas = 1 pie, la regla se divide en 12 distancias iguales de 1 pulgada. Cada pulgada se divide en mitades de pulgada, cuartos de pulgada, octavos de pulgada y dieciseisavos de pulgada. En la figura 6.6 se miden varias distancias usando parte de la regla mostrada.

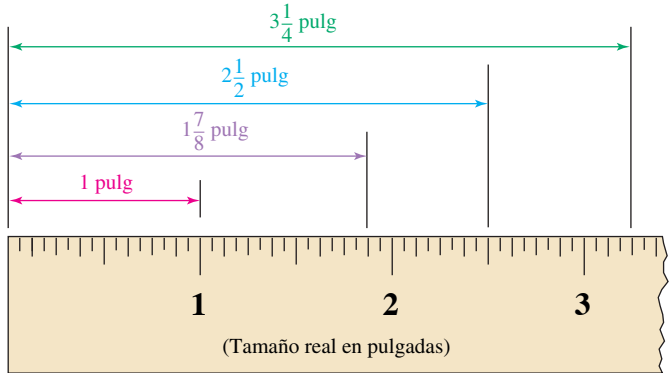


FIGURA 6.6

Cada punto sobre la regla, como cada punto sobre una recta numérica tiene un número asociado con él: la distancia entre el punto y 0.

EJEMPLO 1 Encuentre la longitud del clavo de la figura 6.7 hasta el cuarto más cercano de una pulgada.

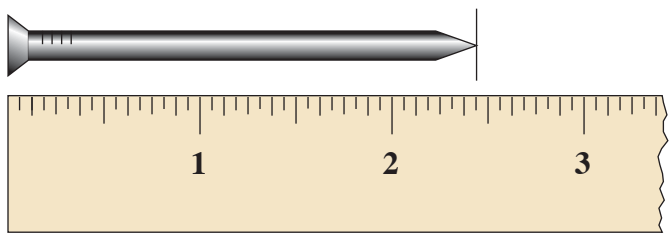
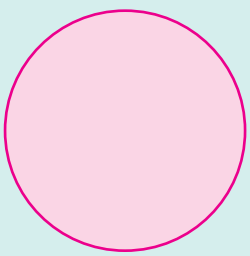


FIGURA 6.7

Autoevaluación 1

Calcule el ancho del círculo hasta el cuarto más cercano de una pulgada.



Solución Colocamos el extremo de la regla en un extremo del clavo y notamos que el otro extremo del clavo está más cerca de la marca de $2\frac{1}{2}$ pulgadas que de la marca de $2\frac{1}{4}$ pulgadas sobre la regla. El clavo mide $2\frac{1}{2}$ pulgadas de largo hasta el cuarto más cercano de pulgada.

Respuesta $1\frac{1}{4}$ pulg

EJEMPLO 2 Encuentre la longitud de la presilla de papel en la figura 6.8 hasta el octavo de pulgada más cercano.

Solución Colocamos el extremo de la regla en un extremo de la presilla de papel y notamos que el otro extremo está más cerca de la marca $1\frac{3}{8}$ pulgadas que de la marca $1\frac{1}{2}$ pulgadas. La presilla de papel mide $1\frac{3}{8}$ pulgadas hasta octavo de pulgada más cercano.

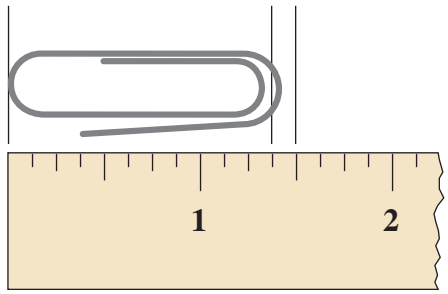


FIGURA 6.8

Autoevaluación 2
Encuentre la longitud de la presilla de papel jumbo hasta el octavo de pulgada más cercano.

Respuesta $1\frac{7}{8}$ pulg

Conversión de unidades de longitud

Las unidades norteamericanas de longitud se relacionan de la siguiente manera.

Unidades norteamericanas de longitud

1 pie (ft) = 12 pulgadas (plg)	1 yarda (yd) = 36 pulgadas
1 yarda = 3 pies	1 milla (mi) = 5 280 pies

Para convertir una unidad en otra usamos factores de conversión. Para encontrar el factor de conversión de unidades entre yardas y pies empezamos con este hecho:

$$3 \text{ pies} = 1 \text{ yd}$$

Si dividimos ambos lados de esta ecuación entre 1 yarda tenemos

$$\frac{3 \text{ pies}}{\mathbf{1 \text{ yd}}} = \frac{1 \text{ yd}}{\mathbf{1 \text{ yd}}}$$

$$\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} = 1$$

Un número dividido entre sí mismo es 1: $\frac{1 \text{ yd}}{1 \text{ yd}} = 1$.

La fracción $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$ se llama **factor de conversión de unidades** porque su valor es 1. Se puede leer como "3 pies por yarda". Como esta fracción es igual a 1, multiplicar una longitud por esta fracción no cambia su medida, cambia solamente sus *unidades* de medida.

Para convertir las unidades de longitud, usamos los siguientes factores de conversión de unidades.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
pies a pulgadas	$\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}$	pulgadas a pies	$\frac{1 \text{ pie}}{12 \text{ pulg}}$
yardas a pies	$\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$	pies a yardas	$\frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ pies}}$
yardas a pulgadas	$\frac{36 \text{ pulg}}{1 \text{ yd}}$	pulgadas a yardas	$\frac{1 \text{ yd}}{36 \text{ pulg}}$
millas a pies	$\frac{5280 \text{ pies}}{1 \text{ mi}}$	pies a millas	$\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}}$

Autoevaluación 3
Convierta 9 yardas a pies

EJEMPLO 3 Convierta 7 yardas a pies.

Solución Para convertir de yardas a pies debemos usar un factor de conversión de unidades que relacione pies con yardas. Como hay 3 pies por yarda multiplicamos 7 yardas por el factor de conversión $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$.

$$7 \text{ yd} = \frac{7 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{\mathbf{3 \text{ pies}}}{\mathbf{1 \text{ yd}}}$$ Escriba 7 yd como una fracción: $7 \text{ yd} = \frac{7 \text{ yd}}{1}$. Luego multiplique por 1: $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} = 1$.

$$= \frac{7 \overset{1}{\cancel{\text{yd}}}}{1} \cdot \frac{3 \text{ pies}}{1 \underset{1}{\cancel{\text{yd}}}}$$ Las unidades de yardas se cancelan.

$$= 7 \cdot 3 \text{ pies}$$

$$= 21 \text{ pies}$$ Multiplique: $7 \cdot 3 = 21$.

Respuesta 27 pies

Siete yardas es igual a 21 pies.

Nótese que en el ejemplo 3 eliminamos las unidades de yardas e introdujimos las unidades de pies multiplicando por el factor de conversión de unidades apropiado. En general un factor de conversión de unidades es una fracción de la forma siguiente:

$$\frac{\text{Unidad que queremos introducir}}{\text{Unidad que queremos eliminar}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Numerador} \\ \leftarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

Autoevaluación 4
Convierta 1.5 pies a pulgadas.

EJEMPLO 4 Convierta $1\frac{3}{4}$ pies a pulgadas.

Solución Para convertir de pies a pulgadas debemos usar un factor de conversión de unidades que relacione pies con pulgadas. Como hay 12 pulgadas por pie multiplicamos $1\frac{3}{4}$ pies por el factor de conversión de unidades $\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}$.

$$1\frac{3}{4} \text{ pies} = \frac{7}{4} \text{ pies} \cdot \frac{\mathbf{12 \text{ pulg}}}{\mathbf{1 \text{ pie}}}$$ Escriba $1\frac{3}{4}$ como fracción impropia $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Multiplique por 1: $\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}} = 1$.

$$= \frac{7}{4} \overset{1}{\cancel{\text{pie}}} \cdot \frac{12 \text{ pulg}}{1 \underset{1}{\cancel{\text{pie}}}}$$ Las unidades de pies se cancelan.

$$= \frac{7 \cdot 12}{4 \cdot 1} \text{ pulg}$$ Multiplique las fracciones.

$$= 21 \text{ pulg}$$ Simplifique: $\frac{7 \cdot 12}{4 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot 1} = 7 \cdot 3 = 21$.

Respuesta 18 pulg

$1\frac{3}{4}$ pies es igual a 21 pulgadas.

Algunas veces debemos usar dos factores de conversión de unidades para eliminar las unidades dadas al introducir las unidades deseadas. El siguiente ejemplo ilustra el concepto.

Longitud de un campo de fútbol en millas

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Un campo de fútbol (incluyendo las zonas de los extremos) tiene 120 yardas de largo. Para expresar esta distancia en millas escribimos el problema de tal forma que se cancelen las unidades y nos dejen unidades de millas. Como hay 3 pies por yarda y 5280 pies por milla, multiplicamos 120 yardas por $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}}$ y $\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}}$.

$$120 \text{ yd} = 120 \text{ yd} \cdot \frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}}$$

Use dos factores de conversión de unidades: $\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} = 1$ y $\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}} = 1$.

$$= \frac{120 \text{ yd}}{1} \cdot \frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yd}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}}$$

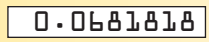
Cancele las unidades de yardas y pies.

$$= \frac{120 \cdot 3}{5280} \text{ mi}$$

Multiplique las fracciones.

Podemos hacer esta aritmética usando una calculadora científica introduciendo esos números y apretando esas teclas.

120 [×] 3 [÷] 5280 [=]



El campo de fútbol mide 0.07 millas de largo hasta el centésimo más cercano.

Unidades norteamericanas de peso

Las unidades norteamericanas de peso se relacionan de la siguiente manera.

Unidades norteamericanas de peso

1 libra (lb) = 16 onzas (oz) 1 tonelada = 2000 libras

Para convertir unidades de peso usamos los siguientes factores de conversión de unidades.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
libras a onzas	$\frac{16 \text{ oz}}{1 \text{ lb}}$	onzas a libras	$\frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}$
toneladas a libras	$\frac{2000 \text{ lb}}{1 \text{ ton}}$	libras a toneladas	$\frac{1 \text{ ton}}{2000 \text{ lb}}$

EJEMPLO 5 Convierta 40 onzas a libras.

Solución Como hay 1 libra por 16 onzas multiplicamos 40 onzas por el factor de conversión de unidades $\frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}$.

$$40 \text{ oz} = \frac{40 \text{ oz}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1 \text{ lb}}}{\mathbf{16 \text{ oz}}}$$

Escribimos 40 oz como una fracción. $40 \text{ oz} = \frac{40 \text{ oz}}{1}$. Luego multiplique por 1: $\frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}} = 1$.

$$= \frac{40 \text{ oz}}{1} \cdot \frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}$$

Las unidades de onzas se cancelan.

$$= \frac{40}{16} \text{ lb}$$

Se multiplican las fracciones.

Autoevaluación 5
Convierta 60 onzas a libras.

Hay dos formas de completar la solución. Primero, podemos cancelar los factores comunes en el numerador y el denominador y escribir el resultado como un número mixto.

$$\frac{40}{16}\text{ lb} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}\cdot 5}{\underset{1}{\cancel{8}}\cdot 2}\text{ lb} = \frac{5}{2}\text{ lb} = 2\frac{1}{2}\text{ lb}$$

Un segundo enfoque es dividir el numerador entre el denominador y expresar el resultado como un decimal.

$$\frac{40}{16}\text{ lb} = 2.5\text{ lb}$$ Realice la división $40 \div 16 = 2.5$.

Respuesta $3\frac{3}{4}\text{ lb} = 3.75\text{ lb}$

Cuarenta onzas es igual a $2\frac{1}{2}$ lb (o 2.5 lb).

Autoevaluación 6
Convierta 60 libras a onzas.

EJEMPLO 6 Convierta 25 libras a onzas.

Solución Como hay 16 onzas por libra multiplicamos 25 por el factor de conversión de unidades $\frac{16\text{ oz}}{1\text{ lb}}$.

$$25\text{ lb} = \frac{25\text{ lb}}{1}\cdot\frac{\mathbf{16\text{ oz}}}{\mathbf{1\text{ lb}}}$$ Multiplique por 1: $\frac{16\text{ oz}}{1\text{ lb}} = 1$.

$$= \frac{25\overset{1}{\cancel{\text{ lb}}}}{1}\cdot\frac{16\text{ oz}}{1\underset{1}{\cancel{\text{ lb}}}}$$ Las unidades de libras se cancelan.

$$= 25\cdot 16\text{ oz}$$

$$= 400\text{ oz}$$ Multiplique: $25\cdot 16 = 400$.

Respuesta 960 oz

Veinticinco libras es igual a 400 onzas.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

El peso de un automóvil en libras

Un BMW 323Ci convertible pesa 1.78 toneladas. Para encontrar su peso en libras formulamos el problema de tal forma que las unidades de toneladas se cancelen y nos dejen las unidades de libras. Como hay 2000 libras por tonelada, multiplicamos por $\frac{2000\text{ lb}}{1\text{ ton}}$.

$$1.78\text{ tons} = \frac{1.78\text{ tons}}{1}\cdot\frac{2000\text{ lb}}{1\text{ ton}}$$ Multiplique por 1: $\frac{2000\text{ lb}}{1\text{ ton}} = 1$.

$$= \frac{1.78\overset{1}{\cancel{\text{ tons}}}}{1}\cdot\frac{2000\text{ lb}}{1\underset{1}{\cancel{\text{ ton}}}}$$ Cancele las unidades de toneladas.

$$= 1.78\cdot 2000\text{ lb}$$

Se puede hacer esta multiplicación usando una calculadora científica e introduciendo esos números y oprimiendo esas teclas.

1.78 [×] 2000 [=] 3560

El convertible pesa 3560 libras.

Unidades norteamericanas de capacidad

Las unidades norteamericanas de capacidad se relacionan como sigue.

Unidades norteamericanas de capacidad

1 taza (c) = 8 onzas fluidas (fl oz) 1 pinta (pt) = 2 tazas (c)
1 cuarto (qt) = 2 pintas (pt) 1 galón (gal) = 4 cuartos (qt)

Para convertir unidades de capacidad usamos los siguientes factores de conversión de unidades.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
tazas a onzas	$\frac{8 \text{ fl oz}}{1 \text{ c}}$	onzas a tazas	$\frac{1 \text{ c}}{8 \text{ fl oz}}$
pintas a tazas	$\frac{2 \text{ c}}{1 \text{ pt}}$	tazas a pintas	$\frac{1 \text{ pt}}{2 \text{ c}}$
cuartos a pintas	$\frac{2 \text{ pt}}{1 \text{ qt}}$	pintas a cuartos	$\frac{1 \text{ qt}}{2 \text{ pt}}$
galones a cuartos	$\frac{4 \text{ qt}}{1 \text{ gal}}$	cuartos a galones	$\frac{1 \text{ gal}}{4 \text{ qt}}$

EJEMPLO 7 **Cocina.** Si una receta requiere de 3 pintas de leche, ¿cuántas onzas fluidas de leche deben usarse?

Solución Como hay 2 tazas por pinta y 8 onzas fluidas por taza multiplicamos 3 pintas por los factores de conversión de unidades $\frac{2 \text{ c}}{1 \text{ pt}}$ y $\frac{8 \text{ fl oz}}{1 \text{ c}}$.

$$3 \text{ pt} = \frac{3 \text{ pt}}{1} \cdot \frac{\mathbf{2 \text{ c}}}{\mathbf{1 \text{ pt}}} \cdot \frac{\mathbf{8 \text{ fl oz}}}{\mathbf{1 \text{ c}}}$$

Use dos factores de conversión de unidades: $\frac{2 \text{ c}}{1 \text{ pt}} = 1$ y $\frac{8 \text{ fl oz}}{1 \text{ c}} = 1$.

$$= \frac{3 \overset{1}{\cancel{\text{pt}}}}{1} \cdot \frac{2 \overset{1}{\cancel{\text{c}}}}{1 \underset{1}{\cancel{\text{pt}}}} \cdot \frac{8 \text{ fl oz}}{1 \underset{1}{\cancel{\text{c}}}}$$

Cancele las unidades de pintas y tazas.

$$= 3 \cdot 2 \cdot 8 \text{ fl oz}$$
$$= 48 \text{ fl oz}$$

Como 3 pintas es igual a 48 onzas fluidas, se tienen que usar 48 onzas fluidas de leche.

Autoevaluación 7
¿Cuántas pintas hay en un galón?

Respuesta 8 pt

Unidades de tiempo

Las unidades de tiempo se relacionan de la siguiente manera.

Unidades de tiempo

1 minuto (min) = 60 segundos (seg) 1 hora (h) = 60 minutos
1 día = 24 horas

Para convertir unidades de tiempo use los siguientes factores de conversión de unidades.

Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades	Para convertir de	Use el factor de conversión de unidades
minutos a segundos	$\frac{60 \text{ seg}}{1 \text{ min}}$	segundos a minutos	$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}}$
horas a minutos	$\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}$	minutos a horas	$\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$
días a horas	$\frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}}$	horas a días	$\frac{1 \text{ día}}{24 \text{ h}}$

Autoevaluación 8
Un eclipse solar (eclipse de Sol) puede durar hasta 450 segundos. Exprese este tiempo en minutos.

EJEMPLO 8 **Astronomía.** En eclipse lunar ocurre cuando la Tierra está entre el Sol y la Luna de tal forma que la sombra de la Tierra oscurece a la Luna. (Véase la figura 6.9, la cual no está a escala.) Un eclipse total de Luna puede durar hasta 105 minutos. Exprese el tiempo en horas.

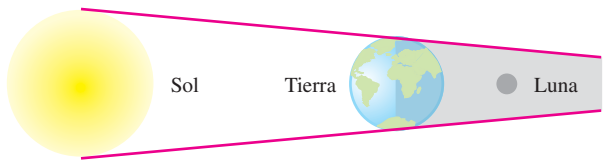


FIGURA 6.9

Solución Como hay una hora por cada 60 minutos multiplicamos 105 por el factor de conversión de unidades $\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$.

$$105 \text{ min} = \frac{105 \text{ min}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1 \text{ h}}}{\mathbf{60 \text{ min}}}$$ Multiplique por 1: $\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 1$.

$$= \frac{105 \cancel{\text{min}}}{1} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \cancel{\text{min}}}$$ Las unidades de minutos se cancelan.

$$= \frac{105}{60} \text{ h}$$ Multiplique las fracciones.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} \text{h}$$ Factorice en primos 105 y 60. Cancele los factores comunes en el numerador y el denominador.

$$= \frac{7}{4} \text{ h}$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \text{ h}$$ Escriba $\frac{7}{4}$ como número mixto.

Respuesta $7\frac{1}{2}$ min

Un eclipse total de Luna puede durar hasta $1\frac{3}{4}$ horas.

Sección 6.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

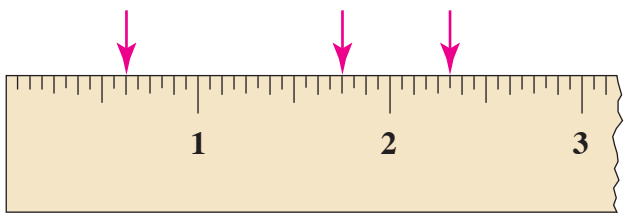
VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Pulgadas, pies y millas son ejemplos del sistema norteamericano de unidades de _____.
2. Una regla se usa para medir _____.
3. El valor de cualquier factor de conversión de unidades es _____.
4. Onzas, libras y toneladas son ejemplo de unidades norteamericanas de _____.
5. Algunos ejemplos de unidades norteamericanas de _____ son tazas, pintas, cuartos y galones.
6. Algunas unidades de _____ son segundos, horas y días.

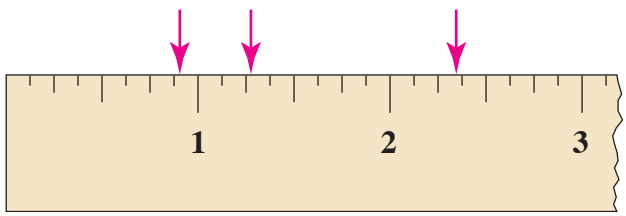
CONCEPTOS *Llene los espacios.*

7. 12 pulg = _____ pies
8. _____ pies = 1 yd
9. 1 mi = _____ pies
10. 1 yd = _____ pulg
11. _____ onzas = 1 libra
12. _____ libras = 1 tonelada
13. 1 taza = _____ onzas fluidas
14. 1 pinta = _____ tazas
15. 2 pintas = _____ cuarto
16. 4 cuartos = _____ galón
17. 1 día = _____ horas
18. 2 horas = _____ minutos

19. Determine hacia qué medidas apuntan las flechas sobre la regla.



20. Determine hacia qué medidas apuntan las flechas sobre la regla hasta el octavo más cercano.



21. Escriba un factor de conversión de unidades para convertir
    a. libras a toneladas **b.** cuartos a pintas
22. Escriba los dos factores de conversión de unidades que se usan para convertir
    a. pulgadas a yardas
    b. días a minutos
23. Asocie cada inciso con su medida apropiada.
    a. Longitud de la costa de Estados Unidos
    b. Altura de una muñeca Barbie
    c. La longitud del puente Golden Gate
    d. Anchura de un campo de fútbol
    i. $11\frac{1}{2}$ pulg.
    ii. 4200 pies
    iii. 53.5 yd
    iv. 12 383 mi
24. Asocie cada inciso con su medida apropiada.
    a. Peso de la bala en el lanzamiento pruebas de pista y campo
    b. Peso de un elefante africano
    c. Cantidad de oro que vale $500
    i. $1\frac{1}{2}$ oz
    ii. 16 lb
    iii. 7.2 toneladas
25. Asocie cada inciso con su medida apropiada.
    a. Cantidad de sangre en un adulto
    b. Tamaño del derrame de petróleo del Exxon Valdez en 1989
    c. Cantidad de barniz de uñas en un frasco
    d. Cantidad de harina para hacer 3 docenas de galletas
    i. $\frac{1}{2}$ onza fluida
    ii. 2 tazas
    iii. 5 qt
    iv. 10 080 000 gal
26. Asocie cada inciso con su medida apropiada.
    a. Duración del primer vuelo tripulado de Estados Unidos
    b. Un año bisiesto
    c. Diferencia de horario entre Nueva York y Fairbanks, Alaska
    d. Duración del primer vuelo de los hermanos Wright
    i. 12 seg
    ii. 15 min
    iii. 4 h
    iv. 366 días

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

27. Convierta 12 yardas a pulgadas.

$$12\text{ yd} = 12\text{ yd} \cdot \frac{\square\text{ pulg}}{1\text{ yd}}$$
$$= 12 \cdot \square\text{ pulg}$$
$$= 432\text{ pulg}$$

28. Convierta 1 tonelada a onzas.

$$1\text{ ton} = 1\text{ ton} \cdot \frac{\square\text{ lb}}{1\text{ ton}} \cdot \frac{\square\text{ oz}}{1\text{ lb}}$$
$$= 1 \cdot 2000 \cdot 16\text{ oz}$$
$$= \square\text{ oz}$$

29. Convierta 12 pintas a galones.

$$12\text{ pt} = 12\text{ pt} \cdot \frac{1\text{ qt}}{\square\text{ pt}} \cdot \frac{1\text{ gal}}{\square\text{ qt}}$$
$$= \square \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\text{ gal}$$
$$= 1.5\text{ gal}$$

30. Convierta 37 440 minutos a días.

$$37\,440\text{ min} = 37\,440\text{ min} \cdot \frac{1\text{ h}}{\square\text{ min}} \cdot \frac{1\text{ día}}{\square\text{ h}}$$
$$= \frac{\square}{60 \cdot 24}\text{ días}$$
$$= 26\text{ días}$$

PRÁCTICA *Use una regla con escala en pulgadas para medir cada objeto hasta el octavo más cercano.*

31. El ancho de un billete de un dólar.

32. La longitud de un billete de un dólar.

33. La longitud (de arriba a abajo) de esta página.

34. La longitud de la palabra supercalifragilístico-espialidoso.

Haga las conversiones.

35. 4 pies a pulgadas

36. 7 pies a pulgadas

37. $3\frac{1}{2}$ pies a pulgadas

38. $2\frac{2}{3}$ pies a pulgadas

39. 24 pulgadas a pies

40. 54 pulgadas a pies

41. 8 yardas a pulgadas

42. 288 pulgadas a yardas

43. 90 pulgadas a yardas

44. 12 yardas a pulgadas

45. 56 pulgadas a pies

46. 44 pulgadas a pies

47. 5 yardas a pies

48. 21 pies a yardas

49. 7 pies a yardas

50. $4\frac{2}{3}$ yardas a pies

51. 15 840 pies a millas

52. 2 millas a pies

53. $\frac{1}{2}$ milla a pies

54. 1 320 pies a millas

55. 80 onzas a libras

56. 8 libras a onzas

57. 7000 libras a toneladas

58. 2.5 toneladas a onzas

59. 12.4 toneladas a libras

60. 48 000 onzas a toneladas

61. 3 cuartos a pintas

62. 20 cuartos a galones

63. 16 pintas a galones

64. 3 galones a onzas fluidas

65. 32 onzas fluidas a pintas

66. 2 cuartos a onzas fluidas

67. 240 minutos a horas

68. 2400 segundos a horas

69. 7 200 minutos a días

70. 691 200 segundos a días

APLICACIONES

71. LA GRAN PIRÁMIDE La Gran Pirámide de Egipto tiene aproximadamente 450 pies de alto. Exprese esta distancia en yardas.

72. LOS HERMANOS WRIGHT En 1903, Orville Wright hizo el primer vuelo sostenido del mundo. Duró 12 segundos y el avión viajó 120 pies. Exprese la longitud del vuelo en yardas.

73. LA GRAN ESFINGE La Gran Esfinge de Egipto tiene 240 pies de largo. Expréselo en pulgadas.

74. LA PRESA HOOVER La presa Hoover en Nevada tiene 726 pies de altura. Exprese esta distancia en pulgadas.

75. LA TORRE SEARS La torre Sears en Chicago tiene 110 pisos y mide 1454 pies de altura. Exprese esta altura en millas hasta el centésimo más cercano de milla.

76. MARCAS DE LA NFL Emmit Smith, ex running back de los Vaqueros de Dallas y de los Cardenales de Arizona tiene el récord de la National Football League de yardas corridas: 18 355. ¿Cuántas millas son? Redondee hasta el décimo más cercano de milla.

77. MARCAS DE LA NFL Cuando se retiró Dan Marino de los Delfines de Miami se hizo notar que a lo largo de la carrera de Marino el total de pases era de casi ¡35 millas! ¿Cuántas yardas son?

78. LEWIS Y CLARK El recorrido de la expedición de Lewis y Clark se muestra en la siguiente página. Cuando la expedición llegó al Océano Pacífico, Clark estimó que habían viajado 4162 millas, (más adelante se determinó que su estimación no tenía un error mayor de 40 millas de la distancia real.) Exprese la estimación de la distancia de Clark en pies.

79. PESO DEL AGUA Un galón de agua pesa alrededor de 8 libras. Exprese este peso en onzas.

80. PESO DE UN BEBÉ Un bebé recién nacido pesó 136 onzas. Exprese este peso en libras.

81. HIPOPÓTAMOS Un hipopótamo adulto puede llegar a pesar 9900 libras. Exprese este peso en toneladas.

82. ELEFANTES Un elefante adulto puede llegar a consumir 495 libras de pasto y hojas en un día. ¿Cuántas onzas son?

83. COMPRA DE PINTURA Un pintor estima que va a necesitar 17 galones de pintura para un trabajo. Para aprovechar un remate de pintura en latas de un cuarto decide comprar la pintura en cuartos. ¿Cuántas latas tiene que comprar?

84. ABASTECIMIENTO ¿Cuántas tazas de sidra de manzana se pueden servir de un contenedor de 10 galones de sidra?

85. ALMUERZOS ESCOLARES Cada estudiante que asiste a la Escuela Primaria Eagle River recibe una pinta de leche en su almuerzo diariamente. Si asisten 575 estudiantes a la escuela, ¿cuántos galones de leche se consumen diariamente?

86. RADIADORES La capacidad del radiador de un trascabo es de 39 cuartos. Si se vacía el radiador y se le pone nuevo refrigerante, ¿cuántos galones de refrigerante se usarán?

87. CAMPISMO ¿Cuántas onzas de combustible para una estufa de campamento cabrán en el contenedor mostrado?

88. EXCURSIONISMO Un estudiante universitario camina 11 millas en 155 minutos. ¿Cuántas horas camina? Calcule hasta el décimo más cercano.

89. VIAJE ESPACIAL Los astronautas de la misión del Apolo 8, que se lanzó el 21 de diciembre de 1968, estuvieron en el espacio 147 horas. ¿Cuántos días duró la misión?

90. AMELIA EARHART En 1935, Amelia Earhart se convirtió en la primera mujer en sobrevolar sola el Océano Atlántico, estableciendo una nueva marca: 13 horas y 30 minutos. ¿Cuántos minutos son?

POR ESCRITO

91. Explique cómo encontrar el factor de conversión de unidades que convierte pies en pulgadas.

92. Explique cómo encontrar el factor de conversión de unidades que convierte pintas en galones.

REPASO *Redondee cada número como se indica.*

93. 3673.263 a la centena más cercana

94. 3673.263 a la decena más cercana

95. 3673.263 al centésimo más cercano

96. 3673.263 al décimo más cercano

97. 0.100602 al milésimo más cercano

98. 0.100602 al centésimo más cercano

99. 0.09999 al décimo más cercano

100. 0.09999 a la unidad más cercana

6.4 Unidades métricas de medida

• Unidades métricas de longitud • Conversión de unidades de longitud • Unidades métricas de masa • Unidades métricas de capacidad • Centímetros cúbicos

El sistema métrico es el sistema de medida usado en la mayoría de los países del mundo. Todos los países, incluyendo Estados Unidos, lo usan con fines científicos. El sistema métrico, como nuestro sistema decimal de numeración, se basa en el número 10. Por esta razón la conversión de una unidad métrica a otra es más fácil que en el sistema norteamericano.

Unidades métricas de longitud

La unidad métrica básica de longitud es el **metro** (m). Un metro es aproximadamente 39 pulgadas, un poco más que una yarda. La figura 6.10 muestra los tamaños relativos de un metro y una yarda.

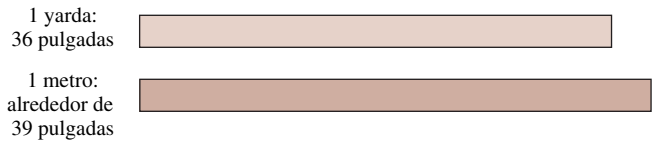


FIGURA 6.10

Se crean unidades más grandes o más pequeñas añadiendo prefijos antes de la unidad básica, el *metro*.

deca significa decenas
hecto significa centenas
kilo significa millares
deci significa décimas
centi significa centésimas
milli significa milésimas

Unidades métricas de longitud

1 decámetro (dam) = 10 metros
1 dam es poco menos que 11 yardas

1 hectómetro (hm) = 100 metros
1 hm es aproximadamente la longitud de un campo de fútbol, más una zona de anotación.

1 kilómetro (km) = 1000 metros
1 km es aproximadamente $\frac{3}{5}$ de milla.

1 decímetro (dm) = $\frac{1}{10}$ de 1 metro.
1 dm es aproximadamente la longitud de la palma de su mano.

1 centímetero (cm) = $\frac{1}{100}$ de 1 metro.
1 cm es aproximadamente del ancho de una uña de su dedo meñique.

1 milímetro (mm) = $\frac{1}{1000}$ de 1 metro.
1 mm es aproximadamente del espesor de una moneda de 10 centavos de dólar.

La figura 6.11 muestra una porción de una regla métrica, con escala en centímetros y una regla con escala en pulgadas. Las reglas se usan para medir distintas longitudes.

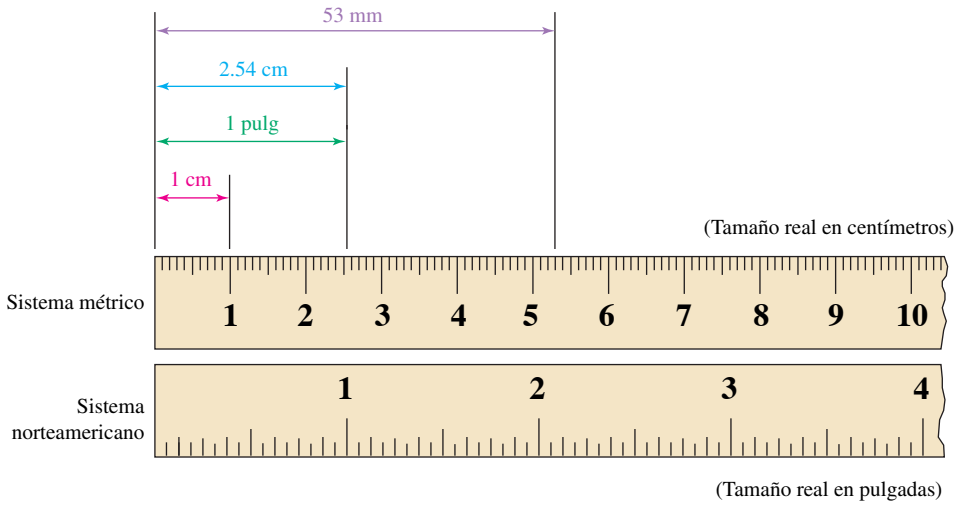


FIGURA 6.11

EJEMPLO 1 Encuentre la longitud del clavo de la figura 6 .12 hasta el centímetro más cercano.

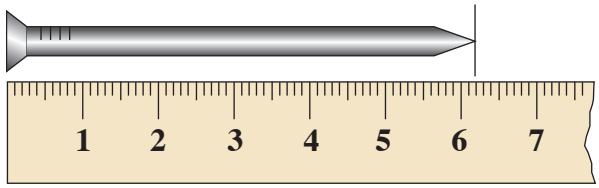
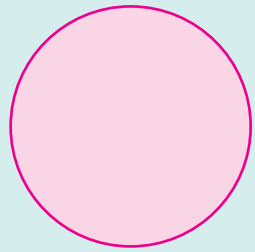


FIGURA 6.12

Solución Colocamos el extremo de la regla en un extremo del clavo y notamos que el otro extremo está más cerca de la marca de 6 cm que de la marca de 7 cm en la regla. El clavo mide 6 cm hasta el centímetro más cercano.

Autoevaluación 1
Encuentre el ancho del círculo hasta el centímetro más cercano.



Respuesta 3 cm

EJEMPLO 2 Encuentre la longitud de la presilla de papel en la figura 6.13 hasta el milímetro más cercano.

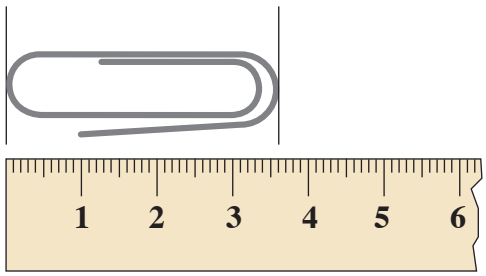


FIGURA 6.13

Solución Sobre la regla cada centímetro se ha dividido en 10 milímetros. Colocamos el extremo de la regla en uno de los extremos de la presilla y notamos que el otro extremo está más cerca de la marca de 36 mm que de la marca de 37 mm. La presilla mide 36 cm de largo hasta el milímetro más cercano.

Autoevaluación 2
Encuentre la longitud de la presilla jumbo hasta el milímetro más cercano.

Respuesta 47 mm

Conversión de unidades de longitud

Las unidades métricas de longitud se relacionan como se muestra en la tabla 6.1.

Unidades métricas de longitud

1 kilómetro (km) = 1000 metros	o	1 metro = $\frac{1}{1000}$ kilómetro
1 hectómetro (hm) = 100 metros	o	1 metro = $\frac{1}{100}$ hectómetro
1 decámetro (dam) = 10 metros	o	1 metro = $\frac{1}{10}$ decámetro
1 decímetro (dm) = $\frac{1}{10}$ metro	o	1 metro = 10 decímetros
1 centímetro (cm) = $\frac{1}{100}$ metro	o	1 metro = 100 centímetros
1 milímetro (mm) = $\frac{1}{1000}$ metro	o	1 metro = 1000 milímetros

TABLA 6.1

Se puede usar la información de la tabla para escribir factores de conversión de unidades, los que a su vez se pueden aplicar para convertir unidades métricas de longitud. Por ejemplo, en la tabla vemos que

1 metro = 100 cm

De este hecho, podemos escribir dos factores de conversión de unidades

$$\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}} = 1$$

Para obtener el primer factor de conversión de unidades divida ambos lados de la ecuación 1 m = 100 cm. Para obtener el segundo factor de conversión de unidades divida ambos lados por 1 m.

Una ventaja del sistema métrico es que la multiplicación o división por el factor de conversión de una unidad involucra la multiplicación o división de potencias de 10.

Autoevaluación 3
Convierta 860 centímetros a metros.

EJEMPLO 3 Convierta 350 centímetros a metros.

Solución Como hay 1 metro en cada 100 centímetros, multiplicamos 350 centímetros por el factor de conversión de la unidad $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$.

$$350\text{ cm} = \frac{350\text{ cm}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1\text{ m}}}{\mathbf{100\text{ cm}}}$$ Multiplique por 1: $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = 1$.

$$= \frac{350\ \overset{1}{\cancel{\text{cm}}}}{1} \cdot \frac{1\text{ m}}{100\ \overset{1}{\cancel{\text{cm}}}}$$ Las unidades de centímetros se cancelan.

$$= \frac{350}{100}\text{ m}$$

$$= 3.5\text{ m}$$ Divida entre 100 moviendo el punto decimal 2 cifras a la izquierda.

Respuesta 8.6 m

Por tanto, 350 centímetros = 3.5 metros.

En el ejemplo 3 convertimos 350 centímetros a metros usando un factor de conversión de unidades. También podemos hacer esta conversión dándonos cuenta de que todas las unidades de longitud en el sistema métrico son potencias de 10 de un metro. Convertir de una unidad a otra es tan fácil como multiplicar por la potencia correcta de 10 o simplemente mover un punto decimal el número correcto de cifras a la derecha o la izquierda. Del cuadro de abajo vemos que para convertir de centímetros a metros movemos 2 cifras a la izquierda.

km hm dam **m** dm **cm** mm

Para ir de centímetros a metros debemos mover dos cifras a la izquierda.

Si escribimos 350 centímetros como 350.0 centímetros podemos convertir a metros moviendo el punto decimal dos lugares a la izquierda.

350.0 centímetros = 3.50 0 metros = 3.5 metros

Con el método del factor de conversión de unidades o con el método del cuadro, tenemos que 350 cm = 3.5 m.

COMENTARIO Cuando se usa un cuadro para ayudarse a hacer una conversión métrica asegúrese de enlistar las unidades de mayor a menor cuando se lea de izquierda a derecha.

EJEMPLO 4 Convierta 2.4 metros a milímetros.

Solución Como hay 1000 milímetros por metro multiplicamos 2.4 metros por el factor de conversión de unidades $\frac{1000\text{ mm}}{1\text{ m}}$.

$$2.4\text{ m} = \frac{2.4\text{ m}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1000\text{ mm}}}{\mathbf{1\text{ m}}}$$ Multiplique por 1: $\frac{1000\text{ mm}}{1\text{ m}} = 1$.

$$= \frac{2.4\,\overset{1}{\cancel{\text{m}}}}{1} \cdot \frac{1000\text{ mm}}{1\,\underset{1}{\cancel{\text{m}}}}$$ Las unidades de metros se cancelan.

$$= 2.4 \cdot 1000\text{ mm}$$

$$= 2400\text{ mm}$$ Multiplique por 1000 moviendo el punto decimal 3 cifras a la derecha.

Por tanto, 2.4 metros = 2400 milímetros.

También podemos hacer la conversión con la ayuda de una gráfica.

km hm dam **m** dm cm **mm**

De la gráfica se observa que el punto decimal se debe desplazar 3 posiciones a la derecha para realizar la conversión de metros a milímetros.

2.4 metros = 2400. milímetros = 2400 milímetros

Autoevaluación 4
Convierta 5.3 metros a milímetros.

Respuesta 5300 milímetros

EJEMPLO 5 Convierta 3.2 kilómetros a centímetros.

Solución Para convertir a centímetros, formulamos el problema de tal forma que las unidades de kilómetros se cancelen y nos dejen las unidades de centímetros. Como hay 1000 metros por kilómetro y 100 centímetros por metro, multiplicamos por $\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}$ y $\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}$.

$$3.2\text{ km} = \frac{3.2\,\overset{1}{\cancel{\text{km}}}}{1} \cdot \frac{\mathbf{1{,}000\,\overset{1}{\cancel{\text{m}}}}}{\mathbf{1\,\underset{1}{\cancel{\text{km}}}}} \cdot \frac{\mathbf{100\text{ cm}}}{\mathbf{1\,\underset{1}{\cancel{\text{m}}}}}$$ Las unidades de kilómetros y metros se cancelan.

$$= 3.2 \cdot 1000 \cdot 100\text{ cm}$$

$$= 320\,000\text{ cm}$$ Multiplique por 1000 y por 100 moviendo el punto decimal 5 cifras a la derecha.

Por tanto, 3.2 kilómetros = 320 000 centímetros.

Usando un cuadro vemos que el punto decimal debiera moverse 5 cifras a la derecha para convertir kilómetros a centímetros.

km hm dam m dm **cm** mm

3.2 km = 320 000 centímetros = 320 000 centímetros

Autoevaluación 5
Convierta 5.14 kilómetros a centímetros.

Respuesta 515 000 cm

Unidades métricas de masa

La **masa** de un objeto es una medida de la cantidad de materia en un objeto. Cuando un objeto se mueve en el espacio su masa no cambia. Una unidad básica de masa en el sistema métrico es el **gramo** (g). Un gramo se define como la masa de agua contenida en un cubo de lados de 1 cm de largo. (Véase la figura 6.14 en la siguiente página.)

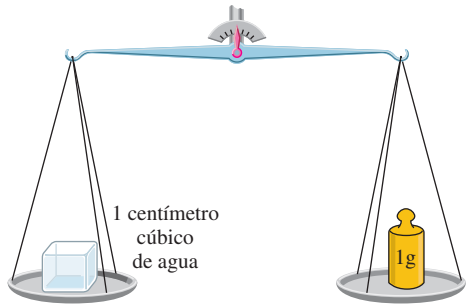


FIGURA 6.14

El **peso** de un objeto se determina por la atracción gravitacional de la Tierra sobre el objeto. Como la atracción gravitacional sobre un objeto decrece al alejarse de la Tierra, el objeto pesa menos conforme se aleja de la superficie de la Tierra. Esta es la razón por la que los astronautas experimentan ingravidez en el espacio. Sin embargo, como la mayoría de nosotros permanecemos cerca de la superficie de la Tierra, usaremos las palabras *masa* y *peso* como lo mismo. Por tanto, se dice que una masa de 30 g pesa 30 gramos.

Las unidades métricas de masa se relacionan como se muestra en la tabla 6.2.

Unidades métricas de masa

1 kilogramo (kg) = 1000 gramos	o	1 gramo = $\frac{1}{1000}$ kilogramos
1 hectogramo (hg) = 100 gramos	o	1 gramo = $\frac{1}{100}$ hectogramo
1 decagramo (dag) = 10 gramos	o	1 gramo = $\frac{1}{10}$ decagramo
1 decigramo (dg) = $\frac{1}{10}$ gramo	o	1 gramo = 10 decigramos
1 centigramo (cg) = $\frac{1}{100}$ gramo	o	1 gramo = 100 centigramos
1 miligramo (mg) = $\frac{1}{1000}$ gramo	o	1 gramo = 1000 miligramos

TABLA 6.2

He aquí ejemplos de estas unidades de masa:

- Una bola de boliche promedio pesa alrededor de 6 kg.
- Una uva pasa pesa cerca de un gramo.
- Cierta tableta de vitaminas contiene 450 miligramos de calcio.

Podemos utilizar la tabla 6.2 para escribr factores de conversión de unidades que pueden convertir unidades métricas de masa. Por ejemplo, en la tabla vemos que

1 kilogramo = 1000 gramos

A partir de este hecho podemos escribir dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{1\text{ kg}}{1000\text{ g}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1000\text{ g}}{1\text{ kg}} = 1$$

Para obtener el primer factor de conversión de unidades divida ambos lados de la ecuación 1 kg = 1000 gramos entre 1000 g. para obtener el segundo factor de conversión de unidades divida ambos lados entre 1 kg.

EJEMPLO 6

Convierta 7.2 kilogramos a gramos.

Solución Para convertir a gramos, formulamos el problema de tal forma que las unidades de gramos se cancelen y nos dejen las unidades de gramos. Como hay 1000 gramos por 1 kilogramo, multiplicamos por $\frac{1000\text{ g}}{1\text{ kg}}$.

Autoevaluación 6
Convierta 5 kilogramos a gramos.

$$7.2\text{ kg} = \frac{7.2\text{ kg}}{1}\cdot\frac{1000\text{ g}}{1\text{ kg}}$$ Cancele las unidades de kilogramos.

$$= 7.2\cdot 1000\text{ g}$$

$$= 7200\text{ g}$$ Realice la multiplicación moviendo el punto decimal 3 cifras a la derecha.

Por tanto, 7.2 kilogramos = 7200 gramos.

Para usar un cuadro para hacer la conversión enlistamos las unidades métricas de peso de la mayor (kilogramos) a la menor (miligramos)

kg hg dag **g** dg cg mg

Del cuadro vemos que se debe mover el punto decimal 3 lugares a la derecha para cambiar de kilogramos a gramos.

7.2 kilogramos = 7200. gramos = 7200 gramos

Respuesta 5000 g

EJEMPLO 7 **Medicamentos.** Un frasco de Verapamil, medicina que se toma para la presión alta, contiene 30 tabletas. Si cada tableta contiene 180 mg de ingrediente activo, ¿cuántos centigramos de ingrediente activo hay en el frasco?

Solución Como hay 30 tabletas y cada una contiene 180 mg de ingrediente activo, hay

$$30\cdot 180\text{ mg} = 5400\text{ mg}$$

de ingrediente activo en el frasco. Para convertir miligramos a centigramos multiplicamos 5400 miligramos por $\frac{1\text{ g}}{1000\text{ mg}}$ y $\frac{100\text{ cg}}{1\text{ g}}$.

$$5400\text{ mg} = \frac{5400\text{ mg}}{1}\cdot\frac{1\text{ g}}{1000\text{ mg}}\cdot\frac{100\text{ cg}}{1\text{ g}}$$ Cancele las unidades de miligramos y gramos.

$$= \frac{5400\cdot 100}{1000}\text{ cg}$$ Multiplique las fracciones.

$$= 540\text{ cg}$$ Simplifique.

Hay 540 centigramos de ingrediente activo en el frasco.

Usando un cuadro vemos que debemos mover el punto decimal 1 cifra a la izquierda para convertir de miligramos a centigramos.

kg hg dag g dg **cg** **mg**

5400 miligramos = 540.0 centigramos = 540 centigramos

Respuesta 1800 cg

Autoevaluación 7
Una marca que contiene Verapamil es Isoptin. Si un frasco de Isoptin contiene 90 tabletas, cada una con 200 mg de ingrediente activo, ¿cuántos centigramos de ingrediente activo hay en un frasco?

Unidades métricas de capacidad

En el sistema métrico una unidad de capacidad básica es el litro (L) que se define como la capacidad de un cubo con lados de 10 cm de largo. (Véase la figura 6.15.) Un litro de líquido es un poco más que 1 cuarto.

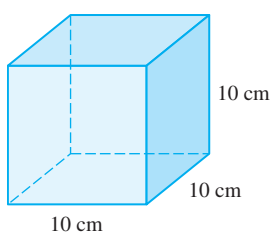


FIGURA 6.15

Las unidades métricas de capacidad se relacionan como se muestra en la tabla 6.3.

Unidades métricas de capacidad

1 kilolitro (kL) = 1000 litros	o	1 litro = $\frac{1}{1000}$ kilolitro
1 hectolitro (hL) = 100 litros	o	1 litro = $\frac{1}{100}$ hectolitro
1 decalitro (daL) = 10 litros	o	1 litro = $\frac{1}{10}$ decalitro
1 decilitro (dL) = $\frac{1}{10}$ litro	o	1 litro = 10 decilitros
1 centilitro (cL) = $\frac{1}{100}$ litro	o	1 litro = 100 centilitros
1 mililitro (mL) = $\frac{1}{1000}$ litro	o	1 litro = 1000 mililitros

TABLA 6.3

He aquí ejemplos de unidades de capacidad:

- Los refrescos se venden en botellas de 2 litros de capacidad.
- El tanque de combustible de cierta camioneta puede almacenar cerca de 75 litros de gasolina.
- Los químicos usan cilindros de vidrio graduados en mililitros para medir líquidos.

Podemos usar la información de la tabla 6.3 para escribir factores de conversión de unidades que se puedan usar para convertir unidades métricas de capacidad. Por ejemplo, en la tabla vemos que

1 litro = 100 centilitros

De este hecho, podemos escribir dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{1\text{ L}}{100\text{ cL}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{100\text{ cL}}{1\text{ L}} = 1$$

Autoevaluación 8
¿Cuántos mililitros hay en dos botellas de 2 L de cola?

EJEMPLO 8 **Refrescos.** ¿Cuántos centilitros hay en tres botellas de 2 L de cola?

Solución Tres botellas de 2 litros de cola contienen 6 litros de cola. Para convertir a centilitros, formulamos el problema de tal forma que las unidades de litros se cancelen y nos dejen centilitros. Como hay 100 centilitros por 1 litro multiplicamos 6 litros por el factor de conversión de unidades $\frac{100\text{ cL}}{1\text{ L}}$.

$$6\text{ L} = 6\text{ L} \cdot \frac{\mathbf{100\text{ cL}}}{\mathbf{1\text{ L}}} \qquad \text{Multiplique por 1: } \frac{100\text{ cL}}{1\text{ L}} = 1.$$

$$= \frac{6\,\overset{1}{\cancel{\text{L}}}}{1} \cdot \frac{100\text{ cL}}{1\,\underset{1}{\cancel{\text{L}}}} \qquad \text{Las unidades de litros se cancelan.}$$

$$= 6 \cdot 100\text{ cL}$$

$$= 600\text{ cL}$$

Por tanto, hay 600 centilitros en las tres botellas de 2 litros de cola.

Para hacer esta conversión usando un cuadro enlistamos las unidades métricas de capacidad en orden de mayor (kilolitro) a menor (mililitro).

kL hL daL **L** dL **cL** mL

Del cuadro vemos que debiéramos mover el punto decimal 2 lugares a la derecha para convertir de litros a centilitros.

6 litros = 600. centilitros = 600 centilitros

Respuesta 4000 mL

Centímetros cúbicos

Otra unidad métrica de capacidad es el **centímetro cúbico**, que se representa por la notación cm^3 o, simplemente, cc. Un mililitro y un centímetro cúbico representan la misma capacidad.

$$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cc}$$

Las unidades de centímetros cúbicos se usan frecuentemente en medicina. Por ejemplo, cuando una enfermera aplica una inyección de 5 cc de medicamento la dosis también se puede expresar usando mililitros.

$$5 \text{ cc} = 5 \text{ mL}$$

Cuando un doctor ordena que a un paciente se le pongan 1000 cc de solución de dextrosa la orden se puede expresar de distintas maneras.

$$1000 \text{ cc} = 1000 \text{ mL} = 1 \text{ litro}$$

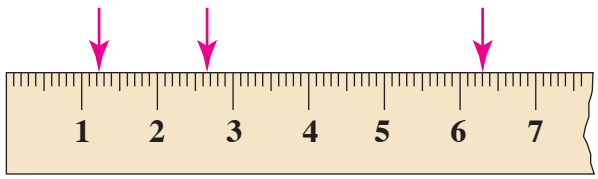
Sección 6.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

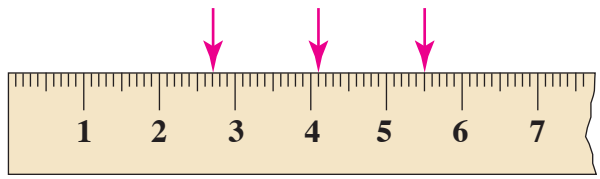
1. *Deka* significa _____.
2. *Hecto* significa _____.
3. *Kilo* significa _____.
4. *Deci* significa _____.
5. *Centi* significa _____.
6. *Mili* significa _____.
7. Metros, gramos y litros son unidades de medida en el sistema _____.
8. El _____ de un objeto está determinado por la atracción gravitacional de la Tierra sobre el objeto.

CONCEPTOS

9. Determine hacia qué medidas apuntan las flechas sobre la regla hasta el centímetro más cercano.



10. Determine hacia qué medidas apuntan las flechas sobre la regla hasta el milímetro más cercano.



11. Escriba un factor de conversión de unidades para convertir
    - **a.** metros a kilómetros
    - **b.** gramos a centigramos
    - **c.** litros a mililitros
12. Use el cuadro para determinar cuántas cifras decimales y en qué dirección hay que mover el punto decimal cuando se convierte lo siguiente.
    - **a.** Kilómetros a centímetros

      km hm dam m dm cm mm
    - **b.** Miligramos a gramos

      kg hg dag g dg cg mg
    - **c.** Hectolitros a centilitros

      kL hL daL L dL cL mL
13. Asocie cada inciso con su medida apropiada.

a. Grosor de un directorio telefónico	**i.** 6275 km
b. Longitud del río Amazonas	**ii.** 2 m
c. Altura de una portería de soccer	**iii.** 6 cm

14. Aparee cada inciso con su medida apropiada.

a. Peso de una jirafa — **i.** 800 kg

b. Peso de un clip — **ii.** 1 g

c. Ingrediente activo en una tableta de aspirina — **iii.** 325 mg

15. Asocie cada inciso con su medida apropiada.

a. Cantidad de sangre en un adulto — **i.** 290 000 kL

b. Refresco de cola en una lata de aluminio — **ii.** 6 L

c. Producción diaria de petróleo de Kuwait — **iii.** 355 mL

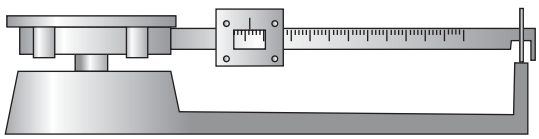
16. De los objetos de la ilustración, ¿cuál se puede usar para medir lo siguiente?

a. Milímetros

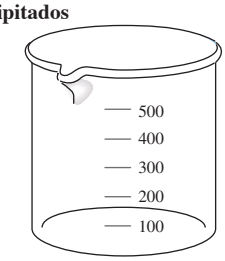
b. Miligramos

c. Mililitros

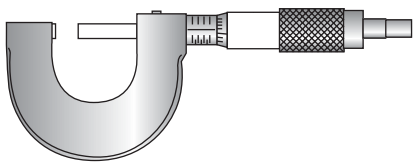
Balanza



Vaso de precipitados



Micrómetro



Llene los espacios.

17. 1 decámetro = ____ metros

18. 1 decímetro = ____ metros

19. 1 centímetro = ____ metros

20. 1 kilómetro = ____ metros

21. 1 milímetro = ____ metros

22. 1 hectómetro = ____ metros

23. 1 gramo = ____ miligramos

24. 100 centigramos = ____ gramos

25. 1 kilogramo = ____ gramos

26. 1 mililitro = ____ centímetro cúbico

27. 1 litro = ____ centímetros cúbicos

28. 1 kilolitro = ____ litros

29. 1 centilitro = ____ litro

30. 1 mililitro = ____ litro

31. 100 litros = ____ hectolitro

32. 10 decilitros = ____ litro

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

33. Convierta 20 centímetros a metros.

$$20\text{ cm} = 20\text{ cm} \cdot \frac{\square\text{ m}}{100\text{ cm}}$$
$$= \frac{20}{\square}\text{ m}$$
$$= 0.2\text{ m}$$

34. Convierta 300 centigramos a gramos.

$$300\text{ cg} = 300\text{ cg} \cdot \frac{\square\text{ g}}{100\text{ cg}}$$
$$= \frac{\square}{100}\text{ g}$$
$$= 3\text{ g}$$

35. Convierta 2 kilómetros a decímetros.

$$2\text{ km} = 2\text{ km} \cdot \frac{\square\text{ m}}{1\text{ km}} \cdot \frac{10\text{ dm}}{\square\text{ m}}$$
$$= 2 \cdot \square \cdot 10\text{ dm}$$
$$= 20\,000\text{ dm}$$

36. Convierta 3 decilitros a mililitros.

$$3\text{ dL} = 3\text{ dL} \cdot \frac{1\text{ L}}{\square\text{ dL}} \cdot \frac{\square\text{ mL}}{1\text{ L}}$$
$$= \frac{\square \cdot 1000}{10}\text{ mL}$$
$$= 300\text{ mL}$$

PRÁCTICA *Use una regla métrica para medir cada objeto hasta el milímetro más cercano.*

37. La longitud de un billete de un dólar.

38. El ancho de un billete de un dólar.

Use una regla métrica para medir cada objeto hasta el centímetro más cercano.

39. La longitud de esta página (de arriba abajo).

40. La longitud de la palabra antiestablecimientarismo.

Convierta cada medida entre unidades métricas.

41. 3 m = _____ cm

42. 5 m = _____ cm

43. 5.7 m = _____ cm

44. 7.36 km = _____ dam

45. 0.31 dm = _____ cm

46. 73.2 m = _____ dm

47. 76.8 hm = _____ mm

48. 165.7 km = _____ m

49. 4.72 cm = _____ dm

50. 0.593 cm = _____ dam

51. 453.2 cm = _____ m

52. 675.3 cm = _____ m

53. 0.325 dm = _____ m

54. 0.0034 mm = _____ m

55. 3.75 cm = _____ mm

56. 0.074 cm = _____ mm

57. 0.125 m = _____ mm

58. 134 m = _____ hm

59. 675 dam = _____ cm

60. 0.00777 cm = _____ dam

61. 638.3 m = _____ hm

62. 6.77 cm = _____ m

63. 6.3 mm = _____ cm

64. 6.77 mm = _____ cm

65. 695 dm = _____ m

66. 6789 cm = _____ dm

67. 5689 m = _____ km

68. 0.0579 km = _____ mm

69. 576.2 mm = _____ dm

70. 65.78 km = _____ dam

71. 6.45 dm = _____ km

72. 6.57 cm = _____ mm

73. 658.23 m = _____ km

74. 0.0068 hm = _____ km

75. 3 g = _____ mg

76. 5 g = _____ cg

77. 2 kg = _____ g

78. 4000 g = ____ kg

79. 1000 kg = _____ g

80. 2 kg = _____ cg

81. 500 mg = _____ g

82. 500 mg = _____ cg

83. 3 kL = _____ L

84. 500 mL = _____ L

85. 500 cL = _____ mL

86. 400 L = ____ hL

87. 10 mL = _____ cc

88. 2000 cc = ____ L

APLICACIONES

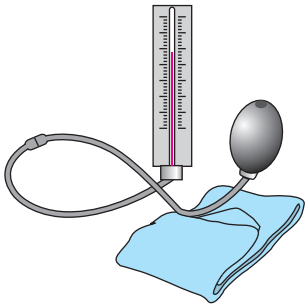
89. PATINAJE DE VELOCIDAD El norteamericano Eric Heiden ganó cinco medallas de oro, lo que no tenía precedente, llevándose las carreras de los 500 m, 1000 m, 1500 m, 5000 m y 10 000 m para hombres en los Juegos Olímpicos de Invierno en Lake Placid, Nueva York. Convierta cada longitud de carrera a kilómetros.

90. EL CANAL DE SUEZ El Canal de Suez de 163 km de largo conecta el Mediterráneo con el Mar Rojo. Proporciona un atajo para los barcos que operan entre los puertos europeos y asiáticos. Convierta la longitud del Canal de Suez a metros.

91. EL CENTRO HANCOCK El Centro John Hancock de Chicago tiene 100 pisos y 343 metros de altura. Dé su altura en hectómetros.

92. PESO DE UN BEBÉ Un bebé pesa 4 kilogramos. Indique su peso en centigramos.

93. CUIDADO DE LA SALUD La presión arterial se mide con un *esfigmanómetro*. La medida se lee en dos puntos y se expresa, por ejemplo, como 120/80. Esto indica una presión *sistólica* de 120 milímetros de mercurio y una presión *diastólica* de 80 milímetros de mercurio. Convierta cada medida a centímetros de mercurio.



94. JOYERÍA Una cadena de oro pesa 1500 miligramos. Calcule su peso en gramos.

95. RECIPIENTES ¿Cuántos decilitros de cerveza de raíz hay en dos botellas de 2 litros?

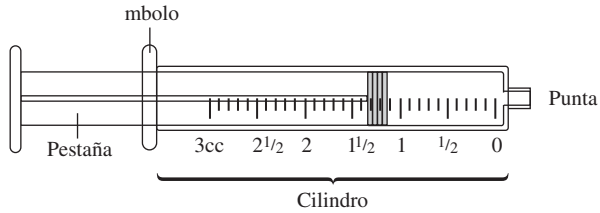
96. EMBOTELLADO ¿Cuántos litros de vino hay en una botella de 750 mL?

97. COMPRA DE ACEITUNAS El peso neto de un frasco de aceitunas es 284 gramos. Encuentre el número mínimo de frascos que se deben comprar para tener al menos 1 kilogramo de aceitunas.

98. COMPRA DE CAFÉ Una lata de Café Viena tiene un peso neto de 133 gramos. Encuentre el número mínimo de latas que se deben empacar para tener al menos una tonelada métrica de café. (*Sugerencia*: 1 tonelada métrica = 1000 kg.)

99. MEDICINA Un frasco de hidroclorotiazina contiene 60 tabletas. Si cada tableta contiene 50 miligramos de ingrediente activo, ¿cuántos gramos de ingrediente activo hay en cada frasco?

100. INYECCIONES La ilustración muestra una jeringa de 3 cc. Exprese su capacidad usando mililitros.



POR ESCRITO

101. Para cambiar 3.542 kilómetros a metros podemos mover el punto decimal en 3.452 tres cifras a la derecha para obtener 3542 metros. Explique por qué.

102. Para cambiar 7532 gramos a kilogramos podemos mover el punto decimal en 7532 tres lugares a la izquierda para obtener 7.532 kilogramos. Explique por qué.

103. Un centímetro es una centésima de metro. Haga una lista de palabras que comiencen con el prefijo *centi* o *cent* y escriba una definición para cada una.

104. Enliste las ventajas del sistema métrico de medida comparándolo con el sistema norteamericano. Ha habido varios intentos para hacer de uso general el sistema métrico en Estados Unidos. ¿Por qué cree que hayan sido infructuosos?

REPASO

105. Encuentre 7% de $342.72.

106. $32.16 es 8%, ¿de qué número?

107. Divida: $3\frac{1}{7} \div 2\frac{1}{2}$.

108. Simplifique: $3\frac{1}{7} + 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$.

6.5 Conversión entre unidades norteamericanas y unidades métricas

- Conversión entre unidades norteamericanas y unidades métricas
- Comparación de las unidades norteamericanas y unidades métricas de temperatura

A menudo es necesario convertir entre unidades norteamericanas y métricas. Por ejemplo, tenemos que convertir unidades para responder a las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es más alto, el pico Pikes (altura 14 110 pies) o el Matterhorn (altura 4478 metros)?
- ¿Pesa más una tina de 2 libras de mantequilla que una de 1 kilogramo?
- ¿Un cuarto de refresco es más o menos que un litro de refresco?

En esta sección discutimos cómo responder a estas preguntas.

Conversión entre unidades norteamericanas y unidades métricas

Podemos convertir entre unidades norteamericanas y unidades métricas de longitud usando la tabla siguiente.

Longitudes equivalentes	
Norteamericanas a métricas	**Métricas a Norteamericanas**
1 pulg ≈ 2.54 cm	1 cm ≈ 0.3937 pulg
1 pie ≈ 0.3048 m	1 m ≈ 3.2808 pie
1 yd ≈ 0.9144 m	1 m ≈ 1.0936 yd
1 mi ≈ 1.6093 km	1 km ≈ 0.6214 mi

EJEMPLO 1 **Etiquetas de ropa.** La figura 6.16 muestra una etiqueta cosida en unos pantalones hechos en México para su venta en Estados Unidos. Exprese el tamaño de la cintura hasta la pulgada más cercana.

FIGURA 6.16

Solución Necesitamos convertir de unidades métricas a norteamericanas. De la tabla vemos que hay 0.3937 pulgada en un centímetro. Para hacer la conversión sustituimos 0.3937 por 1 centímetro.

$$\begin{aligned} 81 \text{ centímetros} &= 81 \text{ (}\mathbf{centímetros}\text{)} \\ &\approx 81(\mathbf{0.3937\ pulg}) && \text{Sustituya 1 centímetro por 0.3937 pulgada.} \\ &\approx 31.8897 \text{ pulg} && \text{Haga la multiplicación.} \end{aligned}$$

La cintura mide 32 pulgadas hasta la pulgada más cercana.

Autoevaluación 1
Refiérase a la figura 6.16. ¿Cuál es el largo del pantalón hasta la pulgada más cercana?

Respuesta 30 pulg

EJEMPLO 2 **Elevaciones montañosas.** El pico Pikes, uno de los picos más famosos de las Montañas Rocallosas tiene una elevación de 14 110 pies. El Matterhorn, en los Alpes suizos se eleva hasta 4478 metros. ¿Qué montaña es más alta?

Solución Para poder hacer una comparación las elevaciones se tienen que expresar en las mismas unidades. Convertiremos la elevación del pico Pikes, que se da en pies, a metros.

$$\begin{aligned} 14\,110 \text{ pies} &= 14\,110 \text{ (}\mathbf{pies}\text{)} \\ &\approx 14\,110(\mathbf{0.3048\ m}) && \text{Sustituya 1 pie por 0.3048.} \\ &\approx 4\,300.728 \text{ m} && \text{Haga la multiplicación.} \end{aligned}$$

Como la elevación del pico Pikes es cerca de 4301 metros podemos concluir que el Matterhorn, con una elevación de 4478 m, es más alto.

Autoevaluación 2
¿Qué carrera es más larga, una de 500 m o una de 550 yardas?

Respuesta la carrera de 550 yardas

Podemos convertir entre unidades norteamericanas de peso y unidades métricas de masa usando la tabla a continuación.

Pesos y masas equivalentes	
Norteamericanas a métrica	**Métricas a norteamericanas**
1 oz ≈ 28.35 g	1 g ≈ 0.035 oz
1 lb ≈ 0.454 kg	1 kg ≈ 2.2 lb

Autoevaluación 3
Cambie 20 kilogramos a libras.

Respuesta 44 lb

EJEMPLO 3 Canvierta 50 libras a gramos.

Solución

$$\begin{aligned} 50 \text{ lb} &= 50(\mathbf{1\ lb}) \\ &= 50(\mathbf{16\ oz}) && \text{Sustituya 1 libra por 16 onzas.} \\ &= 50(16)(\mathbf{1\ oz}) \\ &\approx 50(16)(\mathbf{28.35\ g}) && \text{Sustituya 1 onza por 28.35 gramos.} \\ &\approx 22\,680 \text{ g} && \text{Haga la multiplicación.} \end{aligned}$$

Por tanto, 50 libras es igual a 22 680 gramos.

Autoevaluación 4
¿Quién pesa más: una persona que pesa 165 libras o una que pesa 76 kilogramos?

Respuesta la persona que pesa 76 kg

EJEMPLO 4 Empaques. ¿Pesa más una tina de 2 libras de mantequilla que una de 1 kg?

Solución Para saber cuál contiene más mantequilla podemos cambiar 2 libras a kilogramos.

$$\begin{aligned} 2 \text{ lb} &= 2(\mathbf{1\ lb}) \\ &\approx 2(\mathbf{0.454\ kg}) && \text{Sustituya 1 libra por 0.454 kilogramos.} \\ &\approx 0.908 \text{ kg} && \text{Haga la multiplicación.} \end{aligned}$$

Como una tina de 2 libras pesa sólo 0.908 kilogramo, la tina de 1 kilogramo pesa más.

Podemos convertir entre unidades norteamericanas y unidades métricas de capacidad usando la tabla a continuación.

Capacidades equivalentes	
Norteamericanas a métrica	Métricas a norteamericanas
1 fl oz ≈ 0.030 L	1 L ≈ 33.8 fl oz
1 pt ≈ 0.473 L	1 L ≈ 2.1 pt
1 qt ≈ 0.946 L	1 L ≈ 1.06 qt
1 gal ≈ 3.785 L	1 L ≈ 0.264 gal

Autoevaluación 5
Un estudiante compró una lata de 355 mL de cola. ¿Cuántas onzas de cola contiene?

Respuesta 12 oz

EJEMPLO 5 Refrescos. Una botella de 7UP contiene 750 mililitros. Convierta la medida a cuartos.

Solución Convertimos los mililitros a litros y luego litros a cuartos.

$$\begin{aligned} 750 \text{ mL} &= 750 \text{ } \cancel{\text{mL}} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ } \cancel{\text{mL}}} && \text{Use un factor de conversión de unidades: } \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} = 1. \\ &= \frac{750}{1000} \text{ L} && \text{Las unidades de mL se cancelan.} \\ &= \frac{3}{4} \mathbf{\ L} && \text{Simplifique la fracción: } \frac{750}{1000} = \frac{3 \cdot \overset{1}{\cancel{250}}}{4 \cdot \underset{1}{\cancel{250}}} = \frac{3}{4}. \\ &\approx \frac{3}{4}(\mathbf{1.06\ qt}) && \text{Sustituya 1 litro por 1.06 cuartos} \\ &\approx 0.795 \text{ qt} && \text{Haga las operaciones.} \end{aligned}$$

La botella contiene 0.795 cuartos.

De la tabla de capacidades equivalentes vemos que 1 litro es igual a 1.06 cuartos. En consecuencia, un litro de refresco es más que un cuarto de refresco.

EJEMPLO 6 **Comparación de precios.** Una botella de refresco de 2 cuartos cuesta \$1.89 y una botella de 1 L cuesta 97¢. ¿Cuál botella es mejor compra?

Solución Podemos convertir 2 cuartos a litros y encontrar el precio por litro de la botella de 2 cuartos.

$$\begin{aligned} 2 \text{ qt} &= 2(\mathbf{1\ qt}) \\ &\approx 2(\mathbf{0.946\ L}) \quad \text{Sustituya 1 cuarto por 0.946 litro.} \\ &\approx 1.892 \text{ L} \quad \text{Haga la multiplicación.} \end{aligned}$$

Por tanto, la botella de 2 cuartos contiene 1.892 litros. Para encontrar el precio por litro de la botella de 2 cuartos, dividimos $\frac{\$1.89}{1.892}$.

$$\frac{\$1.89}{1.892} \approx \$0.998942918$$

Como el precio por litro de la botella de 2 cuartos es un poco más que 99¢, la botella de 1 L que cuesta 97¢ es una mejor compra.

Autoevaluación 6
Treinta y cuatro onzas de vinagre añejo cuestan \$3.49. Una botella de 1 L del mismo vinagre cuesta \$3.17. ¿Cuál es mejor compra?

Respuesta la botella de 1 L.

Estudio en otros países PARA PENSAR A DETALLE

"Durante la década pasada el número de estudiantes de Estados Unidos que estudian en el extranjero se ha más que duplicado". De *The Open Doors 2003 Report*

En 2001/2002 un número récord de 160 920 estudiantes universitarios fueron acreditados por estudiar en el extranjero. Como los estudiantes que viajan a otros países casi con seguridad entran en contacto con el sistema métrico de medida, necesitan tener un entendimiento básico de las unidades métricas.

Suponga que un estudiante que estudia fuera del país necesita comprar los materiales escolares siguientes. Para cada artículo en rojo escoja las unidades métricas apropiadas.

1. Cuaderno de $8\frac{1}{2}$ pulg × 11 pulg:

216 metros × 279 metros 216 centímetros × 279 centímetros 216 milímetros × 279 milímetros

2. Una mochila que soporte 20 libras de libros:

9 kilogramos 9 gramos 9 miligramos

3. Frasco de $\frac{3}{4}$ de onza fluida de líquido corrector Liquid Paper:

22.5 hectolitros 2.5 litros 22.5 mililitros

Comparación de las unidades norteamericanas y unidades métricas de temperatura

En el sistema norteamericano medimos la temperatura usando grados Fahrenheit (°F). En el sistema métrico medimos la temperatura usando grados Celsius (°C). Estas dos

escalas se muestran en los termómetros de la figura 6.17. De la figura vemos que

- 212° F ≈ 100° C El agua hierve.
- 32° F ≈ 0° C El agua se congela.
- 5° F ≈ −15° C Un frío día de invierno.
- 95° F ≈ 35° C Un cálido día de verano.

Como hemos visto hay una fórmula que nos permite convertir de grados Fahrenheit a grados Celsius. Hay también una fórmula para convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit.

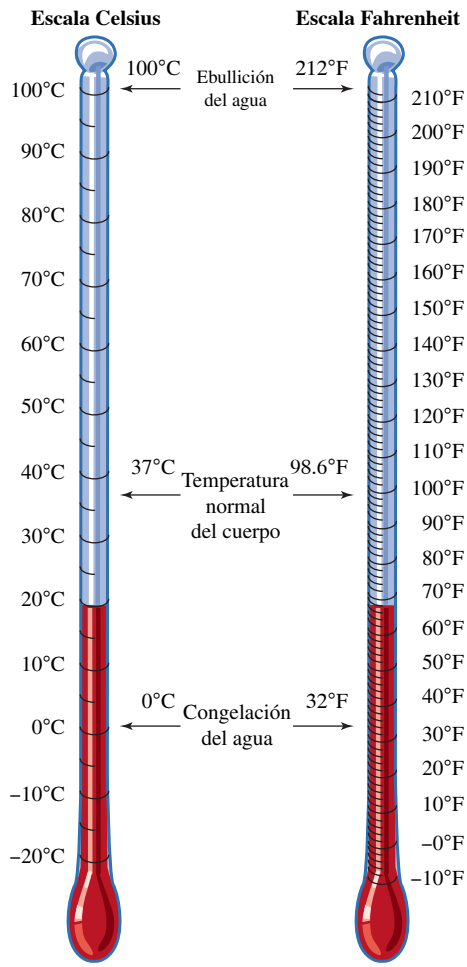


FIGURA 6.17

Fórmulas para la conversión de temperaturas

Si F es la temperatura en grados Fahrenheit y C es la temperatura correspondiente en grados Celsius, entonces

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \quad \text{y} \quad F = \frac{9}{5}C + 32$$

Autoevaluación 7
Un café caliente está a 110° F. Exprese esta temperatura en grados Celsius hasta el décimo más cercano.

Respuesta 43.3° C

EJEMPLO 7 **Baño.** El agua de un baño tibio está a 90° F. Encuentre la temperatura equivalente en grados Celsius.

Solución Sustituimos F por 90 en la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ y simplificamos.

$$C = \frac{5}{9}(\boldsymbol{F} - 32)$$

$$= \frac{5}{9}(\mathbf{90} - 32) \quad \text{Sustituya } F \text{ por 90.}$$

$$= \frac{5}{9}(58) \quad \text{Reste: } 90 - 32 = 58.$$

$$= 32.222\ldots \quad \text{Haga las cuentas.}$$

La temperatura equivalente es 32.2° C hasta el décimo más cercano de grado.

EJEMPLO 8 Un fabricante de lavaplatos recomienda que los platos sean enjuagados en agua caliente con una temperatura de 60° C. Exprese esta temperatura en grados Fahrenheit.

Solución Sustituimos C por 60 en la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ y simplificamos.

$$F = \frac{9}{5}\boldsymbol{C} + 32$$
$$= \frac{9}{5}(\mathbf{60}) + 32 \quad \text{Sustituya } C \text{ por 60.}$$
$$= \frac{540}{5} + 32 \quad \text{Multiplique: } \frac{9}{5}(60) = \frac{540}{5}.$$
$$= 108 + 32 \quad \text{Haga la división.}$$
$$= 140 \quad \text{Haga la suma.}$$

El fabricante recomienda que los platos se enjuaguen con agua a 140° F.

Autoevaluación 8
Para saber si un bebé tiene fiebre su mamá le toma la temperatura con un termómetro Celsius. Si la lectura es 38.8° C, ¿tiene fiebre el bebé? (*Sugerencia*: la temperatura normal del cuerpo es 98.6° F.)

Respuesta sí

Sección 6.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. En el sistema Norteamericano, las temperaturas se miden en grados _____. En el sistema métrico las temperaturas se miden en grados _____.
2. Las pulgadas y los centímetros son unidades usadas para medir _____. Los galones y los litros con unidades usadas para medir _____.

CONCEPTOS

3. ¿Qué es más largo?
   a. ¿Una yarda o un metro?
   b. ¿Un pie o un metro?
   c. ¿Una pulgada o un centímetro?
   d. ¿Una milla o un kilómetro?
4. ¿Qué es más pesado?
   a. ¿Una onza o un gramo?
   b. ¿Una libra o un kilogramo?
5. ¿Qué unidad de capacidad es más grande?
   a. ¿Una pinta o un litro?
   b. ¿Un cuarto o un litro?
   c. ¿Un galón o un litro?
6. a. ¿Qué fórmula se usa para cambiar de grados Celsius a grados Fahrenheit?
   b. ¿Qué fórmula se usa para cambiar de grados Fahrenheit a grados Celsius?

NOTACIÓN *Complete cada solución.*

7. Cambie 4500 pies a kilómetros.

   4500 pies = 4500(m)
   = m
   = 1.3716 km

8. Cambie 3 kilogramos a onzas.

   3 kg = 3(lb)
   = 3(2.2)(oz)
   = 105.6 oz

9. Cambie 8 litros a galones.

   8 L = 8(gal)
   = 2.112 gal

10. Cambie 70° C a grados Fahrenheit.

    $F = \frac{9}{5}C + 32$
    $= \frac{9}{5}(\quad) + 32$
    $=$ $+ 32$
    $= 158°$ F

PRÁCTICA *Haga las conversiones. Como la mayoría de las conversiones son aproximadas, las respuestas dependen del método que se use.*

11. 3 pies = cm
12. 7.5 yd = m
13. 3.75 m = pulg
14. 2.4 km = mi
15. 12 km = pies
16. 3212 cm = pies

17. 5000 pulg = ____ m
18. 25 mi = ____ km
19. 37 oz = ____ kg
20. 10 lb = ____ kg
21. 25 lb = ____ g
22. 7.5 oz = ____ g
23. 0.5 kg = ____ oz
24. 35 g = ____ lb
25. 17 g = ____ oz
26. 100 kg = ____ lb
27. 3 fl oz = ____ L
28. 2.5 pt = ____ L
29. 7.2 L = ____ fl oz
30. 5 L = ____ qt
31. 0.75 qt = ____ mL
32. 3 pt = ____ mL
33. 500 mL = ____ qt
34. 2000 mL = ____ gal
35. 50° F = ____ C
36. 67.7° F = ____ C
37. 50° C = ____ F
38. 36.2° C = ____ F
39. −10° C = ____ F
40. −22.5° C = ____ F
41. −5° F = ____ C
42. −10° F = ____ C

APLICACIONES

Como la mayoría de las conversiones son aproximadas, las respuestas dependen del método que se use.

43. EL MEDIO ORIENTE La distancia entre Jerusalén y Belén es de 8 kilómetros. Dé esta distancia en millas hasta la milla más cercana.

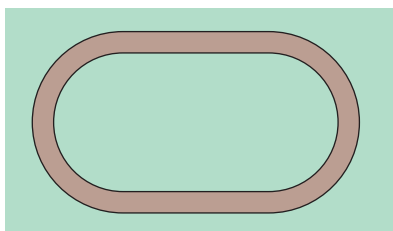
44. EL MAR MUERTO El Mar Muerto mide 80 kilómetros de largo. Determine esta distancia en millas hasta la milla más cercana.

45. CHITAS Un chita puede correr a 112 kilómetos por hora. Exprese esta velocidad en mph.

46. LEONES Un león puede correr a 50 mph. Exprese esta velocidad en kilómetros por hora.

47. MONTE WASHINGTON El pico más alto de las Montañas Blancas de New Hampshire es el Monte Washington con 6228 pies. De esta altura en kilómetros hasta el décimo más cercano.

48. PISTA Y CAMPO Las carreras de pista se realizan en una pista oval. Una vuelta de la pista usualmente es de 400 metros. Sin embargo, algunas pistas antiguas en Estados Unidos son óvalos de 440 yardas. ¿Son estos dos tipos de pistas de la misma longitud? Si no es así, ¿cuál es más larga?



49. CRECIMIENTO DEL PELO Cuando el pelo es corto su tasa de crecimiento promedia $\frac{3}{4}$ pulgada por mes. ¿Cuántos centímetros es esto al mes?

50. BALLENAS Una ballena asesina adulta puede llegar a pesar 12 000 libras y llegar a medir 25 pies. Cambie estas medidas a kilogramos y metros.

51. LEVANTAMIENTO DE PESAS La tabla enlista las mejores marcas de dos de los mejores levantadores de pesas. Cambie cada medida métrica de peso a libras. Redondee a la libra más cercana.

Nombre	Lugar	Peso levantado
Liz Willet	Ferndale, Washington	187 kg
Brian Siders	Charleston, W. Virginia	338 kg

52. PALABRAS DE SABIDURÍA Refiérase al cuadro. Convierta la primera medida métrica a onzas y la segunda a libras. ¿Qué dicho famoso resulta?

28.35 gramos de prevención vale 0.454 kilogramos de remedio

53. ONZAS Y ONZAS FLUIDAS

a. Hay 310 calorías en 8 onzas de pollo asado. Convierta 8 onzas a gramos.

b. Hay 112 calorías en un vaso de jugo fresco de naranja de Valencia al que le caben 8 onzas fluidas. Convierta 8 onzas fluidas a litros.

54. PISTA Y CAMPO Una bala pesa 7.264 kilogramos. De este peso en libras.

55. REGLAMENTOS POSTALES Se puede enviar un paquete con peso hasta de 70 libras por correo urgente. ¿Se puede enviar un paquete que pese 32 kilogramos por correo urgente?

56. NUTRICIÓN Refiérase a la etiqueta de nutrición mostrada para un paquete de avena. Cambie cada peso encerrado a onzas.

Información nutrimental
Tamaño de la porción: 1 paquete (46 g)
Porciones por paquete: 10

Cantidad por porción	
Calorías 170	Calorías de grasas 20
	%Valor Diario
Grasa total 2 g	**3%**
Grasa saturada 0.5 g	**2%**
Grasa poliinsaturada 0.5 g	
Grasa monoinsaturada 1 g	
Colesterol 0 mg	**0%**
Sodio 250 mg	**10%**
Carbohidratos totales 35 g	**12%**
Fibra dietética 3 g	**12%**
Fibra soluble 1 g	
Azúcares 16 g	
Proteína 4g	

57. PALABRAS DE SABIDURÍA Refiérase al cuadro. Convierta la primera medida métrica a onzas y la segunda a libras. ¿Qué dicho famoso resulta?

58. COMPARACIÓN DE PRECIOS ¿Qué compra es mejor? ¿3 galones de anticongelante por $10.35 o 12 litros de anticongelante por $10.50?

59. MANANTIALES CALIENTES Los manantiales calientes en el Parque Nacional de Hot Springs en Arkansas central emiten agua tan caliente como 143° F. Cambie esta temperatura a grados Celsius.

60. COCCIÓN DE CARNE Las carnes se deben cocinar a temperaturas lo suficientemente altas como para matar las bacterias dañinas. De acuerdo con la USDA y la FDA, la temperatura interna para los asados y los bisteces debiera ser al menos 145° F y para un ave entera debiera ser 180° F. Convierta estas temperaturas a grados Celsius. Redondee al grado siguiente.

61. TOMAR UN REGADERAZO Cuando se da uno un regaderazo, ¿qué temperatura del agua escogería? ¿15° C, 28° C o 50° C?

62. AGUA POTABLE Para un agua fría para beber, ¿qué temperatura escogería? ¿−2° C, 10° C o 25° C?

63. TIEMPO NEVOSO ¿A qué temperaturas podría nevar?: ¿−5° C, 0° C o 10° C?

64. AIRE ACONDICIONADO ¿A qué temperatura exterior encendería el aire acondicionado:
- **a.** 15° C?
- **b.** 20° C?
- **c.** 30° C?

POR ESCRITO

65. Explique cómo cambiar kilómetros a millas.

66. Explique cómo cambiar 50° C a grados Fahrenheit.

67. Estados Unidos son el único país industrializado del mundo que no usa oficialmente el sistema métrico. Algunas personas aseguran que esto le cuesta dinero a los negocios norteamericanos. ¿Lo cree usted? ¿Por qué?

68. ¿Qué significa la frase *una tabla de medidas equivalentes*?

REPASO *Realice cada operación.*

69. $\frac{3}{5} + \frac{4}{3}$

70. $\frac{3}{5} - \frac{4}{3}$

71. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}$

72. $\frac{3}{5} \div \frac{4}{3}$

73. $3.25 + 4.8$

74. $3.25 - 4.8$

75. $3.25 \cdot 4.8$

76. $4.8\overline{)15.6}$

CONCEPTO CLAVE

Proporciones

Una **proporción** es una afirmación de que dos razones o tasas son iguales.

Llene los espacios al establecer una proporción para resolver un problema.

1. AYUDANTES DEL MAESTRO Por cada 15 niños en el patio de recreo, una guardería requiere tener 2 ayudantes de maestro supervisando. ¿Cuántos ayudantes se requerirán para supervisar 75 niños?

Paso 1: Sea x = número de

_____.

Si comparamos el número de niños con el número de ayudantes, sabemos que las dos tasas deben ser iguales.

15 niños son a ☐ ayudantes como ☐ niños son a ☐ ayudantes.

Podemos expresar esto como una proporción.

Número de niños → $\frac{15}{\square} = \frac{75}{\square}$ ← Número de niños
Número de ayudantes → ← Número de ayudantes

En la proporción $\frac{15}{2} = \frac{75}{x}$, 15 y x son los *extremos* y 2 y 75 los *medios*. Después de establecer la proporción la resolvemos usando el hecho de que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Paso 2: Resuelva para x: $\frac{15}{2} = \frac{75}{x}$.

$\square \cdot x = 2 \cdot \square$	El producto de los extremos es igual al producto de los medios.
$15 \cdot x = \square$	Haga la multiplicación.
$\frac{15 \cdot x}{\square} = \frac{150}{\square}$	Divida ambos lados entre 15.
$x = \square$	Haga la división.

Para supervisar 75 niños se necesitan 10 ayudantes.

Paso 3: Para comprobar el resultado sustituimos x por 10 en $\frac{15}{2} = \frac{75}{x}$ y encontramos los productos cruzados.

$15 \cdot 10 = \mathbf{150}$ $\quad 2 \cdot 75 = \mathbf{150}$

$\frac{15}{2} \stackrel{?}{=} \frac{75}{10}$

Como los productos cruzados son iguales, la solución es 10.

Formule y resuelva cada problema usando una proporción.

2. ESTACIONAMIENTO Un reglamento de la ciudad requiere que las compañías tengan 10 espacios de estacionamiento por cada 12 empleados. ¿Cuántos espacios se necesitarán si una compañía emplea 450 personas?

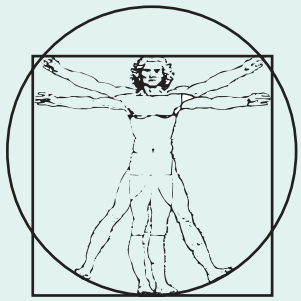
3. PELÍCULAS ANIMADAS Cada 2 segundos pasan por el proyector 3 pies de película animada. ¿Cuántos pies de película hay en un filme que dura 120 minutos?

4. COSMÉTICOS Un frasco de 0.5 onzas fluidas de esmalte para uñas cuesta $4.50. ¿Cuánto costaría un galón de esmalte para uñas? (*Sugerencia*: 1 galón = 128 onzas fluidas)

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

SECCIÓN 6.1

HISTORIA DEL ARTE La ilustración muestra un dibujo hecho por Leonardo da Vinci (1452-1519) de una figura humana dentro de un cuadrado. Se ve que la altura del hombre y la longitud de sus brazos abiertos son iguales. Esto es, su razón es 1 a 1. Use una cinta métrica para determinar esta razón para cada miembro de su grupo. Trabaje en términos de pulgadas. ¿Hay alguna razón exactamente igual a 1?



SECCIÓN 6.2

AGRANDAMIENTOS Se puede duplicar o agrandar un dibujo con el método de la *transferencia de cuadriculado*. Para agrandar el dibujo del cocinero mostrado en la ilustración (a), empiece copiando los trazos en el cuadrado de la esquina inferior derecha en su cuadrado correspondiente en la cuadrícula agrandada de la ilustración (b). Uno a uno copie los contenidos de cada cuadrado del dibujo original en su contraparte agrandada.

SECCIÓN 6.3

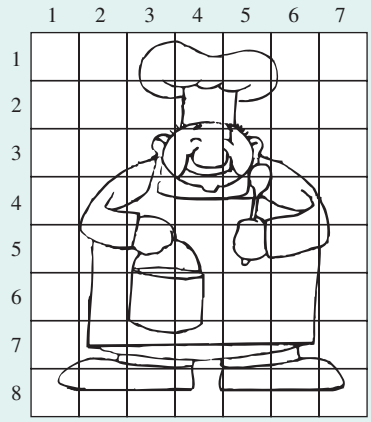
CLÁSICOS DE DISNEY La película *20 000 leguas de viaje submarino* es una película de ciencia ficción de suspenso sobre el capitán Nemo y la tripulación del submarino Nautilus. Use el hecho de que 1 milla $= \frac{1}{3}$ legua para expresar un recorrido de 20 000 leguas en pies.

SECCIÓN 6.4

ERROR MÉTRICO En 1999, la NASA perdió el Orbitador Marciano Climático de $125 millones porque el equipo de ingenieros de Lockheed Martin usaron unidades norteamericanas de medida mientras que el equipo de la NASA usó el sistema métrico. Use la internet para investigar este incidente y haga un reporte para su clase.

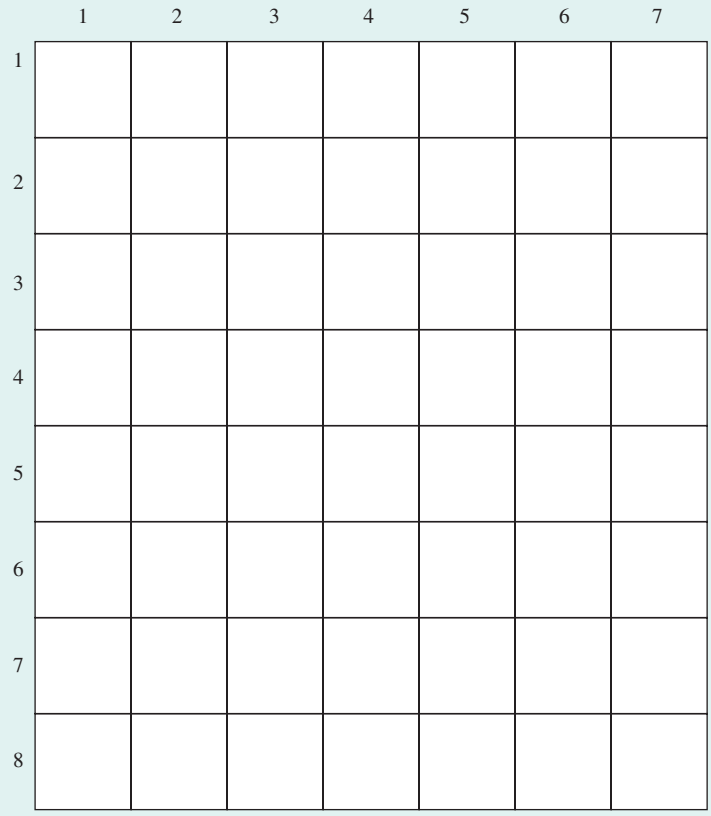
SECCIÓN 6.5

LA VERDAD EN EL ETIQUETADO Haga que cada miembro de su grupo traiga dos artículos — uno cuya etiqueta de producto indique capacidad y otro que indique peso. Por ejemplo, una botella de shampoo podría contener 15 onzas fluidas (444 mL) o una lata de sopa podría pesar 1 libra 3 onzas (539 g). Intercambie sus artículos con otra persona de su grupo. Compruebe la exactitud de cada etiqueta convirtiendo de unidades norteamericanas a unidades métricas.



(a)

El dibujo original se traza sobre un cuadriculado con cuadrados de $\frac{1}{4}$ de pulgada. El dibujo agrandado se traza usando una cuadrícula con cuadros de $\frac{1}{2}$ pulgada. ¿Cuánto se agrandó el dibujo original?



(b)

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 6.1 *Razones*

CONCEPTOS

Una *razón* es un cociente de dos números o un cociente de dos cantidades que tienen las mismas unidades.

Una *tasa* es una comparación de dos cantidades con unidades diferentes.

Un *costo unitario* es una comparación del costo de un artículo a su cantidad.

EJERCICIOS DE REPASO

Exprese cada frase como una razón en su mínima expresión.

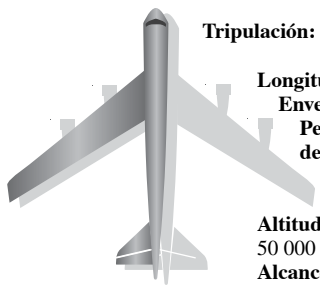
1. La razón de 4 pulgadas a 12 pulgadas

2. La razón de 8 onzas a 2 libras

3. 21:14

4. 24 a 36

5. AEROPLANOS Las especificaciones de la Fortaleza Volante Boeing B-52 se dan en la ilustración. ¿Cuál es la razón de la envergadura del avión a su largo?



Tripulación: 6
Longitud: 160 pies
Envergadura de alas: 185 pies
Peso máximo para despegar: 488 000 libras
Velocidad máxima: 595 mph
Altitud máxima: más de 50 000 pies
Alcance: 7500 mi

6. ESCALAS DE PAGO Encuentre la tasa de pago por hora de un estudiante que ganó $333.25 por 43 horas de trabajo.

7. COMPARACIÓN DE PRECIOS La mezcla de nueces viene en empaque de lata de 12 onzas y se vende en $4.95, o una lata de 8 onzas que se vende en $3.25. ¿Cuál es la mejor compra?

SECCIÓN 6.2 *Proporciones*

Una *proporción* es una afirmación de que dos razones (o tasas) son iguales.

En cualquier proporción el producto de los *extremos* es igual al producto de los medios.

Cuando dos pares de números forman una proporción decimos que los números son *proporcionales*.

Considere la proporción $\frac{5}{15} = \frac{25}{75}$.

8. ¿Qué término es el cuarto término?

9. ¿Cuál término es el segundo término?

Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es una proporción.

10. $\frac{15}{29} = \frac{105}{204}$

11. $\frac{17}{7} = \frac{204}{84}$

Determine si los números son proporcionales.

12. 5, 9 y 20, 36

13. 7, 13 y 29, 54

Si se conocen tres términos de una proporción, se puede encontrar el término faltante.

Resuelva las proporciones.

14. $\frac{12}{18} = \frac{3}{x}$

15. $\frac{4}{x} = \frac{2}{8}$

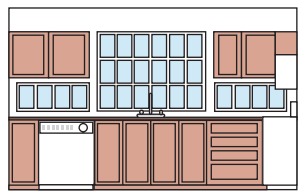
16. $\frac{4.8}{6.6} = \frac{x}{9.9}$

17. $\frac{-0.08}{x} = \frac{0.04}{0.06}$

18. CAMIONETAS Una camioneta pickup Dodge Ram puede recorrer 35 millas con 2 galones de gasolina. ¿Qué tan lejos puede llegar con 11 galones?

19. CONTROL DE CALIDAD En un proceso de manufactura 12 de 66 partes salieron defectuosas. ¿Cuántas partes defectuosas se esperarían en una producción de 1650 partes?

20. DIBUJOS A ESCALA La ilustración muestra el dibujo de un arquitecto de una cocina usando una escala de $\frac{1}{8}$ pulgada a 1 pie ($\frac{1}{8}''$:1′0″). En el dibujo la longitud de la cocina es de $1\frac{1}{2}$ pulgadas. ¿Cuánto mide la cocina real? (el símbolo ″ significa pulgada y ′ significa pie.)



CORTE B B

ESCALA: $\frac{1''}{8}$ = 1'0"

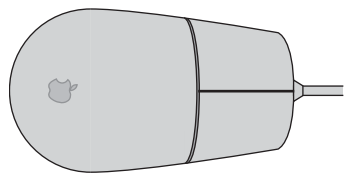
SECCIÓN 6.3 *Unidades norteamericanas de medida*

Las unidades norteamericanas de medida de longitud son *pulgadas, pies, yardas* y *millas*.

12 pulg = 1 pie
3 pies = 1 yd
36 pulg = 1 yd
5280 pies = 1 mi

Los factores de conversión de unidades tienen un valor de 1.

21. Use una regla para medir la longitud del ratón de la computadora hasta el cuarto de pulgada más cercano.



22. Escriba dos factores de conversión de unidades usando el hecho de que 1 mi = 5280 pies.

Multiplicar una medida por un factor de conversión de unidades no cambia la medida: sólo cambia las unidades de medida.

Haga las conversiones.

23. 5 yardas a pies

24. 6 yardas a pulgadas

25. 66 pulgadas a pies

26. 25.5 pies a pulgadas

27. 9240 pies a millas

28. 1 milla a yardas

Las unidades norteamericanas comunes de peso son *onzas, libras* y *toneladas*.

16 oz = 1 lb
2000 lb = 1 ton

Haga las conversiones.

29. 32 onzas a libras

30. 17.2 libras a onzas

31. 3 toneladas a onzas

32. 4500 libras a toneladas

Las unidades norteamericanas comunes de capacidad son las *onzas fluidas, tazas, pintas, cuartos* y *galones*.

1 c = 8 pies oz
1 pt = 2 c
1 qt = 2 pt
1 gal = 4 qt

Las unidades de tiempo son *segundos, minutos, horas* y *días*.

1 min = 60 seg
1 h = 60 min
1 día = 24 h

Haga las conversiones.

33. 5 pintas a onzas fluidas
34. 8 tazas a galones
35. 17 cuartos a tazas
36. 176 onzas fluidas a cuartos
37. 5 galones a pintas
38. 3.5 galones a tazas

Haga las conversiones.

39. 20 minutos a segundos
40. 900 segundos a minutos
41. 200 horas a días
42. 6 horas a minutos
43. 4.5 días a horas
44. 1 día a segundos

45. RASCACIELOS Las Torres Sears en Chicago tiene 1454 pies de altura. Exprese esta altura en yardas.

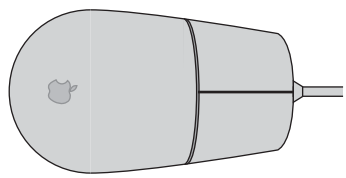
46. EMBOTELLADO Un mágnum es una botella de vino de 2 cuartos. ¿Cuántos mágnum se necesitan para embotellar 50 galones de vino?

SECCIÓN 6.4 *Unidades métricas de medida*

Las unidades métricas comunes de longitud son *milímetro, centímetro, decímetro, decámetro, hectómetro* y *kilómetro*.

1 mm = $\frac{1}{1000}$ m
1 cm = $\frac{1}{100}$ m
1 dm = $\frac{1}{10}$ m
1 dam = 10 m
1 hm = 100 m
1 km = 1000 m

47. Use una regla métrica para medir la longitud del ratón de computadora hasta el centímetro más cercano.



48. Escriba dos factores de conversión de unidades usando el hecho de que 1 km = 1000 m.

Haga las conversiones.

49. 475 centímetros a metros
50. 8 metros a milímetros
51. 3 decámetros a kilómetros
52. 2 hectómetros a decímetros
53. 5 kilómetros a hectómetros
54. 2500 metros a hectómetros

Las unidades métricas comunes de masa son *miligramos, centigramos, decigramos, gramos* y *kilogramos*.

1 mg = $\frac{1}{1000}$ g
1 cg = $\frac{1}{100}$ g
1 g = $\frac{1}{1000}$ kg

Haga las conversiones.

55. 7 centigramos a miligramos
56. 800 centigramos a gramos
57. 5425 gramos a kilogramos
58. 5425 gramos a miligramos
59. 7500 miligramos a gramos
60. 5000 centigramos a kilogramos

61. TYLENOL Un frasco de Tylenol extra fuerte contiene 100 tabletas de 500 miligramos cada una. ¿Cuántos gramos de Tylenol hay en el frasco?

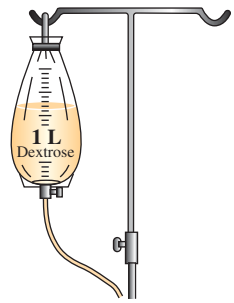
Las unidades métricas comunes de capacidad son *mililitros, centilitros, decilitros, litros, hectolitros* y *kilolitros*.

$1\text{ mL} = \frac{1}{1000}\text{ L}$
$1\text{ cL} = \frac{1}{100}\text{ L}$
$1\text{ dL} = \frac{1}{10}\text{ L}$
$1\text{ L} = 1000\text{ cc}$
$1\text{ hL} = 100\text{ L}$
$1\text{ kL} = 1000\text{ L}$

Haga las conversiones.

62. 150 centilitros a litros
63. 3250 litros a kilolitros
64. 1 hectolitro a decilitros
65. 400 mililitros a centilitros
66. 2 kilolitros a hectolitros
67. 4 decilitros a mililitros

68. CIRUGÍA Una solución de dextrosa se administra a un paciente por vía intravenosa usando el aparato mostrado. ¿Cuántos mililitros de solución tiene la bolsa de suero?



SECCIÓN 6.5

Conversión entre unidades norteamericanas y unidades métricas

Podemos convertir entre unidades Norteamericanas y métricas usando lo siguiente:

1 pulg ≈ 2.54 cm
1 pie ≈ 0.3048 m
1 yd ≈ 0.9144 m
1 mi ≈ 1.6093 km
1 cm ≈ 0.3937 pulg
1 m ≈ 3.2808 pie
1 m ≈ 1.0936 yd
1 km ≈ 0.6214 mi

1 oz ≈ 28.35 g
1 lb ≈ 0.454 kg
1 g ≈ 0.035 oz
1 kg ≈ 2.2 lb

1 fl oz ≈ 0.030 L
1 pt ≈ 0.473 L
1 qt ≈ 0.946 L
1 gal ≈ 3.785 L
1 L ≈ 33.8 fl oz
1 L ≈ 2.1 pt
1 L ≈ 1.06 qt
1 L ≈ 0.264 gal

Dos unidades usadas para medir temperatura son los grados Fahrenheit y los grados Celsius

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

69. NATACIÓN Las piscinas de tamaño olímpico son de 50 metros de largo. Exprese esta distancia en pies.
70. EDIFICIOS ALTOS Las Torres Sears tienen 443 metros de altura y el edificio Empire State tiene 1250 pies de alto. ¿Cuál tiene mayor altura?
71. COLONIZADORES DEL OESTE La Ruta de Oregon era la ruta por tierra que usaron los pioneros entre 1840 y 1870 para llegar al territorio de Oregon. Abarcaba 1930 millas desde Independence, Missouri, a Oregon City, Oregon. Encuentre esta distancia hasta el kilómetro más cercano.
72. AIR JORDAN Michael Jordan mide 6 pies, 6 pulgadas de estatura. Exprese su estatura en centímetros.

Realice las conversiones.

73. 30 onzas a gramos
74. 15 kilogramos a libras
75. 25 libras a gramos (Redondee al millar más cercano)
76. 2000 libras a kilogramos (Redondee a la decena más cercana)

77. OSOS POLARES Al nacer los cachorros de oso polar pesan menos que los bebés humanos, aproximadamente 910 gramos. Convierta esto a libras.
78. AGUA EMBOTELLADA El agua embotellada LaCroix® se puede comprar en botellas de 17 onzas. El agua Mountain Valley® se puede comprar en botellas de medio litro. ¿Qué botella contiene más agua?
79. COMPARACIÓN DE PRECIOS Un galón de blanqueador cuesta $1.39. Una botella económica de 5 litros cuesta $1.80. ¿Cuál es mejor compra?

80. Cambie 77° F a grados Celsius.
81. ¿Qué temperatura es apropiada para nadar: 10° C, 30° C, 50° C o 70° C?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6

Escriba cada frase como una razón en su mínima expresión.

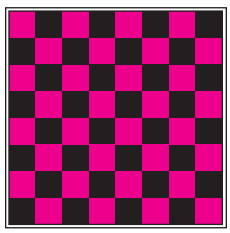
1. La razón de 6 a 8 pies.

2. La razón de 8 onzas a 3 libras.

3. COMPARACIÓN DE PRECIOS Dos libras de café se pueden comprar en $3.38 y una lata de 5 libras se puede comprar en $8.50. ¿Cuál es mejor compra?

4. COSTOS DEL SERVICIO Una familia usó 675 kilowatts hora de electricidad durante un mes de 30 días. Encuentre la tasa de consumo eléctrico en kilowatts hora por día.

5. DAMAS ¿Cuál es la razón del número de cuadrados rojos al número de cuadrados negros para el tablero de damas mostrado? Exprese su respuesta de tres formas: como una fracción, usando dos puntos y usando la palabra *a*.



Determine si las afirmaciones son proporciones.

6. $\frac{25}{33} = \frac{350}{460}$

7. $\frac{2.2}{3.5} = \frac{1.76}{2.8}$

8. ¿Son proporcionales los números 7, 15 y 245, 525?

Resuelva las proporciones.

9. $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$

10. $\frac{15.3}{x} = \frac{3}{12.4}$

11. $\frac{0.07}{-0.5} = \frac{x}{1.5}$

12. $\frac{25}{0.1} = \frac{50}{x}$

13. COMPRAS Si 13 onzas de té cuestan $2.79, ¿cuánto esperaría pagar por 16 onzas?

14. COCINA Una receta requiere $\frac{2}{3}$ de taza de azúcar y 2 tazas de harina. ¿Cuánta azúcar debiera usarse con 5 tazas de harina?

15. Convierta 180 pulgadas a pies.

16. HERRAMIENTAS Si una cinta de medir de 25 pies está completamente extendida, ¿cuántas yardas abarca?

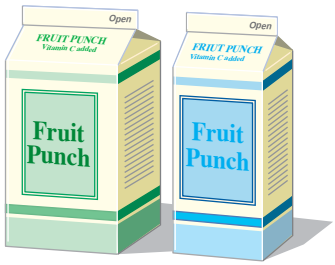
17. Convierta 10 libras a onzas.

18. Un carro pesa 1.6 toneladas. Encuentre su peso en libras.

19. ¿Cuántas onzas fluidas hay en un envase de cartón de 1 galón de leche?

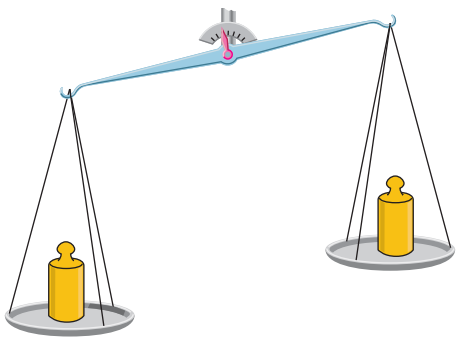
20. LITERATURA Una excelente obra de las primeras de ciencia ficción es el libro *Alrededor del mundo en 80 días* de Julio Verne (1828-1905). Convierta 80 días a minutos.

21. Se muestran envases de bebida de frutas de un cuarto y un litro. ¿Cuál es el envase de 1 litro?



22. Las figuras de abajo muestran los tamaños relativos de una yarda y un metro. ¿Cuál es el metro?

23. Se colocan en la balanza mostrada una onza y un gramo. ¿De qué lado está el gramo?



24. PATINAJE DE VELOCIDAD La norteamericana Bonnie Blair ganó medallas de oro en la competencia de 500 metros de patinaje de velocidad en los Juegos Olímpicos de Invierno de 1998, 1992 y 1994. Convierta la longitud de la carrera a kilómetros.

25. ¿Cuántos centímetros hay en 5 metros?

26. Convierta 8000 centigramos a kilogramos.

27. Convierta 70 litros a mililitros.

28. RECETAS MÉDICAS Un frasco contiene 50 tabletas cada una con 150 mg de medicamento. ¿Cuántos gramos de medicina hay en el frasco?

29. ¿Qué distancia es mayor?: ¿una carrera de 100 yardas o una de 80 metros?

30. ¿Qué persona pesa más?: ¿Jim que pesa 160 libras o Ricardo que pesa 72 kilogramos?

31. COMPARACIÓN DE PRECIOS Una botella de refresco de 2 cuartos cuesta $1.73 y una botella de 1 litro cuesta 89¢. ¿Cuál es mejor compra? (*Sugerencia:* 1 cuarto = 0.946 litro.)

32. COCCIÓN DE CARNE La agencia USDA recomienda que el pavo se cocine a una temperatura de 83° C. Cámbielo a grados Fahrenheit. Por seguridad, redondéelo al siguiente grado. (*Sugerencia:* $F = \frac{9}{5}C + 32$.)

33. ¿Qué es una escala de dibujo? Dé un ejemplo.

34. Explique los beneficios del sistema métrico de medida en comparación con el sistema norteamericano.

CAPÍTULOS 1–6 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

1. Escriba 64 502 en notación expandida.

2. Divida: $37\overline{)743}$.

3. RECLUTAMIENTO La tabla muestra cómo el ejército de Estados Unidos logró sus metas de reclutamiento en 2004. Complete la tabla. Use un número negativo para denotar una baja en sus reclutamientos.

	Meta	Reclutamientos	Resultado
Activo	77 000	77 587	
Reserva	21 000	21 278	
Guardia Nacional	56 000	49 210	

Fuente: Ejército de Estados Unidos

4. Evalúe las expresiones, si es posible.

a. $0 + (-8)$ **b.** $\frac{-8}{0}$

c. $0 - |-8|$ **d.** $\frac{0}{-8}$

e. $0 - (-8)$ **f.** $0(-8)$

5. GOLF Tiger Woods ganó el Abierto de Estados Unidos número 100 en junio de 2000 por el margen más amplio de la historia de ese torneo. Si tiró 12 bajo par (-12) y el finalista en segundo lugar, Miguel Ángel Jiménez tiró 3 sobre par $(+3)$, ¿cuál fue el margen de victoria de Tiger?

6. Evalúe: -3^2 y $(-3)^2$.

7. Evalúe: $2 + 3[5(-6) - (1 - 10)]$.

Haga las operaciones.

8. $25 \cdot 100$

9. $25 \div 100$

10. $1.3 \cdot 2.7$

11. $85.34 \div 3.4$

12. $24 - 23.81$

13. DIRECTORIOS TELEFÓNICOS Un conductor sale de una bodega en la mañana con 500 directorios telefónicos nuevos como carga en su camión. Su ruta de entrega consistió en edificios de oficinas cada uno de los cuales recibiría 5 directorios. El conductor regresó al final del día con 105 directorios en el camión. ¿En cuántos edificios entregó los directorios?

14. ¿Cuál es la fórmula para el área de un triángulo?

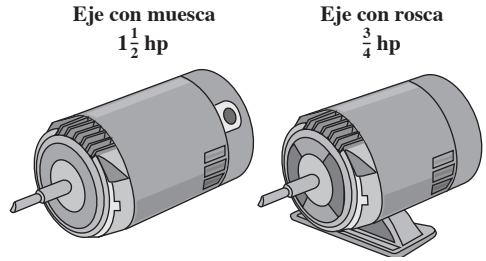
15. Simplifique: $\frac{16}{20}$.

16. Exprese $\frac{9}{10}$ como una fracción equivalente con denominador 60.

17. Divida: $-\frac{7}{8} \div \frac{7}{8}$.

18. ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$?

19. MOTORES ¿Cuál es la diferencia en caballos de potencia (hp) entre los dos motores que se muestran?



Determine si la expresión es una proporción.

20. $\frac{25}{33} = \frac{350}{460}$

21. $\frac{22}{35} = \frac{176}{280}$

22. Escriba el tercer término de la proporción $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

23. ¿Son proporcionales los números 7, 15 y 245, 525?

24. Resuelva la proporción: $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$.

25. CALENTAMIENTO GLOBAL La temperatura promedio en Estados Unidos de marzo a mayo de 2000 estableció un récord de 55.5° F. Esto fue 0.4 grados más cálido que el récord previo registrado en 1910. ¿Cuál fue el récord previo de temperatura primaveral?

26. Evalúe: $3\sqrt{25} + 4\sqrt{4}$.

27. Escriba $\frac{1}{12}$ como decimal.

28. 16 es ¿qué porcentaje de 24?

29. ¿Cuál es la fórmula del interés simple?

30. . Complete la tabla.

Porcentaje	Decimal	Fracción
	0.99	
1.3%		
		$\frac{5}{16}$

31. VENTA DE GUITARRAS ¿Cuál es el precio normal y la tasa de descuento para la guitarra que se muestra?

32. Exprese la frase "3 pulgadas a 15 pulgadas" como una razón en su mínima expresión.

33. GUÍA DE SOBREVIVENCIA

a. Una persona puede soportar cerca de 40 días sin alimento. ¿Cuántas horas son?

b. Una persona puede soportar cerca de 3 días sin agua. ¿Cuántos minutos son?

c. Una persona puede soportar no respirar oxígeno cerca de 8 minutos. ¿Cuántos segundos son?

34. Convierta 40 onzas a libras.

35. Convierta 2.4 metros a milímetros.

36. Convierta 320 gramos a kilogramos.

37. **a.** A cuál le cabe más: ¿a una botella de 2 litros o a una botella de 1 galón?

b. Qué mide más: ¿una yarda o un metro?

38. MATERIALES PARA CONSTRUCCIÓN Cuál es mejor compra: ¿un saco de cemento de 94 libras en $4.48 o un saco de 45 kilogramos en $4.56?

CAPÍTULO 7

Estadística descriptiva

7.1 Lectura de gráficas y tablas

7.2 Media, mediana y moda

Concepto clave: media, mediana y moda

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso

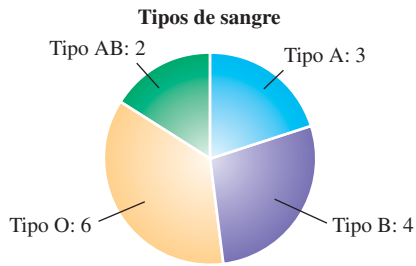
CORBIS

Cada diez años el gobierno federal lleva a cabo una encuesta, llamada censo, para recolectar información sobre la población de Estados Unidos. En todo el país, se les pide a los miembros de hogares, así como a los individuos, llenar un cuestionario con su edad, género y raza. La Oficina del Censo reúne los datos y luego usa una rama de las matemáticas llamada *estadística* para examinar la información. Se publica un reporte del censo que presenta los resultados en tablas y gráficas.

Verifique sus conocimientos

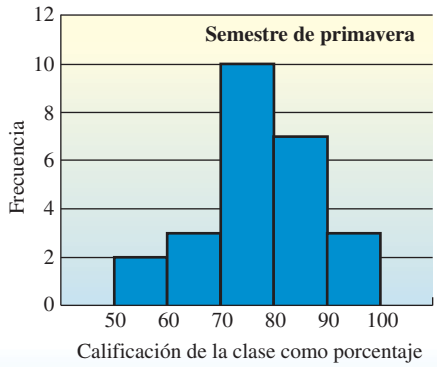
1. El histograma es un tipo de gráfica de _____.
2. Un _____ es similar a una gráfica de barras, pero las barras están formadas por dibujos donde cada dibujo representa una cantidad.
3. Un polígono de _____ es un tipo especial de gráfica de líneas que se forma a partir de un histograma.
4. A la suma de varios valores dividida entre el número de valores se le llama _____ de la distribución.
5. La _____ de varios valores escritos en orden ascendente es el valor medio.
6. Al valor que aparece más a menudo en una distribución se le llama la _____ de la distribución.

Refiérase a la gráfica que ilustra los tipos de sangre de una muestra de individuos.



7. ¿Qué tipo de gráfica se muestra?
8. ¿Cuántos individuos tienen tipo de sangre B?
9. ¿Cuántos individuos están en el grupo muestra?
10. ¿Qué porcentaje del grupo tiene sangre tipo A?
11. ¿Cuál es el grupo que presenta el mayor tipo de sangre? ¿Cuál es el menor?

Refiérase a la gráfica que ilustra la distribución de calificaciones de una clase.



12. ¿Qué tipo de gráfica se muestra?
13. ¿Cuántos individuos lograron calificaciones en el intervalo 60-70?
14. ¿Cuántos individuos obtuvieron al menos 80?
15. ¿Qué porcentaje del grupo obtuvo calificaciones en el intervalo 60-70?
16. ¿Cuántos alumnos obtuvieron al menos 80?
17. ¿Qué porcentaje de la clase tuvo calificaciones inferiores a 70?

A un grupo masculino de universitarios se le encuestó para determinar cuántos pares de zapatos tenían. Los resultados de la encuesta fueron:

5, 8, 3, 5, 7, 9, 4, 9, 10, 7, 9

18. Encuentre el promedio o media aritmética de zapatos. Redondee al par más cercano.
19. Encuentre el número de la mediana de zapatos.
20. Encuentre la moda de la lista.
21. ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central se vería afectada si se elimina el 10 de la lista?
22. ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central se afectaría si se quita 3 de la lista?

Taller de habilidades para el estudio

AYUDA EXTRACLASE

¿Le ha pasado alguna vez que comprendía todo lo que su instructor le comentaba en clase y cuando se iba a casa e intentaba resolver un problema de tarea no sabía qué hacer? Esta es una queja común entre los estudiantes de matemáticas. La clave para ser un estudiante de matemáticas exitoso está en ocuparse de estos problemas antes de enfrentarse a material nuevo; por esta razón es bueno que usted sepa qué recursos hay fuera de clase.

Horas de asesoría con su profesor. Su profesor puede disponer de algunas horas de apoyo en ciertos días de la semana. El propósito de estas horas es estar disponible para ayudar a los estudiantes con sus preguntas. Usualmente estas horas de estudio se indican en su programa de estudios y no es necesario hacer una cita para ver a su instructor dentro de estos horarios. Cuando visite a su instructor en horario de oficina, haga una lista de preguntas que le estén causando problemas y trate de señalar exactamente en qué parte del proceso está tendiendo los problemas. Esto le ayudará a su profesor para responder a sus preguntas de manera eficiente y efectiva.

Centros independientes de asesoría. Muchas universidades tienen centros independientes donde los estudiantes pueden hacer citas para ver a un asesor o tutor, ya sea individualmente o en grupos de estudiantes que lleven la misma clase. Usualmente, los centros de asesoría ofrecen sus servicios en forma gratuita y operan en horarios normales. Incluso si usted no tiene dificultades mayores con sus tareas, o si le falta confianza o presenta mucha ansiedad o nerviosismo, sería buena idea programar reuniones regulares con un tutor. Cuando visite a su asesor, lleve la lista de preguntas que detallen en qué parte del proceso tiene dificultades.

Laboratorios de matemáticas. Algunas universidades tienen laboratorios de matemáticas o centros de aprendizaje a los que pueden acudir los estudiantes a su conveniencia para que se les respondan sus preguntas o pasar el tiempo y trabajar en sus tareas. Si su universidad cuenta con un centro similar, trate de organizar su calendario de estudio para pasar algún tiempo ahí resolviendo sus tareas. Es muy útil tener una persona que pueda estar disponible y así responder a sus preguntas en el momento en que surjan.

Grupos de estudio. Los grupos de estudio son grupos de compañeros de clase que se reúnen fuera de clase para discutir problemas de tarea o para estudiar para los exámenes. Los grupos de estudio trabajan mejor cuando son relativamente pequeños (no más de cuatro miembros), cuando se reúnen regularmente y cuando siguen estos lineamientos:

- Los miembros deben haber resuelto (o al menos intentado) todos los problemas de la tarea antes de la reunión.
- Ninguna persona debe ser responsable de hacer toda la tarea o dar todas las explicaciones.
- El grupo debe reunirse en un lugar donde sus miembros puedan desenvolverse y hablar. No planeen las sesiones de trabajo en el interior de la biblioteca.
- Los miembros del grupo deben practicar el expresar con palabras y la explicación de los procesos y conceptos a otros compañeros del grupo de estudio. La mejor manera de aprender realmente un tema es cuando se explica a alguien más.

TAREA

1. Apunte el horario de asesorías de su profesor, no olvide apuntar la ubicación de su oficina. Luego haga una visita a su instructor en su oficina esta semana incluso si no tiene preguntas de la tarea.
2. Apunte las horas en que opera el centro independiente de asesoría de su universidad, investigue dónde se localiza y el procedimiento a seguir para realizar una cita con el instructor en turno.
3. ¿Su universidad tiene un laboratorio de matemáticas o un centro de aprendizaje? En caso afirmativo, apunte el horario de operación, su ubicación y entérese del reglamento interno.
4. Encuentre al menos otros dos estudiantes con los que se pueda reunir en un horario que sea mutuamente conveniente para un grupo de estudio. Planee reunirse dos días antes que tenga que entregar su tarea y siga los lineamientos que se mencionan con anterioridad. Una vez que el grupo se haya reunido, evalúe qué tal funcionó. ¿Hay algo que pudiera hacer su grupo para que funcione mejor la siguiente vez?

Los diarios y las revistas presentan con bastante frecuencia información en forma de gráficas y tablas. En este capítulo mostramos cómo se puede obtener información leyendo las gráficas. Después discutimos tres medidas de tendencia central: la media, la mediana y la moda.

7.1 Lectura de gráficas y tablas

• Lectura de datos provenientes de tablas • Lectura de gráficas de barras • Lectura de pictografías o gráficas pictográficas • Lectura de gráficas circulares • Lectura de gráficas de líneas • Lectura de histogramas y de polígonos de frecuencias

A menudo se dice que una imagen vale mil palabras. En esta sección mostramos cómo leer información que proviene de ciertas imágenes matemáticas denominadas *gráficas.*

Lectura de datos provenientes de tablas

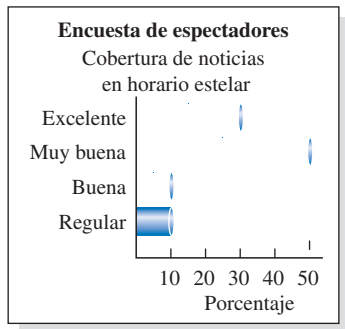
La tabla de la figura 7.1(a), la **gráfica de barras** de la figura 7.1(b) y la **gráfica circular** o **gráfica pastel** (o pay) de la figura 7.1(c) todas ellas muestran los resultados de una encuesta de opinión aplicada a los espectadores. En la gráfica de barras, la longitud de cada barra representa el porcentaje de respuestas en cada categoría. En la gráfica circular, el tamaño de cada región representa el porcentaje de las respuestas. Las dos gráficas cuentan la historia más rápida y claramente que la tabla de números.

Audiencia de cobertura de noticias en horario estelar

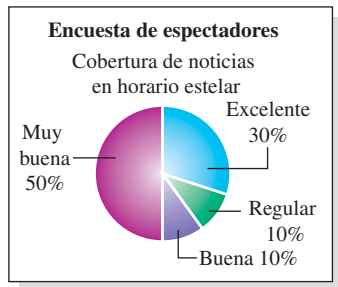
Encuesta de espectadores
Cobertura de noticias en horario estelar

Excelente	30%
Muy buena	50%
Buena	10%
Regular	10%

(a)



(b)



(c)

FIGURA 7.1

Es fácil ver de una gráfica o de otra que el mayor porcentaje de los encuestados calificó la programación como *muy buena* y que las respuestas *buena* y *regular* quedaron al final. La misma información se encuentra en el tabla de la figura 7.1(a) pero no es tan fácil de apreciar a simple vista.

Los datos a menudo se presentan en tablas con la información organizada en filas y columnas. Para leer una tabla tenemos que encontrar la intersección de la fila y la columna que contiene la información que se necesita.

Las tarifas postales (en 2004) para el correo urgente aparecen en la tabla 7.1 en la siguiente página. Para encontrar el costo del envío de un paquete de $8\frac{1}{2}$-libras por correo urgente a la zona 4, encontramos la *fila* de la tabla postal para paquetes que no excedan de 9 libras. Luego encontramos la *columna* de la zona 4. En la intersección de esta fila y esta columna leemos el número 11.70. Esto significa que costaría $11.70 enviar el paquete.

Tarifas postales para correo urgente 2004						
Peso no mayor de (libras)	Zonas local, 1, 2 y 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6	Zona 7	Zona 8
1	$3.85	$3.85	$3.85	$3.85	$3.85	$3.85
2	3.95	4.55	4.90	5.05	5.40	5.75
3	4.75	6.05	6.85	7.15	7.85	8.55
4	5.30	7.05	8.05	8.50	9.45	10.35
5	5.85	8.00	9.30	9.85	11.00	12.15
6	6.30	8.85	9.90	10.05	11.30	12.30
7	6.80	9.80	10.65	11.00	12.55	14.05
8	7.35	10.75	11.45	11.95	13.80	15.75
9	7.90	**11.70**	12.20	12.90	15.05	17.50
10	8.40	12.60	13.00	14.00	16.30	19.20
11	8.95	13.35	13.75	15.15	17.55	20.90
12	9.50	14.05	14.50	16.30	18.80	22.65

TABLA 7.1

Lectura de gráficas de barras

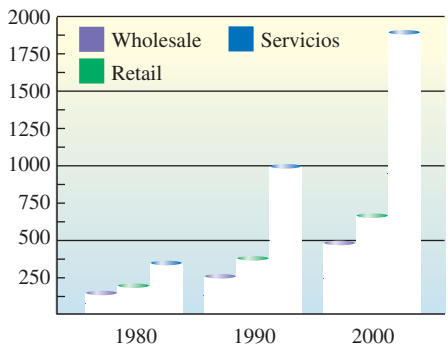
EJEMPLO 1 **Ingresos.**
La gráfica de barras de la figura 7.2 muestra los ingresos totales generados por tres sectores de la economía durante tres años. La altura de cada barra, que representa el ingreso en miles de millones de dólares, se mide en la escala del *eje* vertical. Los años aparecen en la escala en el eje horizontal. Lea la gráfica para responder a las siguientes preguntas.

a. ¿Qué ingresos se generaron por las ventas al retail en 1990?

b. ¿Qué sector de la economía generó más ingresos de manera consistente?

c. ¿En qué cantidad se incrementó el ingreso del sector de ventas al mayoreo de 1980 a 2000?

Ingreso nacional por industria
(en millones de dólares)



Fuente: *Almanaque Mundial 2004*

FIGURA 7.2

Autoevaluación 1
¿Qué cantidad de ingresos se generaron en el sector de servicios durante 1990?

Solución

a. El segundo grupo de barras indica el ingreso en 1990 y la barra del medio de ese grupo muestra las ventas en el sector de retail. Como el eje vertical tiene una escala en unidades de $125 mil millones, la altura de la barra es aproximadamente 250 + 125 = 375, que representa $375 mil millones.

b. En cada grupo la barra más a la derecha es la más alta. Esa barra, de acuerdo con la clave, representa el ingreso del sector servicios de la economía. Por tanto, los servicios generaron los mayores ingresos de forma consistente.

c. De acuerdo con la clave de colores, la barra de la extrema izquierda de cada grupo muestra el ingreso del sector mayorista. Ese sector generó cerca de \$125 mil millones en 1980 y \$500 mil millones en 2000. El incremento en el ingreso es la diferencia entre ambas cantidades.

$$\$500 \text{ mil millones} - \$125 \text{ mil millones} = \$375 \text{ mil millones}$$

El ingreso por ventas al mayoreo aumentó en \$375 mil millones entre 1990 y 2000.

Respuesta: 1000 mil millones

Autoevaluación 2
¿Qué modelo ha mostrado la mayor disminución en ventas?

EJEMPLO 2 **Ventas de automóviles.** La gráfica de barras de la figura 7.3 muestra el número de automóviles adquiridos en el condado Dale durante dos años consecutivos.

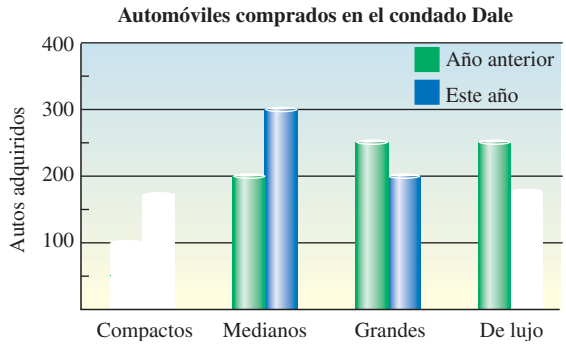


FIGURA 7.3

a. ¿Qué modelos han mostrado una disminución en ventas?

b. ¿Qué modelos muestran el mayor incremento en ventas?

Solución

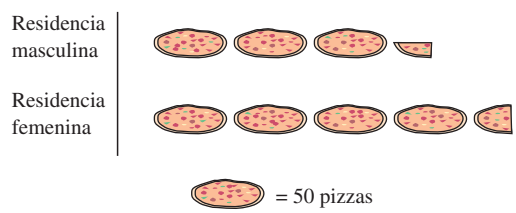
a. En cada par, la barra de la izquierda da las ventas del año anterior. La barra de la derecha representa las ventas de este año. Sólo para los autos de tamaño grande y los autos de lujo, la barra de la izquierda es más alta que la de la derecha. Esto significa que los vehículos grandes y los automóviles de lujo han disminuido sus ventas.

b. Las ventas de los vehículos de tamaño compacto y los autos medianos se han incrementado en el último año, porque para estos modelos la barra de la derecha es más alta que la de la izquierda. La diferencia en las alturas representa el incremento. El incremento es mayor en los autos de tamaño medio. De todos los modelos los autos de tamaño medio han mostrado el mayor incremento de ventas.

Respuesta: los automóviles de lujo.

Lectura de pictografías o gráficas pictográficas

Un **pictográfico** (o pictograma) es similar a una gráfica de barras pero las barras están compuestas por dibujos, donde uno de ellos representa una cantidad. En la figura 7.4 cada dibujo representa 50 pizzas ordenadas durante una semana de exámenes. La barra de arriba contiene 3 pizzas completas y un pedazo de pizza. Esto indica que los varones de la residencia masculina ordenaron 3·50 o 150 pizzas más aproximadamente $\frac{1}{4}$ de 50 o alrededor de 13 pizzas. Esto da un total de 163 pizzas. Las mujeres que habitan la residencia femenina ordenaron $4\frac{1}{2} \cdot 50$, 50 o 225 pizzas.



Pizzas ordenadas durante la semana de exámenes finales

FIGURA 7.4

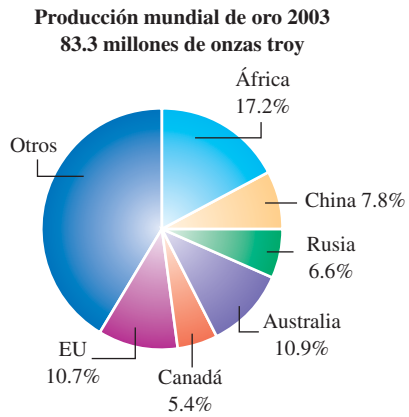
Lectura de gráficas circulares

EJEMPLO 3 **Producción de oro.** La gráfica circular de la figura 7.5 presenta información relacionada con la producción mundial de oro. El círculo entero representa la producción total del mundo y los diferentes segmentos del círculo representan las partes con las que contribuyen a ese total varios países y regiones. Use la gráfica para responder a las siguientes preguntas.

a. ¿Qué porcentaje del total fue la contribución combinada de Estados Unidos y Canadá?

b. ¿Qué porcentaje de la producción total provino de otras fuentes que las de la lista?

c. Si la producción total mundial fue de 56.3 millones de onzas durante el año de la investigación, ¿cuántas onzas produjo Australia?



Fuente: *Almanaque Mundial 2005*

FIGURA 7.5

Solución

a. De acuerdo a la gráfica, Estados Unidos produjo 10.7% y Canadá produjo 5.4% del total. Juntos generaron (10.7 + 5.4)% o 16.1% del total.

b. Para encontrar el porcentaje de oro producido por países que no están en la lista, sumamos las contribuciones de todas las fuentes enlistadas y restamos ese total de 100%.

$$100\% - (17.2\% + 7.8\% + 6.6\% + 10.9\% + 5.4\% + 10.7\%) = 100\% - 58.6\%$$
$$= 41.4\%$$

Los países que no están indicados generaron 41.4% de la producción total de oro.

c. De la gráfica vemos que Australia produjo 10.9% del oro mundial. Como el total fue de 83.3 millones de onzas, la parte de Australia (en millones de onzas) fue

$$10.9\% \text{ o } 83.3 = (0.109)(83.3)$$
$$= 9.0797$$

Redondeado a la décima más cercana, Australia generó 9.1 millones de onzas de oro.

Autoevaluación 3
¿Cuántas onzas de oro produjo Rusia? Redondee al décimo más cercano de un millón.

Respuesta 5.5 millones de onzas

Lectura de gráficas de líneas

Otra gráfica, llamada **gráfica de líneas**, se usa para mostrar cómo cambian cantidades en el tiempo. De tal gráfica se puede determinar cuándo una cantidad está aumentando y cuándo está disminuyendo.

EJEMPLO 4 **Producción de automóviles.** La gráfica de líneas de la figura 7.6 muestra cómo ha cambiado la producción de automóviles en EU desde 1900. Observe la gráfica y responda las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos automóviles se fabricaron en 1940?

b. ¿Cuántos se fabricaron en 1950?

c. ¿En qué periodo de 20 años se incrementó con mayor rapidez la producción de automóviles?

Autoevaluación 4
¿Cuántos automóviles se produjeron en 1960 en comparación con 1940?

d. ¿Cuándo disminuyó la producción?

e. ¿Por qué se usa una línea punteada en una parte de la gráfica?

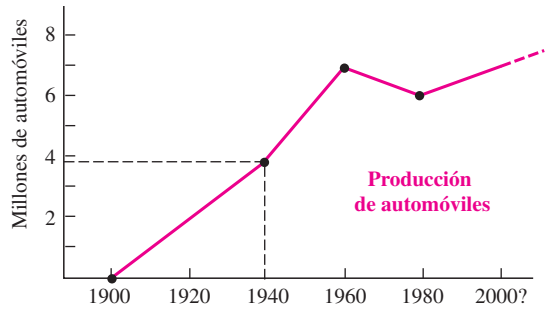


FIGURA 7.6

Solución

a. Para encontrar el número de vehículos producidos en 1940 seguimos la línea punteada de la etiqueta 1940 hasta llegar a la gráfica y luego directamente hacia la escala. Ahí leemos alrededor de 3.8. Como la escala indica millones de automóviles, se produjeron aproximadamente 3.8 millones en 1940.

b. Para encontrar el número de autos producidos en 1950 encontramos el punto medio entre 1940 y 1960. De ahí nos desplazamos hacia arriba hasta llegar a la gráfica y de ahí de lado hasta la escala, donde leemos alrededor de 5. Se fabricaron aproximadamente 5 millones de autos en 1950.

c. Como la inclinación hacia arriba es mayor entre 1940 y 1960, la producción de autos aumentó más rápido en esos años.

d. Entre 1960 y 1980 la gráfica baja indicando que la producción disminuyó en ese lapso.

e. Como el año 2000 todavía estaba en el futuro cuando la gráfica se hizo, los niveles de producción fueron *proyecciones* y la línea punteada indica que los números son sólo estimaciones.

Respuesta cerca de 3.2 millones

Autoevaluación 5
En la figura 7.7, ¿qué hace el tren 1 al tiempo D?

EJEMPLO 5 La gráfica en la figura 7.7 muestra el movimiento de dos trenes. El eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la distancia que han viajado los trenes.

a. ¿Cómo se mueven los trenes al tiempo A?

b. ¿A qué tiempo (A, B, C, D o E) están parados los dos trenes?

c. ¿A qué tiempo han recorrido la misma distancia ambos trenes?

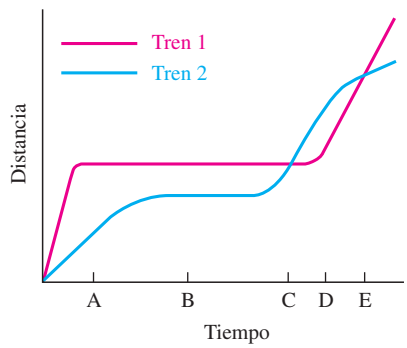


FIGURA 7.7

Solución El movimiento del tren 1 se representa con la línea roja y el desplazamiento del tren 2 se representa con la línea azul.

a. Al tiempo A, la línea azul está en ascenso. Esto muestra que la distancia recorrida por el tren 2 está aumentando: al tiempo A, el tren 2 se está moviendo. En el tiempo A la línea roja es horizontal. Esto indica que la distancia recorrida por el tren 1 no cambia: en el tiempo A el tren 1 está detenido.

b. Para encontrar el tiempo en el que ambos trenes están detenidos, calculamos el tiempo en el que ambas líneas son horizontales. Al tiempo B los dos trenes están detenidos.

c. A cualquier tiempo, la altura de la línea determina la distancia que ha viajado el tren. Ambos trenes habrán recorrido la misma distancia siempre que las alturas de las dos líneas sean iguales, esto es, a cualquier tiempo donde se intersecan las líneas. Esto ocurre a los tiempos C y E.

Respuesta El tren 1, que ha estado detenido, se empieza a mover.

Lectura de histogramas y de polígonos de frecuencias

Cierta compañía farmacéutica patrocina una serie de reestrenos de películas antiguas de vaqueros. El departamento de mercadotecnia tiene que elegir una opción entre tres anuncios.

1. Niños que hablan sobre las vitaminas Chipmunk
2. Un estudiante que toma un desayuno rápido y una vitamina TurboPill
3. Una abuela que habla sobre vitaminas Senior

Una encuesta de los espectadores da cuenta de la edad de cada espectador, contando el número en el grupo de 6 a 15 años de edad, el grupo de 16 a 25 años de edad y así sucesivamente. La gráfica de los datos se muestra en un tipo especial de gráfica de barras llamada **histograma** como se muestra en la figura 7.8. El eje vertical, rotulado como *Frecuencia*, indica el número de espectadores en cada grupo de edad. Por ejemplo, el histograma muestra que hay 105 espectadores en el grupo de edad de 36 a 45.

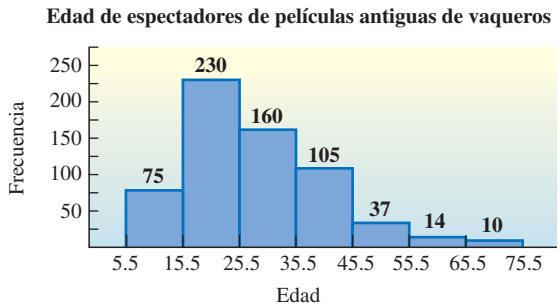


FIGURA 7.8

El histograma es una gráfica de barras con tres características importantes.

1. Las barras de un histograma se tocan.
2. Los valores de los datos nunca caen en la orilla de una barra.
3. El ancho de las barras es igual y representa un intervalo de valores.

El ancho de cada barra en la figura 7.8 representa un intervalo de edades de 10 años. Como la mayoría de los espectadores se localizan en la barra de 16 a 25 años de edad, el departamento de mercadotecnia decide anunciar TurboPills en los comerciales dirigidos hacia adultos jóvenes activos.

EJEMPLO 6 Equipaje de mano.

Una aerolínea pesa el equipaje de mano de 2260 pasajeros. Vea el histograma de la figura 7.9.

a. ¿Cuántos pasajeros llevaban equipaje de mano cuyo peso está incluido en el intervalo de 8 a 11 libras?

b. ¿Cuántos llevaban equipaje cuyo peso está comprendido en el intervalo de 12 a 19 libras?

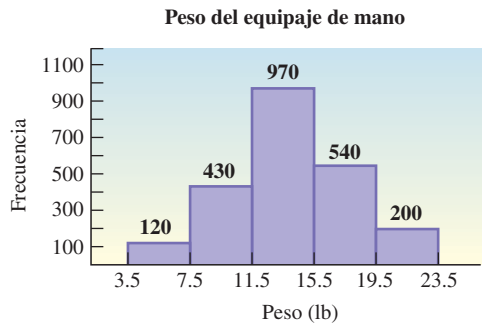


FIGURA 7.9

Solución

a. La segunda barra, con bordes en 7.5 y 11.5 corresponde al intervalo de 8 a 11 libras. Use la altura de la barra (o el número escrito ahí) para determinar que 430 pasajeros llevaban tal equipaje.

b. El intervalo de 12 a 19 libras está cubierto por dos barras. El número total de pasajeros con equipaje en este intervalo es 970 + 540, o 1510.

A partir del histograma de la figura 7.9 se puede construir una gráfica de líneas especial, llamada **polígono de frecuencias**, para esto se unen los puntos centrales que están en la parte superior de cada barra. (Véase la figura 7.10.) En el eje horizontal escribimos la coordenada del valor medio de cada barra. Después de borrar las barras obtenemos el polígono de frecuencias que se muestra en la figura 7.11.

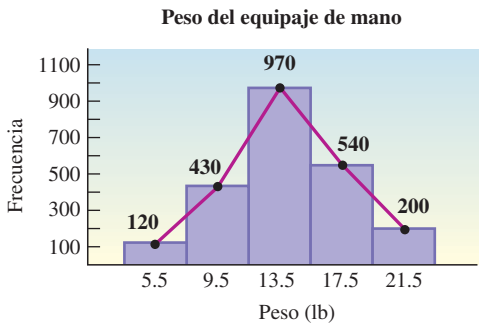


FIGURA 7.10

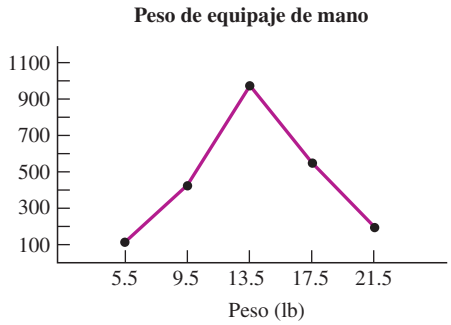
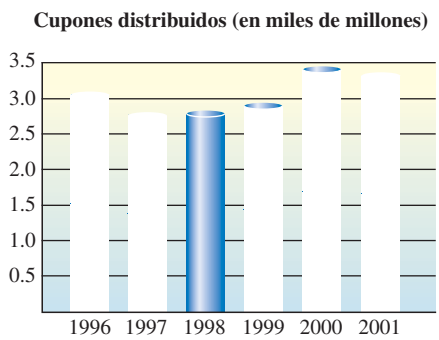


FIGURA 7.11

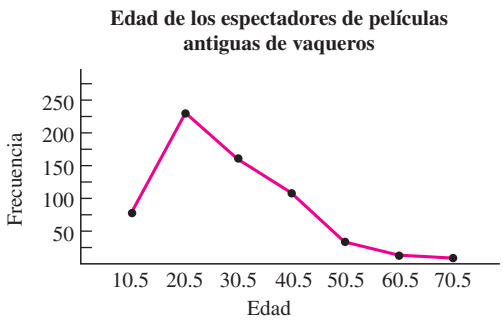
Sección 7.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Refiérase a las gráficas de la a a la f en la ilustración. Llene los espacios con la letra correcta.*

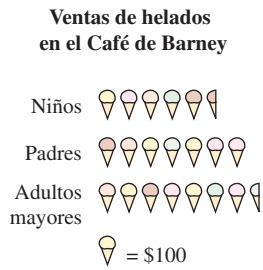
1. La gráfica _____ es una gráfica de barras.
2. La gráfica _____ es una gráfica circular.
3. La gráfica _____ es una pictografía.
4. La gráfica _____ es una gráfica de líneas.
5. La gráfica _____ es un histograma.
6. La gráfica _____ es un polígono de frecuencias.



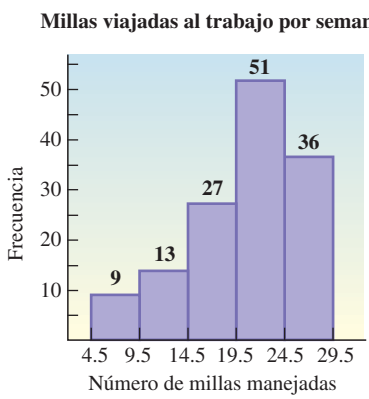
(a)



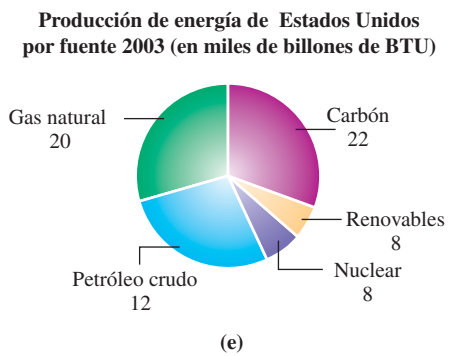
(b)



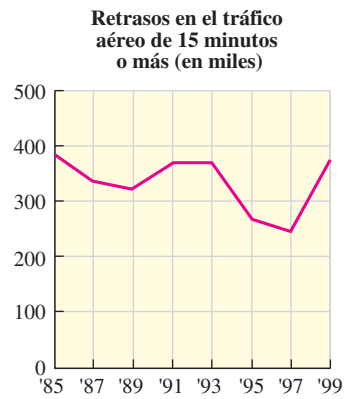
(c)



(d)


Producción de energía de Estados Unidos por fuente 2003 (en miles de billones de BTU)
Gas natural 20
Carbón 22
Renovables 8
Nuclear 8
Petróleo crudo 12

(e)



(f)

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

7. Las _____ de un histograma se tocan. Los anchos de las barras de un histograma son _____ y representan un intervalo de valores.

8. Se puede construir un polígono de _____ a partir de un histograma uniendo los puntos centrales que están en la parte superior de cada barra.

APLICACIONES *Refiérase a la tabla de tarifas postales, tabla 7.1, en la página 391.*

9. CORREO URGENTE Encuentre el costo de envío por correo urgente de un paquete con peso de $7\frac{1}{4}$ libras a la zona 3.

10. CORREO URGENTE Encuentre el costo de envío (correo urgente) de un paquete que pesa $2\frac{1}{4}$ libras a la zona 5.

11. COMPARACIÓN DE PORTES Juan quiere enviar un paquete que pesa 6 libras y una onza a un amigo que vive en la zona 2. El porte de cuarta clase sería de $2.79. ¿Cuánto se ahorraría si enviara el paquete por cuarta clase en lugar de hacerlo por correo urgente?

12. ENVÍO DE DOS PAQUETES Jenny quiere enviar un regalo de cumpleaños y un regalo de aniversario a su hermano que vive en la zona 6. Un paquete pesa 2 libras 9 onzas y el otro paquete pesa 3 libras 8 onzas. Si usa correo urgente, ¿cuánto se ahorrará si envía ambos paquetes como uno solo en lugar de dos? (*Sugerencia:* 16 onzas = 1 libra.)

Refiérase a las tablas de impuesto de ingresos.

13. DECLARACIÓN CONJUNTA Raúl tiene un ingreso ajustado de $57 100, es casado y declara conjuntamente. Calcule su impuesto.

14. DECLARACION DE SOLTERO Herb es soltero y tiene un ingreso ajustado de $79 250. Calcule su impuesto

15. ESTRATEGIAS PARA AHORRO DE IMPUESTOS Angelina es soltera y tiene un ingreso ajustado de $53 000. Si se casa tendría otras deducciones que reducirían su ingreso en $2000 y podría hacer una declaración conjunta. ¿Cuánto se ahorraría en impuestos si se casa?

16. STATUS DE DECLARACIÓN Un hombre con un ingreso ajustado de $53 000 se casó con una mujer con un ingreso ajustado de $75 000. Hicieron una declaración conjunta. ¿Se habrían ahorrado en impuestos si hubieran permanecido solteros?

Tarifa de impuestos, revisada 2003

	Si el INGRESO ES GRAVABLE		El IMPUESTO es		
	ENTONCES				
	Es mayor a	Pero no supera	Esta cantidad	Más este %	Del exceso sobre
LISTA X —					
Soltero(a)	$0	$7000	$0.00	10%	$0.00
	$7000	$28 400	$700.00	15%	$7000
	$28 400	$68 800	$3910.00	25%	$28 400
	$68 800	$143 500	$14 010.00	28%	$68 800
	$143 500	$311 950	$34 926.00	33%	$143 500
	$311 950	—	$90 514.50	35%	$311 950
LISTA Y.1 —					
Suplemento de casados Unidos o califican Viuda	$0	$14 000	$0.00	10%	$0.00
	$14 000	$56 800	$1400.00	15%	$14 000
	$56 800	$114 650	$7820.00	25%	$56 800
	$114 650	$174 700	$22 282.50	28%	$114 650
	$174 700	$311 950	$39 096.50	33%	$174 700
	$311 950	—	$84 389.00	35%	$311 950

Refiérase a la siguente gráfica.

17. ¿Qué fuente proveyó la menor cantidad de energía en 1975?

18. ¿Qué fuente de energía permaneció esencialmente sin cambios entre 1975 y 2000?

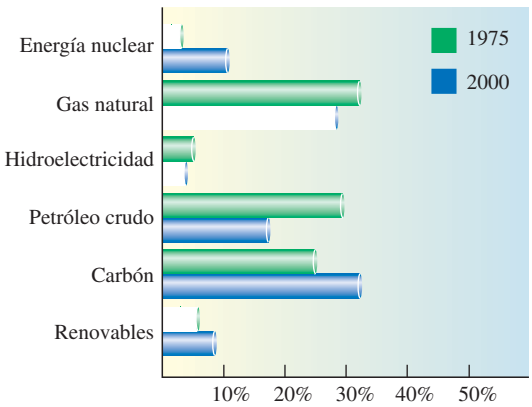
19. ¿Qué porcentaje de energía eléctrica se produjo por petróleo crudo en 1975?

20. ¿Qué fuentes proveyeron cerca de 10% de las necesidades de energía de Estados Unidos en 2000?

21. ¿Qué fuente proveyó la mayor cantidad de energía en 2000?

22. ¿De qué fuentes de energía depende en mayor grado Estados Unidos desde 1975?

Cambios en las fuentes de electricidad



Fuente: *Almanaque Mundial 2005*

Refiérase a la siguiente tabla.

23. La producción mundial de plomo en 1970 fue aproximadamente igual a la producción de zinc en otro año. ¿De que año se trata?

24. La producción mundial de zinc en 1990 fue aproximadamente igual a la producción de plomo en otro año. ¿En qué año fue eso?

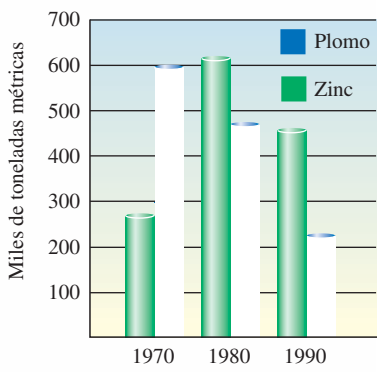
25. ¿En qué año la producción de zinc fue inferior a la mitad de la producción de plomo?

26. ¿En qué año la producción de zinc fue más del doble de producción de plomo?

27. ¿En cuántas toneladas métricas se incrementó la producción de zinc entre 1970 y 1980?

28. ¿En cuántas toneladas métricas disminuyó la producción de plomo entre 1980 y 1990?

Producción mundial de plomo y zinc



Refiérase a la siguiente gráfica.

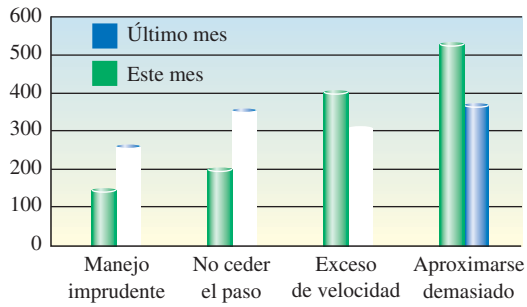
29. ¿En qué categorías de infracciones de tránsito han disminuido los arrestos en el último mes?

30. ¿Qué infracción ocurrió más a menudo en el último mes?

31. ¿Qué infracción ocurrió menos a menudo en este mes?

32. ¿Qué infracción ha mostrado la mayor disminución en el número de arrestos desde el último mes?

Infracciones de tránsito



Refiérase a la pictográfica.

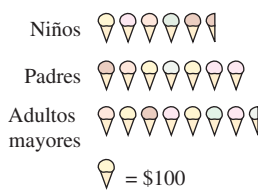
33. ¿Qué grupo (niños, padres o mayores) gastó más dinero en la compra de helados en el Café de Barney?

34. ¿Cuánto dinero gastaron los padres en la compra de helados?

35. ¿Cuánto dinero gastaron los adultos mayores en comparación con los padres?

36. ¿Cuánto dinero gastaron los adultos mayores en comparación con los niños?

Ventas de helado en el Café de Barney



Refiérase a la gráfica circular de la siguiente página.

37. Dos de los siete idiomas considerados son hablados por grupos que tienen aproximadamente el mismo tamaño. ¿Qué idiomas son?

38. De los idiomas en la gráfica, ¿cuál de ellos es practicado por el mayor número de personas?

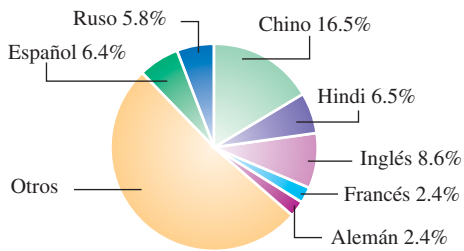
39. ¿Hablan más personas ruso que inglés?

40. ¿Qué porcentaje de la población mundial habla ruso o inglés?

41. ¿Qué porcentaje de la población mundial habla otro idioma diferente a esos siete?

42. ¿Qué porcentaje de la población mundial no habla francés o alemán?

Idiomas del mundo
y los porcentajes de la población que los habla



Refiérase a la siguiente gráfica.

43. ¿Qué porcentaje de la producción total de energía proviene de energía nuclear?

44. ¿Qué porcentaje de la producción de energía proviene de fuentes renovables?

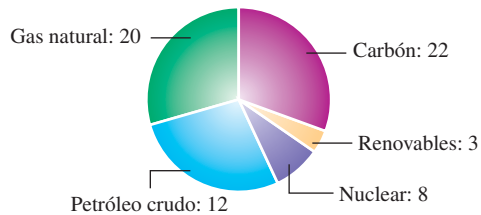
45. ¿Qué porcentaje de la producción total de energía proviene de carbón y petróleo crudo juntos?

46. ¿En qué *porcentaje* excede la energía producida por el carbón a la producida por el petróleo crudo?

47. ¿En qué *porcentaje* excede la energía producida por el carbón a la nuclear?

48. Si la producción de energía nuclear se triplicara en los próximos 10 años y las otras fuentes no tuviesen cambios, ¿qué porcentaje del total de fuentes de energía aportaría la energía nuclear?

Fuentes de producción de energía de Estados Unidos (en miles de billones de BTU) 2003



Refiérase a la gráfica de líneas en la siguiente columna.

49. ¿Cuáles fueron los salarios semanales promedio en la minería en el año 1975?

50. ¿Cuáles fueron los salarios semanales promedio en la construcción en el año 1980?

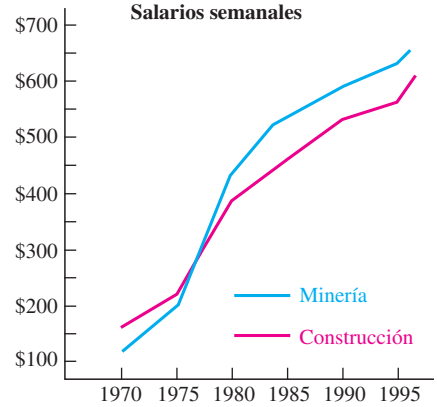
51. En el periodo entre 1982 y 1984, ¿cuáles salarios aumentaron más rápidamente?

52. ¿Aproximadamente en qué año los mineros empezaron a ganar más que los trabajadores de la construcción?

53. En el periodo de 1970 a 1995, ¿cuáles trabajadores recibieron el mayor aumento en sus salarios?

54. ¿En qué intervalo de 5 años se incrementaron más rápidamente los salarios en la minería?

Minería y construcción: Salarios semanales



Refiérase a la siguiente gráfica de líneas.

55. ¿Cuál corredor fue más rápido al inicio de la carrera?

56. ¿Cuál corredor se paró a descansar primero?

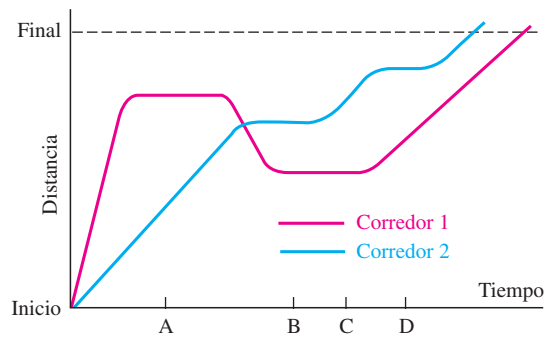
57. ¿Cuál corredor tiró la estafeta y tuvo que regresar a recogerla?

58. ¿A qué tiempos (A, B, C o D) estaba detenido el corredor 1 y el corredor 2 estaba corriendo?

59. Describa qué sucedía al tiempo D.

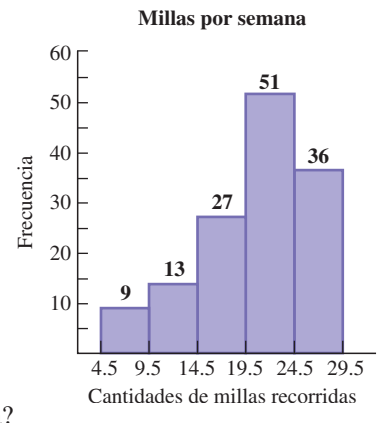
60. ¿Cuál corredor ganó la carrera?

Carrera de cinco millas



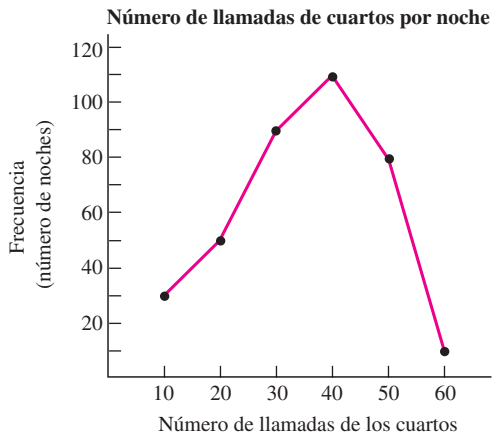
61. MILLAS PARA IR AL TRABAJO Una compañía de seguros ha reunido datos del número de millas que manejan sus empleados para ir y regresar del trabajo. Los datos se presentan en el histograma de la página siguiente. ¿Cuántos empleados manejan entre 14.5 y 19.5 millas por semana?

62. CAMINO AL TRABAJO Se aplicó una encuesta a los empleados de una compañía de mercadotecnia para determinar el número de millas que manejan al trabajo cada semana. ¿Cuántos empleados manejan 14 millas o menos por semana?



63. PERSONAL DEL TURNO NOCTURNO La administradora de un hospital aplicó una encuesta al personal médico para determinar el número de llamadas de los cuartos durante la noche. Con los datos obtenidos construyó el polígono de frecuencias que se muestra a continuación. ¿En cuántas noches hubo alrededor de 30 llamadas?

64. PERSONAL DE TURNO NOCTURNO Refiérase al problema 63 y a la gráfica de abajo. En cuántas noches se generaron cerca de 60 llamadas?



65. HECHURA DE GRÁFICAS DE BARRAS Use los datos en la tabla de abajo para elaborar una gráfica de barras que muestre el número de granjas en Estados Unidos en los años de 1950 a 2000.

Año	Número de granjas en Estados Unidos (en millones)	Tamaño promedio de las granjas en Estados Unidos (acres)
1950	5.6	213
1960	4.0	297
1970	2.9	374
1980	2.4	426
1990	2.1	460
2000	2.2	434

Fuente: Departamento de Agricultura de Estados Unidos

66. HECHURA DE GRÁFICAS DE BARRAS Use los datos en la tabla para hacer una gráfica de líneas que muestre la extensión promedio de las granjas en Estados Unidos en los años de 1950 a 2000.

67. REALIZACIÓN DE GRÁFICAS DE LÍNEAS Los datos relativos a los cupones que se presentan en la siguiente tabla indican los ahorros para los compradores. Realice una gráfica de líneas que relacione el precio original (en dólares en el eje horizontal) con el precio de venta (en el eje vertical).

¡AHORRE!	En la compra de
$10	$100–$250
$25	$250–$500
$50	más de $500

68. ELABORACIÓN DE HISTOGRAMAS Para estudiar el efecto del fluoruro en la prevención de la caries dental, los investigadores contaron el número de amalgamas en la dentadura de 28 pacientes y registraron estos resultados:

3, 7, 11, 21, 16, 22 18, 8, 12, 3, 7, 2, 8, 19, 12, 19, 12, 10, 13, 10, 14, 15, 14, 14, 9, 10, 12, 13

Lleve la cuenta de los resultados completando la tabla. Haga un histograma después. La primera barra se extiende de 0.5 a 5.5, la segunda barra de 5.5 a 10.5 y así sucesivamente.

Número de amalgamas	Frecuencia
1–5	
6–10	
11–15	
16–20	
21–25	

POR ESCRITO *Escriba un párrafo usando sus propias palabras.*

69. ¿Qué clase de presentación (tabla, gráfica de barras, gráfica de líneas, gráfica circular, pictográfica o histograma) es más apropiado para visualizar cada tipo de información?

- El porcentaje de estudiantes clasificados por especialidad.
- El porcentaje de egresados anualmente en biología, desde 1970.
- La cantidad de horas de estudio para los exámenes finales.
- Las distintas poblaciones étnicas de las diez ciudades más grandes.
- El salario promedio anual de los ejecutivos corporativos para las diez industrias principales.

Explique sus elecciones.

70. Un histograma es un tipo especial de gráfica de barras. Explique.

REPASO *Haga las operaciones.*

71. $5 - 3 \cdot 4$

72. $3(6 - 9) + 4$

73. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2$

74. $5^2 + |6 - 10|$

75. Escriba los números primos entre 10 y 30.

76. Escriba los primeros diez números compuestos.

77. Escriba los números pares menores que 6 que no sean primos.

78. Escriba los números primos entre 0 y 10.

7.2 Media, mediana y moda

• La media (promedio aritmético) • La mediana • La moda

Las gráficas no son el único medio para describir *distribuciones* (listas) de números de manera compacta. A menudo podemos encontrar *un* número que represente el centro de todos los números en un conjunto de datos. Ya hemos visto uno de estos números típicos: la *media* o el *promedio*, sin embargo existen otros dos: la *mediana* y la *moda*. En esta sección discutimos estas tres medidas de **tendencia central.**

La media (promedio aritmético)

Una estudiante ha presentado cinco exámenes este semestre, obteniendo 87, 73, 89, 92 y 84. Para averiguar cuál va a ser su calificación final, ella calcula la **media** o el **promedio aritmético** de estas calificaciones sumándolas y después dividiendo entre 5.

$$\text{Calificación promedio} = \frac{87 + 73 + 89 + 92 + 84}{5}$$
$$= \frac{425}{5}$$
$$= 85$$

La calificación promedio es 85. Algunos exámenes fueron mejores y otros peores, pero 85 es una buena indicación de su desempeño en la clase.

La media (promedio aritmético)

La **media** o **promedio aritmético** de varios valores está dado por la fórmula

$$\text{Media (o promedio)} = \frac{\text{suma de los valores}}{\text{número de valores}}$$

EJEMPLO 1 **Ventas de una tienda.** Las ventas semanales en tres departamentos de Tog Shoppe se indican en la tabla 7.2 . Encuentre la media de las ventas diarias en el departamento de mujeres para esta semana.

Autoevaluación 1
Encuentre la media de las ventas diarias en los tres departamentos del almacén Tog Shoppe para el miércoles.

	Departamento de hombres	Departamento de mujeres	Departamento de niños
Lunes	$2315	$3135	$1110
Martes	2020	2310	890
Miércoles	1100	3206	1020
Jueves	2000	2115	880
Viernes	955	1570	1010
Sábado	850	2100	1000

Solución Use una calculadora para sumar las ventas de la semana en el departamento de mujeres. Luego divida la suma de esos seis valores entre 6.

$$\text{Ventas medias en el departamento de mujeres} = \frac{3135 + 2310 + 3206 + 2115 + 1570 + 2100}{6}$$

$$= \frac{14436}{6}$$

$$= 2406$$

La media de las ventas diarias en el departamento de mujeres es $2406.

Respuesta $1775.33

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA Cálculo de la media

La mayor parte de las calculadoras científicas realizan cálculos estadísticos y pueden determinar fácilmente la media de un conjunto de números. Para usar una calculadora científica en modo estadístico para encontrar la media en el ejemplo 1, intente con estas teclas:

- Ponga la calculadora en modo estadístico.
- Reinicie la calculadora para limpiar los *registros estadísticos*.
- Introduzca cada número seguido por la tecla $\boxed{\Sigma+}$ en lugar de la tecla $\boxed{+}$. Esto es, introduzca 3135, oprima $\boxed{\Sigma+}$, introduzca 2310, oprima $\boxed{\Sigma+}$, y así sucesivamente.
- Cuando se hayan introducido todos los datos determine la media oprimiendo la tecla $\boxed{\bar{x}}$ Puede ser que necesite oprimir la tecla $\boxed{2^{nd}}$ primero. La media es 2406.

Debido a que la designación de las teclas varía dependiendo de la marca de la calculadora, puede ser que tenga que revisar el manual del usuario si estas instrucciones no funcionan.

Autoevaluación 2
Si Bob manejó 3360 millas en febrero de 2005, ¿cuántas millas manejó por día en promedio?

EJEMPLO 2 **Manejo.** En enero Bob manejó un total de 4805 millas. En promedio, ¿cuántas millas manejó por día?

Solución Para encontrar el promedio de millas manejadas por día dividimos el total de millas entre el número de días. Como hay 31 días en enero dividimos 4805 entre 31.

$$\text{El número promedio de millas por día} = \frac{\text{total de millas manejadas}}{\text{número de días}}$$
$$= \frac{4805}{31}$$
$$= 155$$

En promedio Bob manejó 155 millas por día.

Respuesta 120

La mediana

La media no siempre es representativa de los valores de una lista. Por ejemplo, suponga que los salarios semanales de cuatro trabajadores de un pequeño negocio son \$280, \$300, \$380 y \$240, y el propietario de la compañía se paga a sí mismo \$5000. El salario medio es

$$\text{Salario medio} = \frac{280 + 300 + 380 + 240 + 5000}{5}$$
$$= \frac{6200}{5}$$
$$= 1240$$

El propietario podría decir, "Nuestros empleados ganan en promedio \$1240 por semana". En realidad esta afirmación no representa el salario típico de los trabajadores.

La mediana es una indicación más confiable del salario típico de la compañía. En este caso la *mediana* es el salario que está en la mitad (o en la posición de en medio) cuando estos números se arreglan de acuerdo a su tamaño.

240 280 300 380 5000

↑

El salario de la mitad

El trabajador típico gana \$300 por semana, bastante menos que el salario promedio.

Si hay un número par de valores en la lista, entonces no hay valor en la mitad. En este caso la mediana es la media de los dos valores más cercanos a la mitad. Por ejemplo, no hay número a la mitad de la lista 2, 5, 6, 8, 13, 17. Los dos números más cercanos a la mitad son 6 y 8. La mediana es la media entre 6 y 8, que es $\frac{6+8}{2}$, o 7.

La mediana

La **mediana** de varios valores es el valor de la mitad. Para encontrar la mediana:

1. Coloque los valores en orden ascendente.
2. Si hay un número impar de valores, la mediana es el valor que está en la mitad.
3. Si hay un número par de valores, la mediana es el promedio de los dos valores que están más próximos a la mitad.

EJEMPLO 3 **Calificaciones.** En un examen hubo tres calificaciones de 59, cuatro calificaciones de 77 y las siguientes notas 43, 47, 53, 60, 68, 82 y 97. Encuentre la calificación mediana.

Solución Ordenamos las 14 calificaciones en orden creciente

43 47 53 59 59 59 **60 68** 77 77 77 77 82 97

Autoevaluación 3

Encuentre la mediana de estos valores: 7.5, 2.1, 9.8, 5.3, 6.2.

Como hay un número par de calificaciones la mediana es la media de las dos calificaciones más próximas a la mitad: el 60 y el 68.

Respuesta 6.2

La mediana es $\frac{60 + 68}{2}$, o 64.

La moda

Una ferretería exhibe 20 termómetros de exterior. Doce de ellos indican 68º y los otros ocho tienen distintas lecturas. Para escoger un termómetro exacto, ¿deberíamos seleccionar uno con una lectura próxima a la *media* de los 20, o a su *mediana*? Ninguna de las dos. En su lugar, debiéramos escoger uno de los 12 que tienen la misma lectura, suponiendo que cualquiera de los termómetros que coinciden es más probable que estén bien.

Al escoger la temperatura que aparece con mayor frecuencia, hemos seleccionado la *moda* de los 20 números.

La moda

La **moda** de varios números es el valor que aparece con mayor frecuencia. La moda de varios números se llama también **valor modal.**

Autoevaluación 4
Encuentre la moda de estos valores: 2, 3, 4, 6, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 5.

EJEMPLO 4 Encuentre la moda de: 3, 6, 5, 7, 3, 7, 2, 4, 3, 5, 3, 7, 8, 7, 3, 7, 6, 3, 4.

Solución Para encontrar la moda de los números que aparecen en la lista anterior, hacemos una tabla de los números distintos que aparecen y contamos para registrar el número de veces que ocurren.

2	3	4	5	6	7	8
/	///// /	//	//	//	/////	/

Respuesta 4

Como 3 ocurre más veces que cualquier otro número, ése es la moda.

EJEMPLO 5 **Herramientas de mecánico.** Se utilizó el vernier que se muestra en la figura 7.12 para determinar los diámetros (distancias a lo ancho) de ocho balines de acero inoxidable. Calcule **a.** la media, **b.** la mediana y **c.** la moda del conjunto de medidas que se indican a continuación.

3.43 cm, 3.25 cm, 3.48 cm, 3.39 cm, 3.54 cm, 3.48 cm, 3.23 cm, 3.24 cm

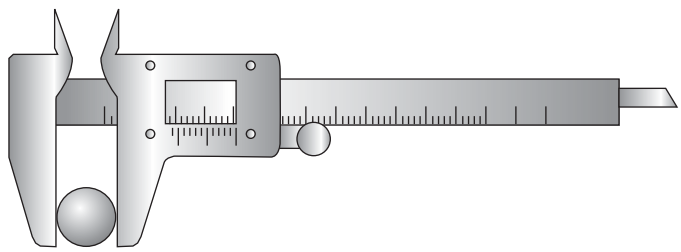


FIGURA 7.12

Solución

a. Para encontrar la media sumamos las medidas y dividimos entre el número de valores que es 8.

$$\text{Media} = \frac{3.43 + 3.25 + 3.48 + 3.39 + 3.54 + 3.48 + 3.23 + 3.24}{8} = 3.38 \text{ cm}$$

b. Para encontrar la mediana primero arreglamos las medidas en orden ascendente.

3.23, 3.24, 3.25, 3.39, 3.43, 3.48, 3.48, 3.54

Como hay un número par de medidas, la mediana será la suma de los dos valores a la mitad (3.39 y 3.43) dividida entre 2.

$$\text{Mediana} = \frac{3.39 + 3.43}{2} = \frac{6.82}{2} = 3.41 \text{ cm}$$

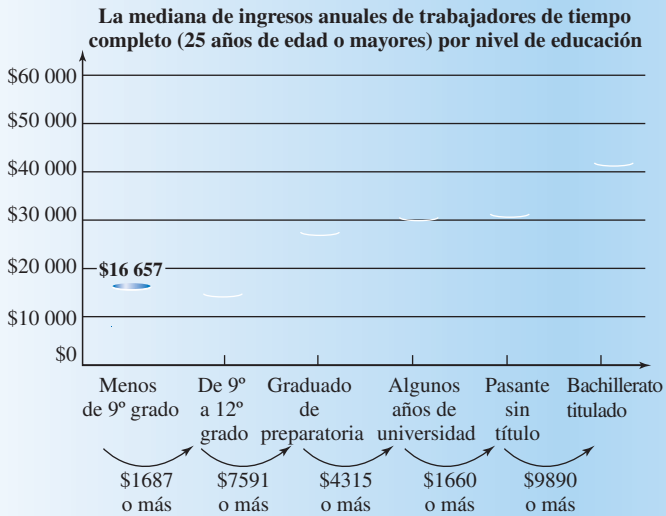
c. Como la medida 3.48 ocurre más a menudo, ésa es la moda.

El valor de la educación

PARA PENSAR A DETALLE

"La educación adicional hace a los trabajadores más productivos y les permite aumentar sus salarios." Gobernador de Virginia, Mark R. Warner, 2004

Conforme aumentan los costos de la educación universitaria, algunas personas se preguntan si vale la pena gastar años trabajando para obtener un grado cuando ese mismo tiempo se podría usar ganando dinero. Los siguientes datos de ingreso mediano hacen claro que a la larga la educación adicional bien vale la inversión. Use los datos para completar la gráfica de barras.



Fuente: Oficina del Censo de Estados Unidos, junio de 2004

Sección 7.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. La suma de los valores en una distribución de números dividida entre el número de valores en la distribución se llama _____ de la distribución.
2. El valor que aparece con mayor frecuencia en una distribución se llama _____ de la distribución.
3. La _____ de varios valores arreglados en orden creciente es el valor a la mitad.

4. La media, mediana y moda son tres medidas de tendencia _____.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

5. La media de varios valores está dada por

$$\text{Media} = \frac{\text{la suma de los valores}}{\square}$$

6. Considere la lista de valores siguiente:

4, 5, 5, 6, 8, 9, 9, 15

$$\text{Mediana} = \frac{\square + \square}{2} = \square$$

PRÁCTICA *Encuentre la media de cada lista de datos.*

7. 3, 4, 7, 7, 8, 11, 16

8. 13, 15, 17, 17, 15, 13

9. 5, 9, 12, 35, 37, 45, 60, 77

10. 0, 0, 3, 4, 7, 9, 12

11. 15, 7, 12, 19, 27, 17, 19, 35, 20

12. 45, 67, 42, 35, 86, 52, 91, 102

Encuentre la mediana de cada lista de datos.

13. 2, 5, 9, 9, 9, 17, 29

14. 16, 18, 27, 29, 35, 47

15. 4, 7, 2, 11, 5, 4, 9, 17

16. 0, 0, 3, 4, 0, 0, 3, 4, 5

17. 18, 17, 2, 9, 21, 23, 21, 2

18. 5, 13, 5, 23, 43, 56, 32, 45

Encuentre la moda (si la hay) de cada lista de datos.

19. 3, 5, 7, 3, 5, 4, 6, 7, 2, 3, 1, 4

20. 12, 12, 17, 17, 12, 13, 17, 12

21. 5, 9, 12, 35, 37, 45, 60

22. 0, 3, 0, 2, 7, 0, 6, 0, 3, 4, 2, 0

23. 23.1, 22.7, 23.5, 22.7, 34.2, 22.7

24. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{3}$

APLICACIONES

25. REFRESCOS Una investigación sobre máquinas de refrescos indica los siguientes precios para una lata (en centavos): 50. 60, 50, 50, 70, 75, 50, 45, 50, 50, 65, 75, 60, 75, 100, 50, 80, 75. Encuentre el precio promedio de un refresco.

26. SUMINISTROS DE COMPUTACIÓN Varias tiendas de computación reportaron distintos precios para cartuchos de tóner para impresoras láser (en dólares): 51, 55, 73, 75, 72, 70, 53, 59, 75. Encuentre el precio promedio de un cartucho de tóner.

27. REFRESCOS Encuentre el precio mediano de un refresco. (Vea el ejercicio 25.)

28. SUMINISTROS DE COMPUTACIÓN Encuentre la mediana de el precio de un cartucho de tóner. (Vea el ejercicio 26.)

29. REFRESCOS Encuentre el precio modal de un refresco. (Vea el ejercicio 25.)

30. SUMINISTROS DE COMPUTACIÓN Encuentre la moda de los precios de un cartucho de tóner. (Vea el ejercicio 26.)

31. CAMBIOS EN LA TEMPERATURA Se registran las temperaturas a intervalos de una hora como se enlista en la tabla. Encuentre la temperatura promedio del periodo de la medianoche a las 11:00 A.M.

Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura
12:00 A.M.	53	12:00 mediodía	71
1:00	53	1:00 P.M.	75
2:00	57	2:00	77
3:00	58	3:00	77
4:00	59	4:00	79
5:00	59	5:00	72
6:00	60	6:00	70
7:00	62	7:00	64
8:00	64	8:00	61
9:00	66	9:00	59
10:00	68	10:00	53
11:00	70	11:00	51

32. CALIFICACIONES SEMESTRALES La calificación de Frank en álgebra se basa en el promedio de 4 exámenes que tienen la misma ponderación. Sus calificaciones son 75, 80, 90 y 85. Encuentre su promedio.

33. PROMEDIO DE TEMPERATURAS Encuentre el promedio de temperatura para el periodo de 24 horas. (Vea el ejercicio 31.)

34. EXÁMENES FINALES Si el profesor de Frank decidiera contar doble el cuarto examen, ¿cuál sería el promedio de Frank? (Vea el ejercicio 32.)

35. MILLAJE DE FLOTILLA El personal de la fuerza de ventas de una compañía de seguros usa 37 automóviles. El último mes de junio esos automóviles registraron un total de 98 790 millas. En promedio ¿cuántas millas recorrió cada auto ese mes?

36. PRESUPUESTO DE PROVISIONES La familia Hinrichs gastó $519 en provisiones en abril. En promedio, ¿cuál fue su gasto diario?

37. MILLAJE DIARIO Encuentre el número promedio de millas manejadas diariamente para cada auto en el ejercicio 35.

38. COSTOS DE DESPENSA Vea el ejercicio 36. La familia Hinrichs tiene cinco miembros. ¿Cuál es el promedio diario gastado en víveres por cada miembro de la familia?

39. PROMEDIO DE EXÁMENES Roberto recibió la misma calificación en 5 exámenes y su calificación media es de 85. Encuentre su calificación mediana y su calificación modal.

40. CALIFICACIONES DE EXÁMENES Las calificaciones del primer examen de los estudiantes de una clase de historia fueron 57, 59. 61, 63, 63, 63, 87, 89, 95, 99 y 100. Kia obtuvo una calificación de 70 y alega que "70 es mejor que el promedio". ¿Arriba de cuáles de las tres medidas de tendencia central está ella: la media, la mediana o la moda?

41. COMPARACIÓN DE CALIFICACIONES Un estudiante recibió calificaciones de 37, 53 y 78 en tres exámenes. Su hermana recibió calificaciones de 53, 57 y 58. ¿Quién tuvo mejor promedio? ¿Qué calificaciones fueron más consistentes?

42. ¿Cuál es el promedio de todos los enteros desde -100 a 100 incluyéndolos?

43. OCTILLIZOS En diciembre de 1998, Nkem Chukwu dio a luz ocho bebés en el hospital infantil de Texas. Encuentre la media y la mediana de sus pesos al nacer.

Ebuka (niña) 24 oz	Odera (niña) 11.2 oz
Chidi (niña) 27 oz	Ikem (niño) 17.5 oz
Echerem (niña) 28 oz	Jioke (niño) 28.5 oz
Chima (niña) 26 oz	Gorom (niña) 18 oz

44. PATINAJE SOBRE HIELO Abajo se enlistan las calificaciones de impresión artística de Tara Lipinski para el programa largo de la competencia de patinaje de figura en los Juegos Olímpicos de Invierno 1998. Encuentre la media, la mediana y la moda. Redondee al décimo más cercano.

Australia	5.8	Alemania	5.8	Ucrania	5.9
Hungría	5.8	U.S.	5.8	Polonia	5.8
Austria	5.9	Rusia	5.9	Francia	5.9

45. COMPARACIÓN DE PRECIOS Una investigación de tiendas de abarrotes encontró que el precio de una caja de 15 onzas del cereal Cheerios variaba de $3.89 a $4.39. (Vea más abajo.) ¿Cuáles son la media, mediana y moda de los precios enlistados?

$4.29	$3.89	$4.29	$4.09	$4.24	$3.99
$3.98	$4.19	$4.19	$4.39	$3.97	$4.29

46. TERREMOTOS Las magnitudes de los mayores terremotos de 1999 se enlistan abajo. Encuentre la media, mediana y moda. Redondee a la décima más cercana.

1/19/99	Nueva Irlanda, Papúa Nueva Guinea	7.0
2/6/99	Islas Santa Cruz, Mares del Pacífico Sur	7.3
3/4/99	Islas Célebes, Indonesia	7.1
4/5/99	Nueva Bretaña, Papúa Nueva Guinea	7.4
4/8/99	Rusia oriental/frontera nororiental de China	7.1
5/10/99	Nueva Bretaña, Papúa Nueva Guinea	7.1
5/16/99	Nueva Bretaña, Papúa Nueva Guinea	7.1
8/17/99	Región de Izmir, Turquía occidental	7.4
9/21/99	Taiwán	7.6
9/30/99	Oaxaca, México	7.4
11/12/99	Provincia Bolu, Turquía noroccidental	7.2

47. EFICIENCIA DE COMBUSTIBLE En la siguiente tabla se muestran los diez automóviles más eficientes en combustible en 2002 basados en el consumo en millas por galón (mpg) ya sea en ciudad o en autopista, estas cifras fueron estimadas por los fabricantes de los vehículos. Encuentre la media, mediana y moda de ambos conjuntos de datos.

Modelo	mpg ciudad/autopista
Honda Insight	61/68
Toyota Prius	52/45
Honda Civic Hybrid	47/51
VW Jetta Wagon	42/50
VW Golf	42/49
VW Jetta Sedan	42/49
VW Beetle	42/49
Honda Civic Coupe	36/44
Toyota Echo	34/41
Chevy Prizm	32/41

Fuente: edmonds.com

48. PESCA DEPORTIVA El reporte que se muestra abajo enlista las condiciones de pesca en el lago Pyramid para un sábado de enero. Encuentre la mediana y la moda de los pesos de la lobina rayada capturada en el lago.

> **Lago Pyramid**— Algunas lobinas rayadas están picando pero son pequeñas. Pican señuelos vibratorios y gusanos de plástico. El agua está fría: 38°. Pesos de los peces capturados (lb): 6, 9, 4, 7, 4, 3, 3, 5, 6, 9, 4, 5, 8, 13, 4, 5, 4, 6, 9.

49. Refiérase a los datos de la tabla.

a. Encuentre la media. Redondee al décimo más cercano de la unidad porcentual.

b. Encuentre la mediana.

c. Encuentre la moda.

Tasa de desempleo de Estados Unidos (1990-2002) en porcentaje

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
5.6	6.8	7.5	6.9	6.1	5.6	5.4
1997	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	
4.9	4.5	4.2	4.0	4.7	5.8	

Fuente: Departamento del Trabajo de Estados Unidos

50. PRUEBA DE APTITUDES ACADÉMICAS Las calificaciones medias de la prueba verbal de la PAA para universitarios de mayor antigüedad de los años 1993-2003 se enlistan abajo. Encuentre la media, mediana y moda. Redondee al punto más cercano.

1993	1994	1995	1996	1997	1998
500	499	504	505	505	505
1999	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	
505	505	506	504	507	

Fuente: *Almanaque Mundial 2004*

POR ESCRITO

51. Explique cómo calcular la media, la mediana y la moda de varios números.

52. La media, mediana y moda se usan para medir la tendencia central de una lista de números. ¿Qué quiere decir tendencia central?

REPASO

53. Encuentre la factorización en números primos de 81.

54. Encuentre el MCD de dos fracciones cuyos denominadores son 36 y 81.

Realice las siguientes operaciones.

55. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9}$

56. $\frac{2}{15} \div \frac{4}{5}$

57. $\frac{18}{5} + \frac{12}{5}$

58. $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$

59. $\frac{8}{5} + \frac{3}{10}$

60. $\frac{5}{6} - \frac{1}{12}$

CONCEPTO CLAVE

Media, mediana y moda

Para indicar el centro de una distribución de números podemos usar la media, la mediana o la moda.

- La **media** de una distribución es la suma de valores en la distribución dividida entre el número de valores en la distribución.

$$\text{Media} = \frac{\text{suma de valores en la distribución}}{\text{número de valores en la distribución}}$$

- La **mediana** de varios valores escritos en orden ascendente es el valor que está a la mitad. La misma cantidad de números se encuentra sobre la mediana que bajo ésta. Si hay un número par de valores en la distribución, la mediana es la media de los dos valores que estén más próximos a la mitad.
- La **moda** de una distribución es el valor que ocurre más a menudo.

Considere la siguiente distribución: 3, 7, 4, 12, 15, 23, 17, 21, 15, 20.

1. Calcule la media.

2. Encuentre la mediana.

3. Encuentre la moda.

4. ¿Son el mismo número la media, la mediana y la moda?

Considere la distribución 4, 2, 6, 8, 6, 10.

5. Calcule la media.

6. Encuentre la mediana.

7. Encuentre la moda.

8. ¿Son el mismo número la media, la mediana y la moda?

Construya una distribución con las siguientes características.

9. La media es mayor que la moda.

10. La media es menor que la mediana.

11. La moda es menor que la mediana.

12. La moda es mayor que la mediana.

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

SECCIÓN 7.1

TEMPERATURAS DIARIAS MÁXIMAS Y MÍNIMAS

Haga una gráfica de barras que muestre las temperaturas diarias máximas y mínimas de su ciudad, durante un periodo de dos semanas. Puede encontrar esta información en la sección de clima de un diario. Usando su gráfica responda las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál fue la temperatura máxima más alta?

b. ¿Cuál fue la temperatura máxima más baja?

c. ¿Cuál fue la temperatura mínima más alta?

d. ¿Cuál fue la temperatura mínima más baja?

e. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura máxima más alta y la mínima más baja?

f. ¿Hubo algunas tendencias aparentes en la gráfica?

SECCIÓN 7.2

MEDIA, MEDIANA Y MODA

1. Encuentre la media, mediana y moda del siguiente conjunto de valores.

2.3 2.3 3.6 3.8 4.5

a. ¿Es la media del conjunto de valores uno de los valores del conjunto?

b. ¿Es la mediana del conjunto de valores uno de los valores del conjunto?

c. ¿Es la moda del conjunto de valores uno de los valores del conjunto?

2. Construya un conjunto de valores (no todos iguales) tal que

media = mediana = moda

3. Construya un conjunto de valores tal que

media $<$ mediana $<$ moda

4. Construya un conjunto de valores tal que

media $>$ mediana $>$ moda

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 7.1 *Lectura de gráficas y tablas*

CONCEPTOS

La información numérica se puede presentar en forma de tablas, gráficas de barras, pictografías, gráficas circulares y gráficas de líneas.

REPASO DE EJERCICIOS

Refiérase a la tabla.

1. TEMPERATURAS DE FACTOR DE ENFRIAMIENTO Encuentre la temperatura de factor de enfriamiento en un día con 10º F con viento de 15 mph.
2. RAPIDEZ DE VIENTO La temperatura de factor de enfriamiento (wind chill) es −25º F y la temperatura exterior es de 15º F. ¿Con qué rapidez sopla el viento?

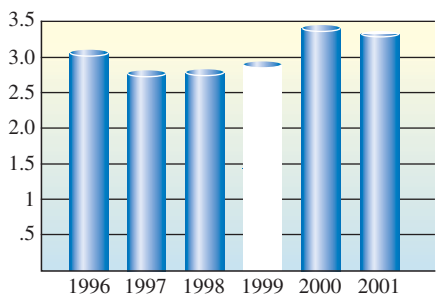
Determinación de la temperatura de factor de enfriamiento (wind chill)

Temperatura real	Velocidad del viento													
	35° F	30° F	25° F	20° F	15° F	10° F	5° F	0° F	−5° F	−10° F	−15° F	−20° F	−25° F	−30° F
5 mph	33°	27°	21°	16°	12°	7°	0°	−5°	−10°	−15°	−21°	−26°	−31°	−36°
10 mph	22	16	10	3	−3	−9	−15	−22	−27	−34	−40	−46	−52	−58
15 mph	16	9	−2	−5	−11	−18	−25	−31	−38	−45	−51	−58	−65	−72
20 mph	12	4	−3	−10	−17	−24	−31	−39	−46	−53	−60	−67	−74	−81
25 mph	8	1	−7	−15	−22	−29	−36	−44	−51	−59	−66	−74	−81	−88
30 mph	6	−2	−10	−18	−25	−33	−41	−49	−56	−64	−71	−79	−86	−93
35 mph	4	−4	−12	−20	−27	−35	−43	−52	−58	−67	−74	−82	−89	−97
40 mph	3	−5	−13	−21	−29	−37	−45	−53	−60	−69	−76	−84	−92	−100
45 mph	2	−6	−14	−22	−30	−38	−46	−54	−62	−70	−78	−85	−93	−102

Refiérase a la gráfica de abajo.

3. ¿Cuántos cupones se distribuyeron en 2000?
4. ¿Entre qué años se mantuvo esencialmente sin cambios la cantidad de cupones?
5. ¿Entre qué par de años se incrementó más el número de cupones?
6. ¿Entre qué par de años se presentó la mayor disminución en el número de cupones distribuidos?

Cupones distribuidos (en miles de millones)



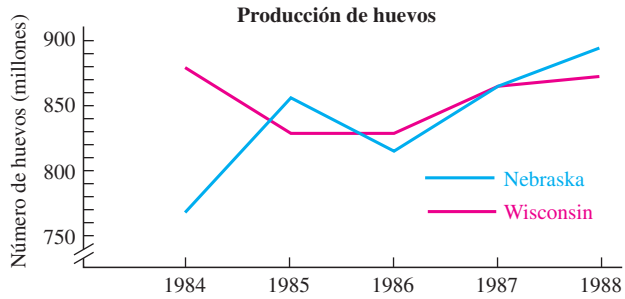
Refiérase a la gráfica de abajo.

7. ¿Cuántos huevos se produjeron en Wisconsin en 1985?

8. ¿Cuántos huevos se produjeron en Nebraska en 1987?

9. ¿En qué años la producción de huevos de Wisconsin igualó a la de Nebraska?

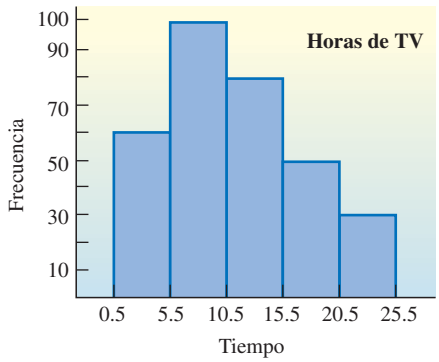
10. ¿Cuál fue la producción de huevos total de Wisconsin y Nebraska en 1988?



Refiérase a la gráfica de abajo.

11. Una encuesta de los hábitos televisivos de 320 hogares produjo el histograma siguiente. ¿Cuántos hogares miran entre 6 y 15 horas de televisión cada semana?

12. ¿Cuántos hogares miran 11 horas de televisión o más cada semana?



Un *histograma* es una gráfica de barras que tiene las siguientes características.

1. Las barras de un histograma se tocan.
2. Los datos nunca caen en los bordes de una gráfica.
3. Las anchuras de las barras son iguales y representan un intervalo de valores.

Un *polígono de frecuencias* es una gráfica de líneas especial que se forma a partir de un histograma.

SECCIÓN 7.2 *Media, mediana y moda*

La *media* (o promedio) está dada por la fórmula

$$\text{Media} = \frac{\text{suma de los valores}}{\text{número de valores}}$$

13. PROMEDIO DE 10 José trabajó duro este semestre, sacando calificaciones de 87, 92, 97, 100, 100, 98, 90 y 98. Si necesita un promedio de 95 para obtener un 10 en la clase, ¿ya lo logró?

Para encontrar la *mediana* de varios valores:

1. Arregle los valores en orden creciente.
2. Si hay un número impar de valores, la mediana es el valor a la mitad.
3. Si hay un número par de valores, la mediana es el promedio de los dos valores que están más próximos a la mitad.

14. LOS ESTUDIANTES De una clase de matemáticas tuvieron promedios de 43, 83, 40, 100, 36, 75, 39 y 100. Cuando se le preguntó al maestro qué tan bien le fue a los estudiantes, contestó: "43 fue típico". ¿Qué medida usó el maestro?

15. EMPAQUE DE PRETZELS Se pesaron unas muestras de pretzels de la marca SnacPack para averiguar si la leyenda del paquete "Peso neto 1.2 onzas" es exacta. La cuenta aparece en la tabla. Encuentre el peso modal.

Pesos de pretzels SnacPack

Onzas	Número
0.9	1
1.0	6
1.1	18
1.2	23
1.3	2

La *moda* de varios números es el valor que aparece con mayor frecuencia.

16. Encuentre el peso medio de las muestras en el ejercicio 15.

17. MUESTRAS DE SANGRE El técnico de un laboratorio médico examinó una muestra de sangre bajo el microscopio y midió los tamaños (en micras) de los glóbulos blancos. Los datos se indican a continuación. Encuentre la media, mediana y moda.

7.8 6.9 7.9 6.7 6.8 8.0 7.2 6.9 7.5

18. JUICIOS POR EL TABACO En noviembre de 1998 las 4 compañías más grandes productoras de tabaco llegaron a una acuerdo con 46 estados para pagar $206.4 miles de millones para cubrir los costos de salud pública relacionados con los daños a la salud de los fumadores. A continuación se muestran los pagos para cada uno de los estados de Nueva Inglaterra. Encuentre el pago mediano.

Connecticut	$3.63 miles de millones	New Hampshire	$1.3 miles de millones
Maine	$1.5 miles de millones	Rhode Island	$1.4 miles de millones
Massachusetts	$8.0 miles de millones	Vermont	$0.81 miles de millones

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7

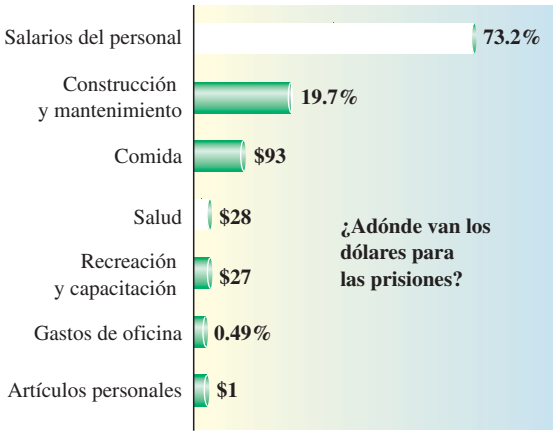
Refiérase a la gráfica de abajo. La manutención mensual de un reo asciende a $2266.

1. ¿Cuánto dinero se gasta mensualmente, por prisionero, para pagar al personal de la prisión?

2. ¿Cuánto dinero se gasta mensualmente, por prisionero, en gastos de oficina?

3. ¿Qué porcentaje de la asignación mensual se gasta en la alimentación de un prisionero?

4. ¿Qué porcentaje de la asignación mensual se gasta en la recreación y entrenamiento de un prisionero?

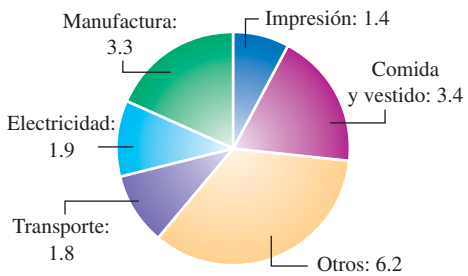


Refiérase a la gráfica de abajo.

5. ¿Qué porcentaje aproximado de todos los empleados se localizan en las industrias de comida y vestido?

6. Entre los trabajadores de la comida y el vestido, 2.4 millones están en la comida y el resto en el vestido. ¿Qué porcentaje de todos los trabajadores están en el vestido?

Empleos en la industria
(en millones)



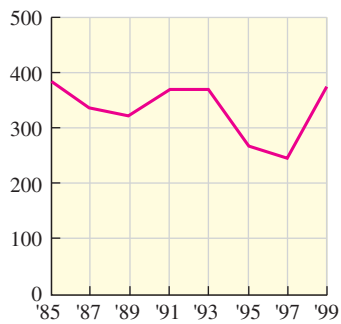
Refiérase a la gráfica que se muestra a continuación.

7. ¿Cuántos retrasos de tráfico aéreo ocurrieron en 1995?

8. ¿Qué año fue el peor para los retrasos de tráfico aéreo?

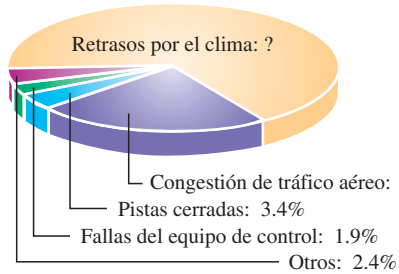
9. En 1999, alrededor de 2% de los retrasos del tráfico aéreo se debieron a fallas en el equipo de control. ¿Cuántos vuelos se retrasaron por esa razón?

Retrasos de tráfico aéreo
Iguales o superiores
a 15 minutos (en miles)



10. Refiérase a la gráfica circular. ¿Cuál es el porcentaje faltante de los retrasos por el clima?

Causas de los retrasos de tráfico aéreo



Refiérase a la ilustración y escoja la mejor manera de responder a los siguientes enunciados.

A. Ambos ciclistas se mueven y el ciclista 1 es más rápido que el 2.

B. Los dos ciclistas se mueven y el ciclista 2 es más rápido que el 1.

C. El ciclista 1 se detuvo y el 2 no lo hizo.

D. El ciclista 2 se detuvo y el 1 no se detuvo.

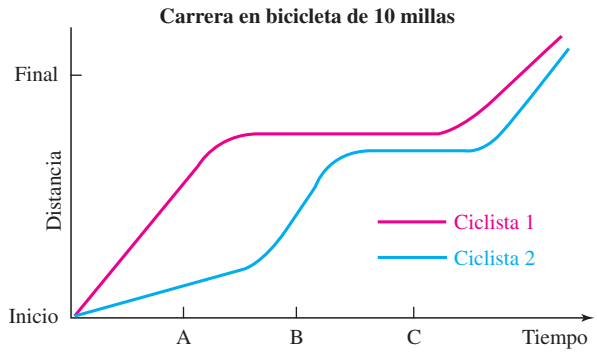
E. Ambos ciclistas se detuvieron.

11. Indique qué sucede al tiempo A.

12. Indique qué sucede al tiempo B.

13. Indique qué sucede al tiempo C.

14. ¿Cuál ciclista ganó la carrera?



Refiérase a esta información. Las horas de trabajo individual de los voluntarios en el último mes en el refugio para la gente sin hogar fueron las siguientes: 4, 6, 8, 2, 8, 10, 11, 9, 5, 12, 5, 18, 7, 5, 1 y 9.

15. Encuentre la mediana de las horas del trabajo de los voluntarios.

16. Encuentre la media de las horas del trabajo de los voluntarios.

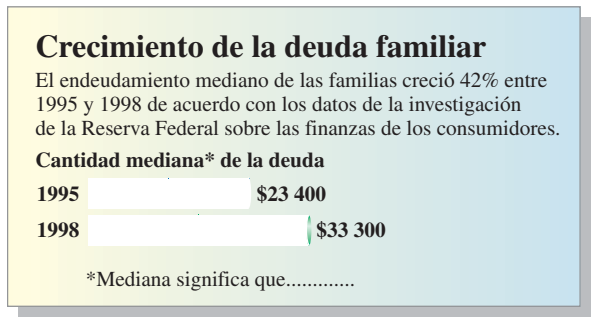
17. Encuentre la moda de las horas del trabajo de los voluntarios.

18. Si uno de los valores de 18 se quitara de la lista, ¿cuál sería más afectada: la media o la mediana?

19. AUDIENCIAS Los siete programas de televisión por cable más vistos para la semana del 8 al 14 de febrero se indican a continuación. ¿Cuáles son la media, la mediana y la moda de las audiencias? Redondee al décimo más cercano.

Programa/día/hora/empresa	Audiencia
1. "WCW Lunes". Lun. 9 p.m. TNT	4.5
2. "WCW Lunes". Lun. 10 p.m. TNT	4.4
3. "WCW Lunes". Lun. 8 p.m. TNT	3.9
4. "WWF Especial". Sáb. 9 p.m. USA	3.6
5. "WWF Lucha". Dom. 7 p.m. USA	3.1
6. "Show de perros". Mar. 8 p.m. USA	3.1
7. "WWF Especial". Sáb. 8 p.m. USA	2.9

20. ESTADÍSTICAS La gráfica de barras tiene un asterisco* que indica una nota para los lectores. Usando sus propias palabras complete la explicación del término *mediana.*


Crecimiento de la deuda familiar
El endeudamiento mediano de las familias creció 42% entre 1995 y 1998 de acuerdo con los datos de la investigación de la Reserva Federal sobre las finanzas de los consumidores.
Cantidad mediana* de la deuda
1995
$23 400
1998
$33 300
*Mediana significa que.....

Fuente: *Los Angeles Times* (1 de febrero de 2000)

CAPÍTULOS 1-7 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

1. GASOLINA En 1999, el consumo de gasolina en Estados Unidos fue de trescientos cincuenta y ocho millones, seiscientos mil galones diarios. Escriba este número en notación estándar.

2. Redondee 49 999 al millar más cercano.

Realice las operaciones.

3.
$$\begin{array}{r} 38\,908 \\ +15\,696 \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 9700 \\ -5491 \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} 345 \\ \times\ 67 \\ \hline \end{array}$$

6. $23\overline{)2001}$

7. Explique cómo comprobar el siguiente resultado usando una suma.

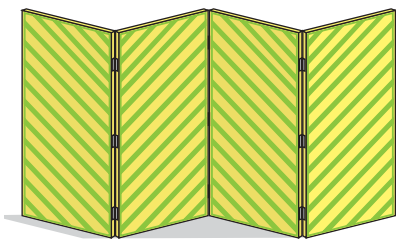
$$\begin{array}{r} 1142 \\ -\ 459 \\ \hline 683 \end{array}$$

8. EL CALENDARIO VIETNAMITA Un animal representa cada año lunar vietnamita. Los años del gato recientes se enlistan abajo. Si el ciclo continúa, ¿cuál será el siguiente año del gato?

1915 1927 1939 1951 1963 1975 1987 1999

9. Considere el enunciado de multiplicación $4 \cdot 5 = 20$. Muestre que la multiplicación es una suma repetida.

10. DIVISIONES DE UNA HABITACIÓN Cuatro piezas de "playwood" cada una de 22 pulgadas de ancho y 62 de alto se van a recubrir con tela por ambos lados, para hacer una división de una habitación como se muestra. ¿Cuántas pulgadas cuadradas de tela se van a usar?



11. **a.** Encuentre los factores de 18.

b. Encuentre la factorización en números primos de 19.

12. Enliste los primeros diez números primos.

13. ¿Por qué 27 no es un número primo?

14. Evalúe: $(9 - 2)^2 - 3^3$.

15. Divida: $\dfrac{-315}{-1}$.

16. Simplifique: $-(-6)$.

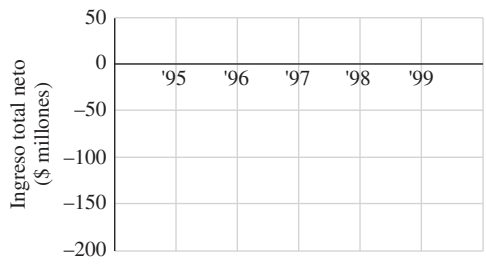
17. Trace la gráfica de los enteros mayores que -3 pero menores que 4, marque en la recta numérica.

18. Encuentre el valor absoluto: $|-5|$.

19. ¿Es cierto o falso el enunciado $-12 > -10$?

20. INGRESO ANUAL NETO Use los datos siguientes de la Polaroid Corporation para construir una gráfica de líneas.

Año	1995	1996	1997	1998	1999
Ingreso total neto ($ millones)	−139	15	−127	−51	9



Haga las operaciones.

21. $-25 + 5$

22. $25 - (-5)$

23. $-25(5)(-1)$

24. $\dfrac{-25}{-5}$

25. Evalúe: $\dfrac{(-6)^2 - 1^5}{-4 - 3}$.

26. Evalúe: $-3 + 3(-4 - 4 \cdot 2)^2$.

27. Evalúe: -3^2 y $(-3)^2$.

28. PLANETAS Mercurio orbita más cerca del Sol que cualquier otro planeta. Las temperaturas en Mercurio pueden llegar a ser tan altas como 810° F y tan bajas como −290° F. ¿Cuál es el intervalo de temperatura?

29. ¿360 es 45% de qué número?

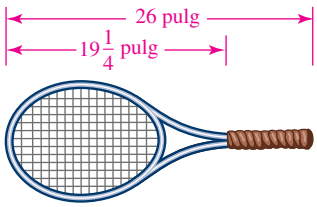
30. ¿Qué porcentaje de 600 es 90?

31. Escriba una expresión ilustrando una división entre 0 y una expresión ilustrando división de 0. ¿Cuál está indefinida?

32. Sume: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}$.

33. Reste: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}$.

34. TENIS Encuentre la longitud del mango de la raqueta de tenis que se muestra.



35. Multiplique: $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{7}$.

36. Divida: $2\dfrac{4}{5} \div 2\dfrac{2}{3}$.

37. Complete la tabla.

	Velocidad (mph)	Tiempo (hr)	Distancia recorrida (mi)
Camión	55	4	

38. Multiplique: $3.45 \cdot 100$.

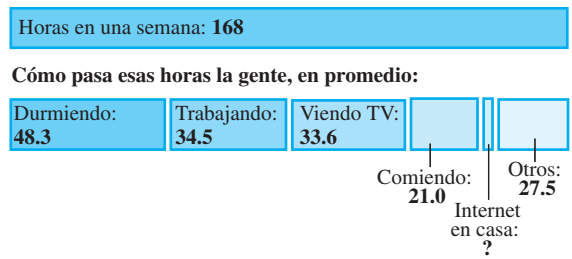
39. Multiplique: $(0.31)(2.4)$.

40. Divida: $0.72\overline{)536.4}$.

41. Cambie $\dfrac{8}{11}$ a un decimal.

42. HORAS DE CLASE En un curso de química los estudiantes pasan un total de 300 minutos en el laboratorio y toman clase cada semana. Si $\dfrac{7}{15}$ del tiempo se pasa en el laboratorio cada semana, ¿cuántos minutos permanecen en clase cada semana?

43. HORARIOS SEMANALES Refiérase a la ilustración. Determine el número de horas durante una semana que pasa un adulto, en promedio, en Internet en casa.



Basado en datos de la Fundación Nacional del Sueño y la Oficina de Estadísticas de Estados Unidos.

44. PPC El promedio de puntos de calificación de los jugadores del equipo de badminton se enlistan abajo. Encuentre la media, mediana y moda de los PPC del equipo.

3.04	4.00	2.75	3.23	3.87	2.20
3.02	2.25	2.99	2.56	3.58	2.75

CAPÍTULO 8

Introducción al álgebra

8.1 Resolución de ecuaciones por suma y resta

8.2 Resolución de ecuaciones por división y multiplicación

8.3 Expresiones algebraicas y fórmulas

8.4 Simplificación de expresiones algebraicas y la propiedad distributiva

8.5 Asociación o combinación de términos semejantes

8.6 Simplificación de expresiones para resolver ecuaciones

8.7 Exponentes

Concepto clave: variables

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso

Getty Images

La mayor parte de las compañías manufactureras tienen un proceso de producción que usa diferentes máquinas, materiales y trabajadores. Por ejemplo, en la producción de libros de texto se emplean prensas de impresión, encuadernadoras y máquinas de empaque. Se tienen que ordenar en cantidades adecuadas los diferentes insumos como son papel, tinta, pegamento y cartón para las cubiertas. Además, se deben programar equipos de trabajo que deben asistir en los horarios apropiados.

Los planificadores a menudo usan el álgebra para organizar todo el proceso de producción. Usan matemáticas para asegurarse que las corridas de producción sean eficientes, y lo más importante, redituables.

Verifique sus conocimientos

1. Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones son _____. Una ecuación contiene un símbolo _____ .
2. Una _____ es una letra que representa un número. Una _____ es un número que es fijo y no cambia de valor.
3. De acuerdo con la propiedad _____ de una igualdad: si cantidades iguales se multiplican por la misma cantidad, los resultados serán cantidades iguales.
4. Una _____ es una regla general que describe matemáticamente una relación entre dos o más variables.
5. Una _____ algebraica es una combinación de variables, números y los símbolos de operación para la suma, resta, multiplicación y división. Las _____ algebraicas se simplifican y las _____ se resuelven.
6. En el término $3x$, a 3 se le llama el _____ y a x la parte _____ .
7. A los términos con exactamente las mismas variables y exponentes se les llama términos _____ .

Resuelva las ecuaciones.

8. $x - 2 = 1$
9. $y + 3 = 5$
10. $4n = 64$
11. $\frac{z}{4} = 12$
12. $y - 70 = 50$
13. $10x = 1400$
14. Hay el doble de estudiantes en la clase de astronomía de Max que en su clase de matemáticas. Si hay 34 alumnos en la clase de astronomía, ¿cuántos hay en la de matemáticas?
15. Joel es 3 años más grande que Horacio. Joel tiene 21. ¿Cuántos tiene Horacio?
16. Evalúe $\frac{20 - x}{x + 1}$ para $x = 2$.
17. Michelle inició su paseo matutino de bicicleta a las 6 A.M. y regresó a las 9 A.M. viajó un promedio de 15 millas por hora en el paseo. Encuentre la distancia que recorrió en la mañana.

Simplifique quitando los paréntesis.

18. $3(2x + 7)$
19. $-3(2x - 3)$
20. Reduzca los términos semejantes.
    a. $2x - 2y + x + 2y$
    b. $x + x - x - 2x$
21. Simplifique.
    a. $-x(-3)$
    b. $2a \cdot 2b \cdot 3$
    c. $3(x - 3) - 2(x - 5)$
22. Resuelva las ecuaciones. **Compruebe las soluciones**.
    a. $3x - 3 = 2x + 3$
    b. $4y + 7 - y = 10$
    c. $3(2x - 5) = 5(x - 1)$
23. Escriba una expresión algebraica para
    a. el valor de q cuartos
    b. el valor de c billetes de cinco dólares
24. Simplifique.
    a. $x^2 \cdot x \cdot x \cdot x^4$
    b. $2x(3x^5)$
    c. $(3xy^3)^2$
    d. $(x^3)^4 (x^2)^3$

Taller de habilidades para el estudio

PREPARÁNDOSE PARA EL EXAMEN FINAL

Los exámenes finales provocan estrés en muchos estudiantes. La mayoría de los maestros de matemáticas hacen finales exhaustivos (cubren material del principio al fin del curso) y el número de temas a estudiar puede ser abrumador. ¡Relájese! Si ha seguido los lineamientos presentados en estos talleres de habilidades, gran parte del trabajo ya está hecho. Prepararse para el examen final es como prepararse para sus otros exámenes, pero como tendrá más temas, puede requerir más tiempo. Si planea sus actividades de estudio al menos con una semana de anticipación, entonces tendrá tiempo suficiente y esto reducirá la ansiedad que pueda experimentar.

¿Recuerda aquellas hojas de estudio? En el taller que se presentó en el capítulo 6 aprendió a preparar hojas de estudio (o tarjetas o cintas grabadas de audio) para cada examen. Úselas para empezar su preparación para el examen final. Repase las hojas de estudio y haga una nota sólo de aquellas cosas que no recuerde. Trate de reducir todos sus materiales de estudio a una lista que quepa en una hoja de papel. Ésta será su hoja de estudio para el examen final. Llévela consigo toda la semana y repásela cada vez que tenga oportunidad.

Exámenes anteriores. Revise todos sus exámenes anteriores que fueron calificados y corrija los errores que haya cometido. Haga una lista de los problemas sobre los que aún se sienta inseguro.

Haga un final de práctica. Tal como lo hizo con sus exámenes de práctica, encuentre problemas en los que pueda encontrar una solución (los puede obtener de los ejemplos en su libro de texto, problemas impares de tarea y ejemplos de sus notas son una buena fuente). Asegúrese de tener una buena representación de problemas de todos los capítulos que haya estudiado. Haga un final de práctica que tenga más o menos el mismo número de problemas que tendrá su examen final.

Consiga ayuda de otros compañeros. Es buena idea comparar notas con otros compañeros de su clase; incluso puede intercambiar exámenes finales de cursos anteriores. Si tiene problemas de exámenes pasados que no pueda resolver consulte a un profesor o asesor en horas de oficina.

Día del examen final. Asegúrese que tiene todos los materiales que necesitará para su examen final. Entre los accesorios que podría necesitar se cuentan: hojas de papel, lápices, gomas de borrar, algunas hojas de papel milimétrico. Asegúrese que descansó lo suficiente y haga los arreglos para llegar temprano. Esté seguro de que sabe la hora correcta del examen final porque a veces los exámenes finales se realizan a horas diferentes de las de clase. Resuelva primero los problemas de los que está seguro y deje los más difíciles para lo último.

TAREA

1. Realice un calendario una semana antes del examen final para estudiar a conciencia, planee su tiempo para que lo distribuya entre los demás exámenes que tenga qué hacer. Haga planes para estudiar al menos dos horas diarias.
2. Prepare una hoja de estudio para su examen final.
3. Elabore un final de práctica. Encuentre al menos otro estudiante de su clase con quien pueda intercambiar exámenes de práctica. Al menos dos días antes de su final haga un final de práctica bajo condiciones parecidas a las que tendrá en su examen real (libro cerrado, tiempo, etcétera).
4. Consulte a su profesor o asesor cualquier pregunta o duda que no haya podido resolver, realice esta consulta al menos un día antes del final.
5. La noche anterior al examen final asegúrese de tener todos los materiales que necesitará. Duerma bien.
6. El día del examen final revise los problemas sobre los que sienta confianza en resolverlos. No trate de aprender nuevo material el día del final si está estresado.

El álgebra es el lenguaje de las matemáticas. En este capítulo aprenderá más sobre cómo pensar y escribir en este lenguaje usando su herramienta más importante: una variable.

8.1 Resolución de ecuaciones por suma y resta

• Ecuaciones • Comprobación de soluciones • Resolución de ecuaciones • Resolución de problemas con ecuaciones

El lenguaje de las matemáticas es el *álgebra.* La palabra *álgebra* viene del título de un libro escrito por el matemático árabe Al-Khowarazmi alrededor del año 800 d.C. Su título, *Ihm aljabr wa'l muqabalah* significa restauración y reducción, proceso usado en ese entonces para resolver ecuaciones. En esta sección empezamos discutiendo las ecuaciones, una de las ideas más poderosas en el álgebra.

Ecuaciones

Una **ecuación** es un enunciado que indica que dos expresiones son iguales. Tres ejemplos de ecuaciones son:

$$x + 5 = 21, \qquad 16 + 5 = 21 \qquad \text{y} \qquad 10 + 5 = 21$$

Ecuaciones

Las **ecuaciones** son oraciones matemáticas que contienen un símbolo =.

En la ecuación $x + 5 = 21$, a la expresión $x + 5$ se le llama el **lado izquierdo** y a 21 se le llama el **lado derecho**. La letra x es la **variable** (o **incógnita**).

Una ecuación puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo, $16 + 5 = 21$ es una ecuación verdadera mientras que $10 + 5 = 21$ es una ecuación falsa. Una ecuación que contenga una variable puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de la variable. Si x es 16 la ecuación $x + 5 = 21$ es verdadera porque

$$\mathbf{16} + 5 = 21 \qquad \text{Sustituya } x \text{ por 16.}$$

Sin embargo, esta ecuación es falsa para cualquier otro valor de x.

Cualquier número que haga que una ecuación sea verdadera cuando se le sustituya por la variable se dice que *satisface* la ecuación. A tales números se les llama **soluciones**. Como 16 es el único número que satisface $x + 5 = 21$, es la única solución de la ecuación.

Comprobación de soluciones

Autoevaluación 1
¿8 es solución de $x + 17 = 25$?

Respuesta sí

EJEMPLO 1 Verifique que 18 es solución de la ecuación $x - 3 = 15$.

Solución Sustituimos x por 18 en la ecuación y verificamos que ambos lados de la ecuación sean iguales

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} - 3 &= 15 && \text{Esta es la ecuación dada.} \\ \mathbf{18} - 3 &\stackrel{?}{=} 15 && \text{Sustituya } x \text{ por 18. Lea } \stackrel{?}{=} \text{ como "es posiblemente igual a"} \\ 15 &= 15 && \text{Haga la resta} \end{aligned}$$

Como $15 = 15$ es una ecuación verdadera, 18 es una solución de $x - 3 = 15$.

EJEMPLO 2 ¿Es 23 una solución de $32 = y + 10$?

Solución Sustituimos y por 23 y simplificamos.

$32 = \mathbf{y} + 10$ Esta es la ecuación dada.

$32 \stackrel{?}{=} \mathbf{23} + 10$ Sustituimos y por 23.

$32 \neq 33$ Haga la suma.

Como el lado izquierdo y el derecho no son iguales, 23 no es solución de $32 = y + 10$.

Autoevaluación 2
¿5 es solución de $20 = y + 17$?

Respuesta no

Resolución de ecuaciones

Como la solución de una ecuación usualmente no se da, debemos desarrollar un proceso para encontrarla. A este proceso se le llama *resolución de la ecuación*. Para desarrollar un entendimiento de las propiedades y procedimientos usados para resolver una ecuación examinaremos $x + 2 = 5$ y haremos algunas observaciones para resolverla en forma práctica.

Podemos pensar que las balanzas que se muestran en la figura 8.1a representan la ecuación $x + 2 = 5$. El peso (en gramos) en el lado izquierdo de las balanzas es $x + 2$ y el peso (en gramos) del lado derecho es 5. Para encontrar x necesitamos despejarla. Eso se puede lograr quitando dos gramos del lado izquierdo de las balanzas. El sentido común nos dice que también tenemos que quitar dos gramos del lado derecho de las balanzas si queremos que permanezcan balanceadas. En la figura 8.1b podemos ver que x gramos se balancean con 3 gramos. Decimos que hemos resuelto la *ecuación* y que la *solución* es 3.

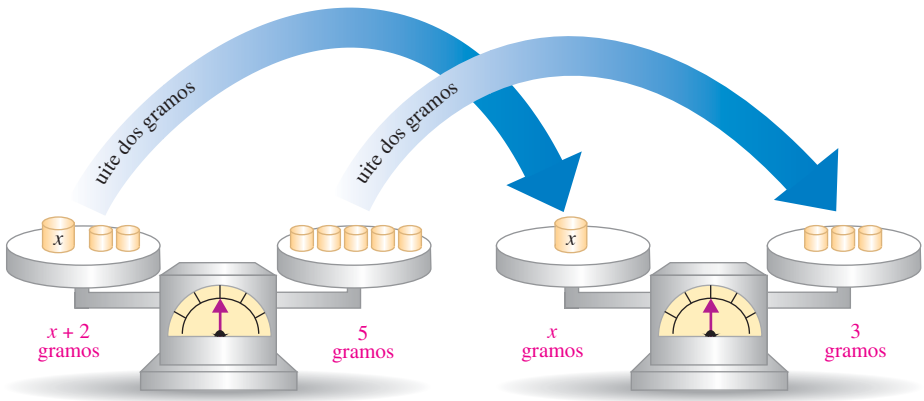


FIGURA 8.1

A partir de este ejemplo podemos hacer algunas observaciones sobre la resolución de una ecuación.

- Para encontrar el valor de x necesitamos aislarla en el lado izquierdo de las balanzas.
- Para despejar x tenemos que deshacer la suma de dos gramos. Esto se logró restando dos gramos del lado izquierdo.
- Queríamos que las balanzas siguieran balanceadas. Cuando restamos 2 gramos del lado izquierdo restamos la misma cantidad del lado derecho.

Las observaciones sugieren una propiedad de la igualdad: *si la misma cantidad se resta de cantidades iguales, los resultados deben ser cantidades iguales.* Se puede expresar esta propiedad en símbolos.

Propiedad de resta de la igualdad

Sean números representados por a, b y c.

Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Cuando usamos esta propiedad la ecuación resultante es equivalente a la ecuación original.

Ecuaciones equivalentes

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

En los ejemplos previos encontramos que $x + 2 = 5$ es equivalente a $x = 3$. Esto es verdadero porque estas ecuaciones tienen la misma solución, 3.

Ahora mostraremos cómo resolver $x + 2 = 5$ usando un enfoque algebraico.

Autoevaluación 3
Resuelva $x + 7 = 14$ y compruebe el resultado.

EJEMPLO 3 Resuelva: $x + 2 = 5$.

Solución Para despejar x en el lado izquierdo de la ecuación, deshacemos la suma de 2 restando 2 de ambos lados de la ecuación.

$x + 2 = 5$	Entran ecuaciones
$x + 2 \mathbf{- 2} = 5 \mathbf{- 2}$	Reste 2 de ambos lados.
$x = 3$	En el lado izquierdo, restar dos deshace la suma de 2 y nos deja a x. En el lado derecho, $5 - 2 = 3$.

Comprobamos sustituyendo x por 3 en la ecuación original y simplificando. Si 3 es la solución obtenemos un enunciado verdadero.

Comprobación:

$\boldsymbol{x} + 2 = 5$	
$\mathbf{3} + 2 \stackrel{?}{=} 5$	Sustituya x por 3.
$5 = 5$	Haga la suma.

Respuesta 7

Como la ecuación resultante es verdadera, la solución es 3.

Una segunda propiedad que usamos para resolver ecuaciones involucra la suma. Se basa en la idea siguiente: *Si la misma cantidad se suma a cantidades iguales, los resultados serán cantidades iguales.* En símbolos, tenemos la propiedad siguiente.

Propiedad de la suma de la igualdad

Sean números representados por a, b y c.

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Podemos pensar que las balanzas mostradas en la figura 8.2(a) representan la ecuación $x - 2 = 3$. Para encontrar x necesitamos usar la propiedad de la suma de la igualdad y poner 2 gramos de peso en cada lado. Las balanzas permanecerán equilibradas. A partir de las balanzas de la figura 8.2(b) podemos ver que x gramos se equilibran con 5 gramos. La solución de $x - 2 = 3$ es por tanto 5.

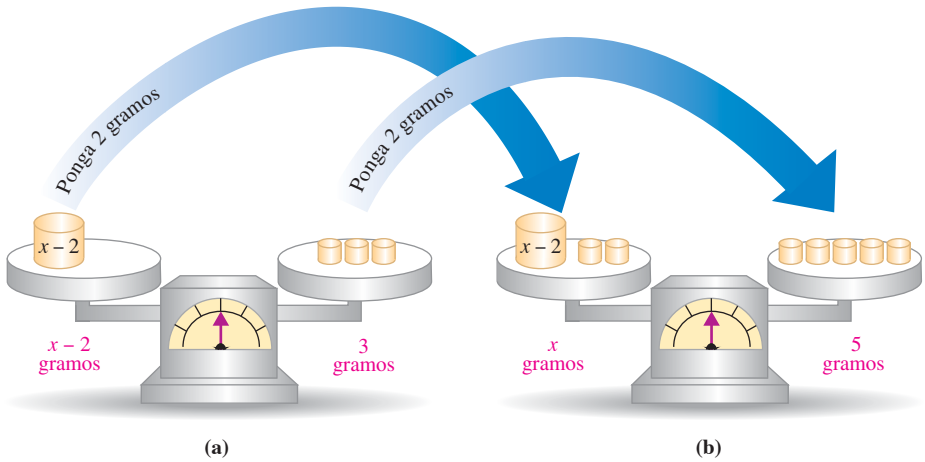


FIGURA 8.2

Para resolver $x - 2 = 3$ algebraicamente aplicamos la propiedad de la suma de la igualdad. Podemos despejar x en el lado izquierdo de la ecuación sumando 2 a ambos lados.

$$x - 2 = 3$$
$$x - 2 \mathbf{+ 2} = 3 \mathbf{+ 2}$$ Para deshacer la resta de 2, sume 2 a ambos lados.
$$x = 5$$ En el lado izquierdo, sumar 2 deshace la resta de 2 y nos deja a x. En el lado derecho, $3 + 2 = 5$.

Para comprobar el resultado, sustituimos x por 5 en la ecuación original y simplificamos

Comprobación: $\mathbf{x} - 2 = 3$
$\mathbf{5} - 2 \stackrel{?}{=} 3$ Sustituya x por 5.
$3 = 3$ Haga la resta.

Como este es un enunciado verdadero, la solución es 5.

EJEMPLO 4

Resuelva: $19 = y - 7$.

Solución Para despejar la variable y en el lado derecho usamos la propiedad de la suma de la igualdad. Podemos deshacer la resta de 7 sumando 7 a ambos lados.

$$19 = y - 7$$
$$19 \mathbf{+ 7} = y - 7 \mathbf{+ 7}$$ Sume 7 a ambos lados.
$$26 = y$$ En el lado izquierdo $19 + 7 = 26$. En el lado derecho sumando 7 deshacemos la resta de 7 y nos deja y.
$$y = 26$$ Es una práctica común cuando se encuentra una solución, escribir la variable primero. Si $26 = y$ entonces $y = 26$.

Comprobamos sustituyendo y por 26 en la ecuación original y simplificamos.

Comprobación: $19 = \mathbf{y} - 7$ Esta es la ecuación original.
$19 \stackrel{?}{=} \mathbf{26} - 7$ Sustituya y por 26.
$19 = 19$ Haga la resta.

Como es un enunciado verdadero, la solución es 26.

Autoevaluación 4
Resuelva $75 = b - 38$ y compruebe el resultado.

Respuesta 113

Resolución de problemas con ecuaciones

La clave para resolver problemas es entender el problema y luego idear un plan para resolverlo. La lista de pasos siguiente da una buena estrategia a seguir.

Estrategia para resolver problemas

1. **Analice el problema** leyéndolo cuidadosamente para entender los hechos dados. ¿Qué información se da? ¿Qué vocabulario se da? ¿Qué se le pide encontrar? Un diagrama ayuda a menudo a visualizar los hechos del problema.
2. **Forme una ecuación** escogiendo una variable que represente la cantidad a encontrar. Luego exprese todas las otras cantidades desconocidas como expresiones que involucren una variable. Pueden ayudar palabras o frases clave. Finalmente, traduzca las palabras de un problema en una ecuación.
3. **Resuelva la ecuación.**
4. **Redacte la conclusión.**
5. **Compruebe el resultado** en las palabras del problema.

Usaremos ahora esta estrategia de cinco pasos para resolver problemas. El propósito de los siguientes ejemplos es ayudarlo a aprender la estrategia aunque probablemente resuelva los problemas sin ella.

EJEMPLO 5 Datos financieros.

La figura 8.3 muestra el ingreso neto trimestral de 1999 de Nike, la compañía de calzado deportivo. ¿Cuáles fueron los ingresos netos totales de la compañía en 1999?

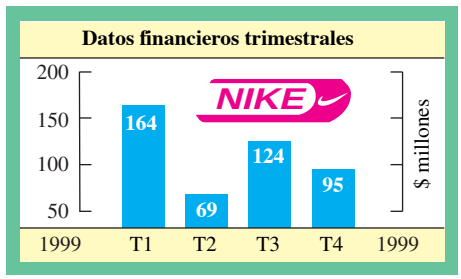


FIGURA 8.3

Analice el problema

- Se nos da el ingreso neto de cada trimestre.
- Se nos pide encontrar el ingreso neto total.

Forme una ecuación

Sea n = ingreso neto total de 1999. Para formar una ecuación que involucre a n buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Palabra clave: *total* **Traducción:** *suma*

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

Ingreso neto total	es	ingreso del 1er trimestre	más	ingreso neto del 2do trimestre	más	ingreso neto del 3er trimestre	más	ingreso neto del 4to trimestre
n	=	164	+	69	+	124	+	95

Resuelva la ecuación

$n = 164 + 69 + 124 + 95$ Estamos trabajando en millones de dólares.

$= 452$ Haga las sumas.

Redacte la conclusión

El ingreso neto total de Nike fue $452 millones.

Compruebe el resultado

Podemos comprobar el resultado por estimación. Para estimarlo redondeamos el ingreso neto total de cada trimestre y sumamos.

$$160 + 70 + 120 + 100 = 450$$

La respuesta, 452, es razonable.

EJEMPLO 6 **Pequeñas empresas.** El último año un estilista perdió 17 clientes que se mudaron. Si ahora tiene 73 clientes, ¿cuántos tenía originalmente?

Analice el problema

- Sabemos que empezó con un número desconocido de clientes y después de que 17 se mudaron, quedaron 73.
- Se nos pide encontrar el número de clientes que tenía antes de que alguno se mudara.

Forme una ecuación

Podemos decir que c represente la cantidad original de clientes. Para formar una ecuación que involucre a c buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: *se mudaron* **Traducción:** *resta*

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

El número original de clientes	menos	17	es	el número restante de clientes.
c	$-$	17	$=$	73

Resuelva la ecuación

$$c - 17 = 73$$

$$c - 17 \mathbf{+ 17} = 73 \mathbf{+ 17}$$ Para deshacer la resta de 17 sume 17 a ambos lados.

$$c = 90$$ Simplifique cada lado de la ecuación.

Redacte la conclusión

Él tenía originalmente 90 clientes.

Compruebe el resultado

El estilista tenía 90 clientes. Después de perder 17 le quedaban $90 - 17$, o 73. La respuesta, 90, satisface la ecuación.

EJEMPLO 7 **Compra de una casa.** Sue quiere comprar una casa que cuesta $87 000. Como sólo tiene $15 000 para un pronto tendrá que pedir prestado dinero adicional mediante una hipoteca. ¿Cuánto tendrá que pedir?

Analice el problema

- La casa cuesta $87 000.
- Sue tiene $15 000 para un pronto.
- Debemos encontrar cuánto dinero tiene que solicitar.

Forme una ecuación

Podemos hacer que x represente el dinero que tiene que pedir. Para formar una ecuación que involucre a x buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: *pedir un dinero adicional* **Traducción:** *suma*

Ahora traducimos en palabras el problema en una ecuación.

La cantidad que tiene Sue	más	la cantidad que pida	es	el costo total de la casa.
15 000	+	x	=	87 000

Resuelva la ecuación

$$15\,000 + x = 87\,000$$

$$15\,000 + x \mathbf{- 15\,000} = 87\,000 \mathbf{- 15\,000}$$ Para deshacer la suma de 15 000 reste 15 000 de ambos lados.

$$x = 72\,000$$ Haga las restas.

Haga las restas.

Ella debe pedir $72 000.

Compruebe el resultado

Con una hipoteca de $72 000 ella tendrá $15 000 + $72 000 que son $87 000 que es lo necesario para comprar la casa. La respuesta, 72 000, es correcta.

Sección 8.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Una ecuación es un enunciado en el que dos expresiones son _____. Una ecuación contiene un símbolo ____.
2. Una _____ de una ecuación es un número que satisface la ecuación.
3. En $30 = t - 12$, el lado _____ de la ecuación es $t - 12$.
4. Una letra que se usa para representar un número se llama _____.
5. Las ecuaciones _____ tienen exactamente las mismas soluciones.
6. Para resolver una ecuación _____ la variable en uno de los lados de la ecuación.

CONCEPTOS *Complete las propiedades de la igualdad.*

7. Si $x = y$ y c es cualquier número entonces $x + c =$ ☐ + ☐.
8. Si $x = y$ y c es cualquier número entonces $x - c =$ ☐ − ☐.
9. En $x + 6 = 10$, ¿qué operación se hace sobre la variable? ¿Cómo deshacemos esa operación para despejar la variable?
10. En $9 = y - 5$, ¿qué operación se hace sobre la variable? ¿Cómo deshacemos esa operación para despejar la variable?

NOTACIÓN *Complete las soluciones para resolver la ecuación dada.*

11. $x + 8 = 24$

$x + 8 -$ ☐ $= 24 -$ ☐

$x = 16$

Comprobación: $x + 8 = 24$

☐ $+ 8 \stackrel{?}{=} 24$

☐ $= 24$

De esta forma, la solución es ☐.

12. $x - 8 = 24$

$x - 8 + \square = 24 + \square$

$x = 32$

Comprobación: $x - 8 = 24$

$\square - 8 \square 24$

$\square = 24$

De esta forma, la solución es $\square$

PRÁCTICA *Determine si cada enunciado es una ecuación*

13. $x = 2$

14. $y - 3$

15. $7x < 8$

16. $7 + x = 2$

17. $x + y = 0$

18. $3 - 3y > 2$

19. $1 + 1 = 3$

20. $5 = a + 2$

Para cada ecuación ¿el número dado es solución?

21. $x + 2 = 3;\ 1$

22. $x - 2 = 4;\ 6$

23. $a - 7 = 0;\ 7$

24. $x + 4 = 4;\ 0$

25. $8 - y = y;\ 5$

26. $10 - c = c;\ 5$

27. $x + 32 = 0;\ 16$

28. $x - 1 = 0;\ 4$

29. $z + 7 = z;\ 7$

30. $n - 9 = n;\ 9$

31. $x = x;\ 0$

32. $x = 2;\ 0$

Use las propiedades de suma o resta de la igualdad para resolver las ecuaciones. Compruebe sus respuestas.

33. $x - 7 = 3$

34. $y - 11 = 7$

35. $a - 2 = 5$

36. $z - 3 = 9$

37. $1 = b - 2$

38. $0 = t - 1$

39. $x - 4 = 0$

40. $c - 3 = 0$

41. $y - 7 = 6$

42. $a - 2 = 4$

43. $70 = x - 5$

44. $66 = b - 6$

45. $312 = x - 428$

46. $x - 307 = 113$

47. $x - 117 = 222$

48. $y - 27 = 317$

49. $x + 9 = 12$

50. $x + 3 = 9$

51. $y + 7 = 12$

52. $c + 11 = 22$

53. $t + 19 = 28$

54. $s + 45 = 84$

55. $23 + x = 33$

56. $34 + y = 34$

57. $5 = 4 + c$

58. $41 = 23 + x$

59. $99 = r + 43$

60. $92 = r + 37$

61. $512 = x + 428$

62. $x + 307 = 513$

63. $x + 117 = 222$

64. $y + 38 = 321$

65. $3 + x = 7$

66. $b - 4 = 8$

67. $y - 5 = 7$

68. $z + 9 = 23$

69. $0.4 + a = 1.2$

70. $0.5 + x = 1.3$

71. $x - 1.3 = 3.4$

72. $x - 2.3 = 1.9$

73. $b + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

74. $c + \frac{3}{5} = \frac{3}{4}$

75. $p - \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$

76. $q + \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$

APLICACIONES *Complete las soluciones.*

77. ARQUEOLOGÍA Un manuscrito de 1 700 años de antigüedad es 425 años más antiguo que la vasija de barro en la que se encontró. ¿Cuál es la antigüedad de la vasija?

Analice el problema

- El manuscrito tiene _____ de antigüedad.
- El manuscrito es _____ más antiguo que la vasija.
- Se nos pide encontrar _____.

Forme una ecuación Como queremos encontrar la antigüedad de la vasija, podemos hacer $x =$ _____. Ahora buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: _____

Traducción: _____

Podemos ahora traducir el problema en palabras en una ecuación

La antigüedad del manuscrito	es	425	más	la antigüedad de la vasija.
$\square$	=	425	+	$\square$

Resuelva la ecuación

$\square = 425 + x$

$1700 - \square = 425 + x - \square$

$\square = x$

Redacte la conclusión _____.

Compruebe el resultado Si la vasija tiene $\square$ años de antigüedad entonces el manuscrito tiene $1\,275 + 425 =$ $\square$ años de antigüedad. La respuesta es correcta.

78. BANCA Después de que un estudiante hizo un cheque por $1500 para pagar un automóvil, tenía un saldo de $750 en su cuenta. ¿Cuánto tenía en la cuenta antes de hacer el cheque?

Analice el problema

- Se hizo un cheque por _____.
- El saldo quedó en _____.
- Se nos pide encontrar _____.

Forme una ecuación Como queremos encontrar su saldo antes de que hiciera el cheque, hacemos $x =$ _____. Ahora buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: _____

Traducción: _____

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

El saldo original en la cuenta	menos	$1500	es	$750.
x	$-$	1500	$=$	750

Resuelva la ecuación

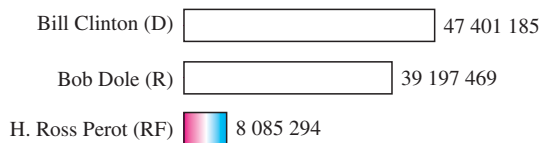
$$\square - 1500 = 750$$
$$x - 1500 + \square = 750 + \square$$
$$x = \square$$

Exprese la conclusión _____.

Compruebe el resultado El saldo original era $\square$. Después de hacer el cheque tenía un saldo de $2250 $\square$. La respuesta es correcta.

Haga que una variable represente la cantidad desconocida. Luego escriba y resuelva una ecuación para responder la pregunta.

79. ELECCIONES La ilustración muestra los votos recibidos por los tres candidatos principales compitiendo por la presidencia de Estados Unidos en 1996. Encuentre el número total de votos.



80. GRABACIONES EXITOSAS El artista de mayor edad que tuvo un sencillo número 1 fue Louis Armstrong a los 67 años con *Hello Dolly*. El artista más joven en lograr un sencillo número 1 fue Jimmy Boyd de 12 años con *I Saw Mommy Kissing Santa Claus*. ¿Cuál es la diferencia de edades?

81. INVITACIONES A UNA FIESTA Tres de las invitaciones de la fiesta de Mia se perdieron en el correo pero 59 sí se entregaron. ¿Cuántas invitaciones mandó?

82. PROTECCIÓN AUDITIVA La intensidad del sonido de un motor de un jet es 110 decibeles. ¿Qué nivel de ruido experimentará un mecánico de aviación si los tapones de oídos que usa reducen la intensidad del sonido en 29 decibeles?

83. COMIDA RÁPIDA La cuota de una franquicia y los gastos de inicio para un restaurante Taco Bell son $287 000. Si una empresaria tiene $68 500 para invertir, ¿cuánto dinero tiene que pedir prestado para abrir su propio restaurante Taco Bell?

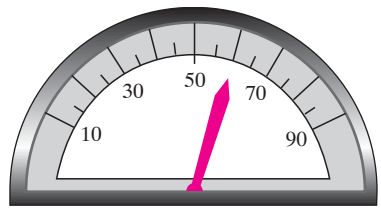
84. COMPRA DE UNOS PALOS DE GOLF Un hombre necesita $345 para un nuevo juego de palos de golf. ¿Cuánto dinero adicional requiere si tiene ahora $317?

85. INGRESOS DE CELEBRIDADES La revista *Forbes* estima que en 2003 Celine Dion ganó $28 millones. Si esto fue $152 millones menos que lo que ganó Oprah Winfrey, ¿cuánto ganó Oprah Winfrey?

86. SE BUSCA AYUDA A partir del siguiente anuncio en la sección de clasificados de un periódico, determine el valor del paquete de prestaciones.

★CUENTAS POR PAGAR★
Personal con 2 3 años de experiencia. Escolaridad graduado de bachillerato, CPA en contabilidad, experiencia laboral previa en compañías grandes. Sueldo inicial de $45 000. Excelente paquete de comisiones. Valor del sueldo base más comisiones $52 000. Interesados enviar fax con su CV.

87. CORTES DE ENERGÍA El sistema eléctrico de un edificio automáticamente se apaga cuando el medidor que se muestra indica 85. ¿Cuánto debe incrementarse la lectura de la corriente para causar que se apague el sistema?



88. JUEGOS DE VIDEO Después de una semana de jugar *Sonic Adventure* de Sega, un muchacho logró 11 053 puntos en un juego — aumento de 9485 puntos sobre la primera vez que jugó. ¿Cuál fue su puntuación en su primer juego?

89. REPARACIÓN DEL AUTO Una mujer pagó $29 menos por arreglar su auto en un taller donde se reparan sistemas de escape, en comparación con lo que habría pagado en una estación de servicio. En la estación de servicio habría pagado $219. ¿Cuánto pagó porque le arreglaran su auto?

90. PASAJEROS DE AUTOBÚS Un hombre tuvo que esperar 20 minutos por un autobús el día de hoy. Hace tres días tuvo que esperar 15 minutos más que lo que esperó hoy porque tres autobuses pasaron sin detenerse. ¿Cuánto tiempo esperó hace tres días?

POR ESCRITO

91. Explique qué significa que un número satisfaga una ecuación.

92. Explique cómo saber si un número es solución de una ecuación.

93. Explique lo que la figura 8.1 (página 423) trata de mostrar.

94. Explique lo que la figura 8.2 (página 425) trata de mostrar.

95. Cuando se resuelve una ecuación, *despejamos* la variable. Escriba una oración en la que la palabra despejar se use en un contexto diferente.

96. Piense un número. Súmele 8. Ahora reste 8 de ese resultado. Explique por qué siempre obtendremos el mismo resultado.

REPASO

97. Redondee 325 784 a la decena más cercana.

98. Encuentre la potencia: 1^5.

99. Evalúe $2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

100. Represente $4 + 4 + 4$ como una multiplicación.

101. Evalúe: $8 - 2(3) + 1^3$.

102. Escriba 1 055 en palabras.

8.2 Resolución de ecuaciones por división y multiplicación

- Propiedad de división de la igualdad
- Propiedad de multiplicación de la igualdad
- Resolución de problemas con ecuaciones

En la sección previa resolvimos ecuaciones de las formas

$$x - 4 = 10 \quad \text{y} \quad x + 5 = 16$$

usando las propiedades de suma y resta de las igualdades. En esta sección describimos cómo resolver ecuaciones de las formas

$$2x = 8 \quad \text{y} \quad \frac{x}{3} = 25$$

usando las propiedades de la división y multiplicación de la igualdad.

Propiedad de división de la igualdad

Para resolver muchas ecuaciones debemos dividir ambos lados de la ecuación entre el mismo número distinto de cero. La ecuación resultante será equivalente a la ecuación original. Esta idea se resume en la propiedad de la división de la igualdad: *Si cantidades iguales se dividen entre la misma cantidad distinta de cero, los resultados serán cantidades iguales.*

Propiedad de la división de la igualdad

Sean números representados por a, b y c y c no es cero.

$$\text{Si } a = b, \text{ entonces } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

Ahora consideraremos cómo resolver la ecuación $2x = 8$. Recuerde que $2x$ significa $2 \cdot x$. Por tanto, la ecuación dada se puede rescribir como $2 \cdot x = 8$. Podemos pensar que las balanzas de la figura 8.4(a) de la página siguiente representan la ecuación $2 \cdot x = 8$. El peso (en gramos) en el lado izquierdo de las balanzas es $2 \cdot x$ y el peso (en gramos) en el lado derecho es 8. Como estos pesos son iguales, las balanzas están en equilibrio. Para encontrar x necesitamos despejarla. Esto se puede lograr usando la propiedad de la división de la igualdad para quitar la mitad del peso de cada lado. Las balanzas permanecerán en equilibrio. De las balanzas que se muestran en la figura 8.4(b) vemos que x gramos se equilibran con 4 gramos.

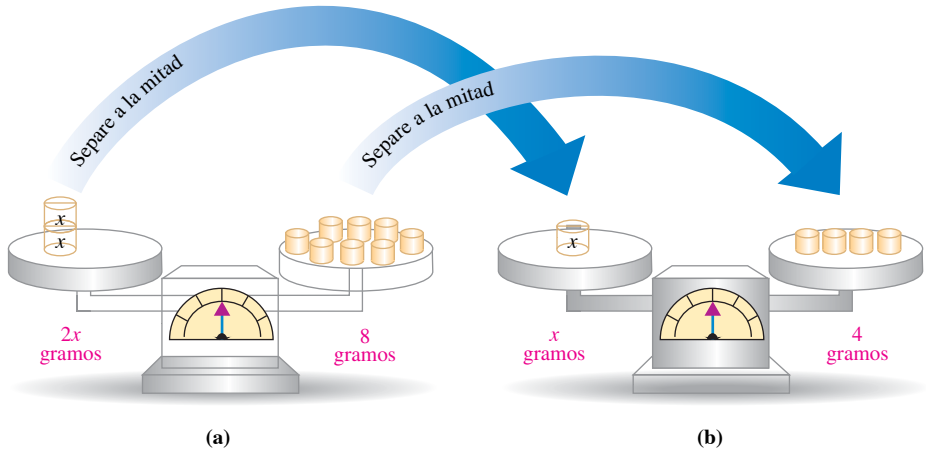


FIGURA 8.4

Ahora mostramos cómo resolver $2x = 8$ usando un enfoque algebraico.

Autoevaluación 1
Resuelva $17x = 153$ y compruebe el resultado.

EJEMPLO 1 Resuelva $2x = 8$ y compruebe el resultado.

Solución Recuerde que $2x = 8$ significa $2 \cdot x = 8$. Para despejar x en el lado izquierdo de la ecuación, deshacemos la multiplicación por 2 dividiendo ambos lados de la ecuación entre 2.

$2x = 8$ Esta es la ecuación a resolver.

$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{8}{\mathbf{2}}$ Para deshacer la multiplicación por 2, divida ambos lados entre 2.

$x = 4$ Cuando x se multiplica por 2 y ese producto después se divide entre 2 el resultado es x. Efectúe la división: $8 \div 2 = 4$.

Para comprobar este resultado sustituimos 4 por x en $2x = 8$.

Comprobación:
$2\mathbf{x} = 8$
$2 \cdot \mathbf{4} \stackrel{?}{=} 8$ Sustituya x por 4.
$8 = 8$ Haga la multiplicación.

Respuesta 9

Como $8 = 8$ es un enunciado verdadero, la solución es 4.

Propiedad de multiplicación de la igualdad

También podemos multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo número distinto de cero para obtener una ecuación equivalente. Esta idea se resume en la propiedad de multiplicación de la igualdad: *Si cantidades iguales se multiplican por la misma cantidad distinta de cero los resultados serán cantidades iguales.*

Propiedad de multiplicación de la igualdad

Sean números representados por a, b y c pero c es diferente de cero.

Si $a = b$, entonces $c \cdot a = c \cdot b$ o simplemente, $ca = cb$.

Podemos pensar que las balanzas mostradas en la figura 8.5(a) en la siguiente página representan la ecuación $\frac{x}{3} = 25$. El peso en el lado izquierdo de las balanzas es $\frac{x}{3}$ gramos y el peso en el lado derecho es 25 gramos. Como estos pesos son iguales las

balanzas están en equilibrio. Para encontrar x podemos usar la propiedad de la multiplicación de la igualdad para triplicar (multiplicar por 3) el peso en cada lado. Las balanzas permanecerán en equilibrio. De las básculas mostradas en la figura 8.5(b) podemos ver que x gramos se balancean con 75 gramos.

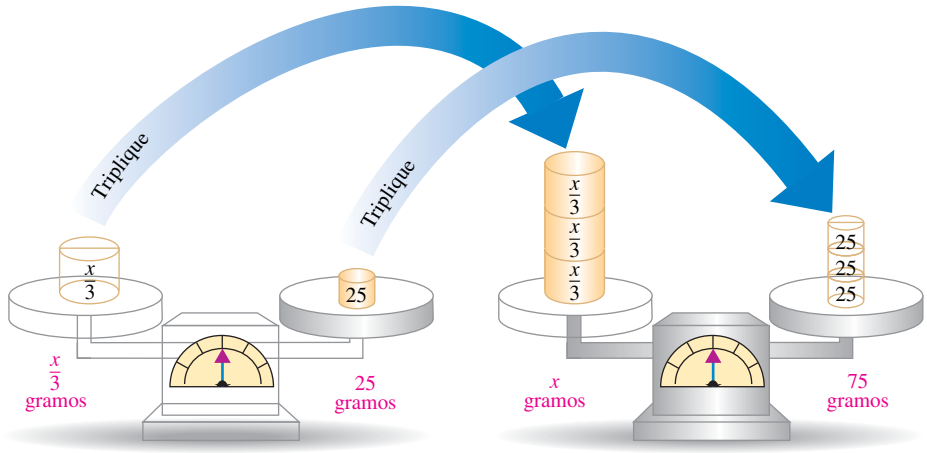


FIGURA 8.5

Ahora mostraremos cómo resolver $\frac{x}{3} = 25$ usando un enfoque algebraico.

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{x}{3} = 25$ y compruebe el resultado.

Solución Para despejar x en el lado izquierdo de la ecuación deshacemos la división de la variable entre 3 multiplicando ambos lados por 3.

$\frac{x}{3} = 25$ Esta es la ecuación a resolver.

$\mathbf{3} \cdot \frac{x}{3} = \mathbf{3} \cdot 25$ Para deshacer la división entre 3 multiplique ambos lados por 3.

$x = 75$ Cuando x se divide entre 3 y ese cociente se multiplica luego por 3 el resultado es x. Haga la multiplicación $3 \cdot 25 = 75$.

Para comprobar el resultado sustituimos x por 75 en $\frac{x}{3} = 25$.

Comprobación: $\frac{\boldsymbol{x}}{3} = 25$

$\frac{\mathbf{75}}{3} \stackrel{?}{=} 25$ Sustituya x por 75.

$25 = 25$ Haga la división: $75 \div 3 = 25$. La respuesta es correcta.

Como $25 = 25$ es un enunciado verdadero la solución es 75.

Autoevaluación 2

Resuelva $\frac{x}{12} = 24$ y compruebe el resultado.

Respuesta 288

Resolución de problemas con ecuaciones

Como antes, podemos usar ecuaciones para resolver problemas. Recuerde que el propósito de estos primeros ejemplos es ayudarlo a aprender la estrategia aunque probablemente pueda resolver el problema sin ella.

EJEMPLO 3 **Compra de electrónicos.** El propietario de un complejo de apartamentos compró seis televisores que se vendían en $499 cada uno. ¿Cuál fue el costo total?

Analice el problema

- Se compraron seis televisores.
- Costaron $499 cada uno.
- Se nos pide encontrar el costo total.

Forme una ecuación

Hagamos que c represente el costo de los televisores. Para formar una ecuación buscamos una palabra o frase clave en el problema. Podemos sumar seis veces 499 o multiplicar por 6. Es más fácil multiplicar.

Frase clave: *seis televisores a $499 cada uno* **Traducción:** *multiplicación*

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

El número total de televisores	multiplicado por	el costo de cada televisor	es	el costo total.
6	·	499	=	c

Resuelva la ecuación

$6 \cdot 499 = c$

$2994 = c$ Haga la multiplicación.

Exprese la conclusión

El costo total será $2 994.

Compruebe el resultado

Podemos comprobar por estimación. Como cada televisor cuesta un poco menos de $500, podríamos esperar que el costo fuera poco menos de $6 \cdot \$500$, o $3000. Una respuesta de $2994 es razonable.

EJEMPLO 4 **Repartición de una herencia.** Si siete hermanos heredan $343 000 y reparten equitativamente el dinero, ¿cuánto obtendrá cada hermano?

Analice el problema

- Hay siete hermanos.
- Se reparten equitativamente el dinero.
- Se nos pide encontrar cuánto obtiene cada hermano.

Forme una ecuación

Podemos hacer que g = número de dólares que recibirá cada hermano. Para formar una ecuación buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: *repartir el dinero equitativamente* **Traducción:** *división*

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

La cantidad total de la herencia	dividida entre	el número de hermanos	es	la parte que obtendrá cada hermano.
343 000	÷	7	=	g

Resuelva la ecuación

$$\frac{343\,000}{7} = g \qquad 343\,000 \div 7 \text{ se puede escribir como } \frac{343\,000}{7}.$$

$$49\,000 = g \qquad \text{Haga la división.}$$

Redacte la conclusión

Cada hermano recibirá \$49 000.

Compruebe el resultado

Si multiplicamos \$49 000 por 7 obtenemos \$343 000.

EJEMPLO 5 **Infracciones de tránsito.** Por exceso de velocidad un automovilista tiene que pagar una multa de \$592. La infracción ocurrió en una autopista señalada con letreros como el que se muestra en la figura 8.6. ¿De cuánto habría sido la multa si no hubiera tales letreros?

FIGURA 8.6

Analice el problema

- Al automovilista lo multaron con \$592.
- La multa fue el doble de lo que normalmente habría sido.
- Se nos pide encontrar de cuánto habría sido la multa si el área no hubiese estado señalizada.

Forme una ecuación

Hagamos que m = la cantidad que habría sido la multa normalmente. Para formar una ecuación buscamos una palabra o frase clave en el problema o análisis.

Palabra clave: *doble* **Traducción:** *multiplique por 2*

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

Dos	por	la multa por exceso de velocidad normal	es	la nueva multa
2	·	m	=	592

Resuelva la ecuación

$$2f = 592 \qquad \text{Escriba } 2 \cdot m \text{ como } 2m.$$

$$\frac{2f}{\mathbf{2}} = \frac{592}{\mathbf{2}} \qquad \text{Para deshacer la multiplicación por 2 divida ambos lados entre 2.}$$

$$f = 296 \qquad \text{Realice la división : } 562 \div 2 = 296.$$

Exprese la conclusión

La multa habría sido normalmente de \$296.

Compruebe el resultado

Si duplicamos \$296, obtenemos 2(\$296) = \$592. La respuesta es correcta.

EJEMPLO 6 **Costos de entretenimiento.** Una banda de cinco miembros trabajó en la víspera del año nuevo. Si cada músico ganó $120, ¿de cuánto fueron los honorarios de la banda?

Analice el problema

- Había 5 músicos en la banda.
- Cada músico cobró $120.
- Se nos pide encontrar los honorarios de la banda. Sabemos que sus honorarios divididos entre el número de músicos dará lo que ganó cada persona.

Forme una ecuación

Hagamos h = los honorarios de la banda. Para formar una ecuación buscamos una palabra o frase clave. En este caso la encontramos en el análisis del problema.

Frase clave: *divididos entre* **Traducción:** *división*

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

Los honorarios de la banda	divididos entre	el número en la banda	es	lo que ganó cada persona.
h	$\div$	5	$=$	120

Resuelva la ecuación

$$\frac{f}{5} = 120 \qquad \text{Escriba } f \div 5 \text{ como } \frac{f}{5}.$$

$$5 \cdot \frac{f}{5} = 5 \cdot 120 \qquad \text{Para deshacer la división entre 5 multiplique ambos lados por 5.}$$

$$f = 600 \qquad \text{Haga la multiplicación: } 5 \cdot 120 = 600.$$

Exprese la conclusión

Los honorarios de la banda fueron $600.

Compruebe el resultado

Si dividimos $600 entre 5 obtenemos lo que ganó cada persona: $120.

Sección 8.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. De acuerdo con la propiedad de la _____ de la igualdad: si cantidades iguales se dividen entre la misma cantidad distinta de cero los resultados serán cantidades iguales.
2. De acuerdo con la propiedad de la _____ de la igualdad: Si cantidades iguales se multiplican por la misma cantidad distinta de cero los resultados serán cantidades iguales.

CONCEPTOS *Llene los espacios.*

3. Si multiplicamos x por 6 y luego dividimos ese producto por 6 el resultado es _____.
4. Si dividimos x entre 8 y luego multiplicamos ese cociente por 8 el resultado es _____.
5. Si $x = y$, entonces $\frac{x}{z} =$ _____ donde $z \neq 0$.
6. Si $x = y$, entonces $zx =$ _____ donde $z \neq 0$.

7. En la ecuación $4t = 40$, ¿qué operación se hace sobre la variable? ¿Cómo la desharíamos?

8. En la ecuación $\frac{t}{15} = 1$, ¿qué operación se hace sobre la variable? ¿Cómo la desharíamos?

9. Diga cuál sería el primer paso para resolver las siguientes ecuaciones.

a. $x + 5 = 10$ **b.** $x - 5 = 10$

c. $5x = 10$ **d.** $\frac{x}{5} = 10$

10. Para cada una de las ecuaciones siguientes compruebe la posible solución.

a. $16 = t - 8;\ 33$

b. $16 = t + 8;\ 8$

c. $16 = 8t;\ 128$

d. $16 = \frac{t}{8};\ 2$

NOTACIÓN *Complete cada solución para resolver la ecuación.*

11. $3x = 12$

$\frac{3x}{\square} = \frac{12}{\square}$

$x = 4$

Comprobación: $3x = 12$

$3 \cdot \square \stackrel{?}{=} 12$

$\square = 12$

La solución es $\square$.

12. $\frac{x}{5} = 9$

$\square \cdot \frac{x}{5} = \square \cdot 9$

$x = 45$

Comprobación: $\frac{x}{5} = 9$

$\frac{\square}{5} \stackrel{?}{=} 9$

$\square = 9$

La solución es $\square$.

PRÁCTICA *Use la propiedad de la división o de la multiplicación de la igualdad para resolver las ecuaciones.* **Compruebe cada respuesta.**

13. $3x = 3$

14. $5x = 5$

15. $2x = 192$

16. $4x = 120$

17. $17y = 51$

18. $19y = 76$

19. $34y = 204$

20. $18y = 90$

21. $100 = 100x$

22. $35 = 35y$

23. $16 = 8r$

24. $44 = 11m$

25. $0.4p = 6.4$

26. $0.36 = 0.12g$

27. $5x = \frac{2}{3}$

28. $6m = \frac{3}{4}$

29. $\frac{x}{7} = 2$

30. $\frac{x}{12} = 4$

31. $\frac{y}{14} = 3$

32. $\frac{y}{13} = 5$

33. $\frac{a}{15} = 5$

34. $\frac{b}{25} = 5$

35. $\frac{c}{13} = 3$

36. $\frac{d}{100} = 11$

37. $1 = \frac{x}{50}$

38. $1 = \frac{x}{25}$

39. $7 = \frac{t}{7}$

40. $4 = \frac{m}{4}$

41. $9z = 90$

42. $3z = 6$

43. $7x = 21$

44. $13x = 52$

45. $86 = 43t$

46. $288 = 96t$

47. $21s = 21$

48. $31x = 155$

49. $\frac{d}{20} = 2$

50. $\frac{x}{16} = 4$

51. $400 = \frac{t}{3}$

52. $250 = \frac{y}{2}$

53. $\frac{y}{0.3} = 1.2$

54. $\frac{t}{3.5} = 0.7$

55. $\frac{q}{0.5} = \frac{1}{2}$

56. $\frac{n}{0.8} = \frac{3}{4}$

APLICACIONES *Complete cada solución.*

57. PREMIO NOBEL En 1998 tres norteamericanos, Louis Ignarro, Robert Furchgott y el Dr. Fred Murad, fueron galardonados con el Premio Nobel de Medicina. Compartieron el dinero del premio. Si cada uno recibió $318 500 ¿de cuánto era la cantidad del premio Nobel?

Analice el problema

- ____ compartieron el dinero del premio.
- Cada persona recibió ____.
- Se nos pide encontrar el ____.

Forme una ecuación

Como queremos encontrar cuánto era el importe del premio Nobel, hagamos que $m =$ ____. Para formar una ecuación buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: ____

Traducción: ____

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

El importe del premio Nobel	dividido entre	el número de quienes lo reciben	fue	$318 500.
____	÷	3	=	318 500

Entra ecuación

$$\frac{x}{3} = 318\,500$$

$$\_\_ \cdot \frac{x}{3} = \_\_ \cdot 318\,500$$

$$x = \_\_$$

Expresse la conclusión

____

Compruebe el resultado

Si dividimos el monto del premio Nobel entre 3 tenemos $\frac{\_\_}{3} = \_\_$. Esta fue la cantidad que recibió cada persona. La respuesta es correcta.

58. INVERSIONES Un inversionista ha visto duplicarse el valor de su portafolio en los últimos 12 meses. Si el valor actual de su portafolio es $274 552, ¿qué valor tenía hace un año?

Analice el problema

- El valor del portafolio se ____ en 12 meses.
- El valor actual es ____.
- Debemos encontrar ____.

Forme una ecuación

Podemos hacer $x =$ ____. Ahora buscamos una palabra o frase clave en el problema.

Frase clave: ____

Traducción: ____

Ahora traducimos las palabras del problema en una ecuación.

2	veces	el valor del portafolio hace un año	es	el valor actual del portafolio.
2	·	____	=	$274 552

Resuelva la ecuación

$$2x = \_\_$$

$$\frac{2x}{\_\_} = \frac{274\,552}{\_\_}$$

$$x = \_\_$$

Redacte la conclusión

____

Compruebe el resultado

Si el valor del portafolio hace un año era ____ y se duplicó, su valor actual sería ____.
La respuesta es correcta.

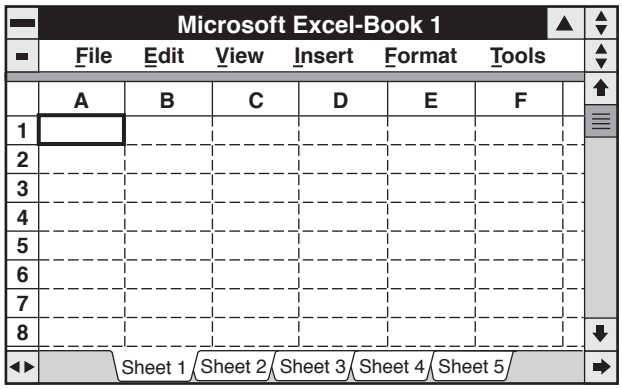
Haga que una variable represente la cantidad desconocida. Luego escriba y resuelva una ecuación para responder la pregunta.

59. LECTURA RÁPIDA Un anuncio de un programa de lectura rápida alegaba que después de completar con éxito el curso se podría triplicar la velocidad de lectura de una persona. Si Alicia actualmente puede leer 130 palabras por minuto, ¿a qué velocidad esperaría leer después de tomar las clases?

60. EXCESO DE COSTO Demoras prolongadas y costos disparados causaron que un proyecto de construcción de tránsito rápido excediera su presupuesto por un factor de 10. La auditoría final mostró que el proyecto costó $540 millones. ¿Cuál fue la estimación inicial del costo?

61. ESTAMPILLAS Se van a imprimir hojas grandes de estampillas conmemorativas en honor de Marylin Monroe. En cada hoja hay 112 estampillas, con 8 estampillas por fila. ¿Cuántas filas de estampillas hay en la hoja?

62. HOJAS DE CÁLCULO La cuadrícula que se muestra en la siguiente página es una hoja de cálculo de Microsoft Excel. Los renglones se etiquetan con números y las columnas se etiquetan con letras. Cada cuadro vacío de la cuadrícula se llama *celda*. Suponga que cierto proyecto requiere una hoja de cálculo con 294 celdas usando columnas de la A a la F. ¿Cuántos renglones se necesitarán?



63. EDUCACIÓN FÍSICA Una profesora de EF de preparatoria pidió a los estudiantes de su clase que formaran equipos de tres personas para un torneo de baloncesto. Participaron treinta y dos equipos en el torneo. ¿Cuántos estudiantes habían en la clase de EF?

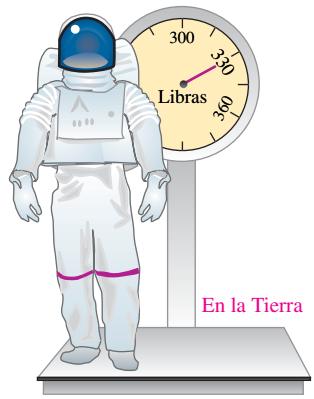
64. GANADORES DE LOTERÍA Los empleados de una tienda de víveres enlistados abajo reunieron su dinero para comprar $120 de billetes de lotería cada semana en el entendido de que repartirían el premio equitativamente si acaso ganaran. Una semana tuvieron el billete ganador y ganaron $48 000. ¿Cuánto le tocó del premio a cada empleado?

Sam M. Adler	Ronda Pellman	Manny Fernando
Lorrie Jenkins	Tom Sato	Sam Lin
Kiem Nguyen	H. R. Kinsella	Tejal Neeraj
Virginia Ortiz	Libby Sellez	Alicia Wen

65. REFUGIOS PARA ANIMALES El número de llamadas a un refugio para animales se cuadruplicó después de que las noticias de la noche transmitieron un segmento explicando los servicios que ofrecía el refugio. Antes de la publicidad el refugio recibía 8 llamadas al día. ¿Cuántas llamadas recibió el refugio cada día después de que salió en las noticias?

66. EXHIBICIONES La concurrencia a una exhibición en una escuela primaria fue sólo la mitad de lo que había esperado la directora. Si 120 personas visitaron la escuela esa tarde, ¿cuántos esperaba que asistieran?

67. GRAVEDAD El peso de un objeto en la Tierra es 6 veces mayor de lo que es en la Luna. La situación mostrada en la siguiente columna tiene lugar en la Tierra. Si tuviera lugar en la Luna, ¿qué peso registraría la báscula?



68. INFOMERCIALES El número de órdenes que recibe cada semana una compañía que vende productos para el cuidado de la piel se incrementó 5 veces después de que una celebridad de Hollywood se incluyó en el infomercial de la compañía. Después de incluir a la celebridad la compañía recibió cerca de 175 órdenes cada semana. ¿Cuántas órdenes se recibían a la semana antes de que la celebridad tomara parte?

POR ESCRITO

69. Explique lo que la figura 8.4 (página 432) intenta mostrar.

70. Explique lo que la figura 8.5 (página 433) intenta mostrar.

71. ¿Qué significa resolver una ecuación?

72. Piense un número. Duplíquelo. Ahora divídalo entre 2. Explique por qué siempre se obtiene el número original.

REPASO

73. Encuentre el perímetro de un rectángulo con lados que midan 8 cm y 16 cm.

74. Encuentre el área de un rectángulo con lados que midan 23 pulgadas y 37 pulgadas.

75. Encuentre la factorización en primos de 120.

76. Encuentre la factorización en primos de 150.

77. Evalúe: $3^2 \cdot 2^3$.

78. Evalúe: $5 + 6 \cdot 3$.

79. RENDIMIENTO DE COMBUSTIBLE Cinco modelos básicos de automóviles hechos por la compañía tienen el siguiente rendimiento de combustible 24, 22, 28, 29 y 27 millas por galón. ¿Cuál es el promedio (la media) para los cinco modelos?

80. Resuelva: $x - 4 = 20$.

8.3 Expresiones algebraicas y fórmulas

- Expresiones algebraicas
- Evaluación de expresiones algebraicas
- Fórmulas
- Fórmulas para negocios
- Fórmulas para ciencia

Una expresión algebraica es una combinación de variables y números con operaciones de suma, resta, multiplicación y división. En esta sección reemplazamos las variables en estas expresiones con números y luego las evaluamos. También estudiamos fórmulas.

Expresiones algebraicas

En la ecuación $1700 = 425 + x$, a la expresión $425 + x$ se le llama una **expresión algebraica**.

Expresiones algebraicas

Variables y números se pueden combinar con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para crear **expresiones algebraicas**.

He aquí algunos ejemplos de expresiones algebraicas.

$5(2a)$	Esta expresión algebraica es una combinación de los números 5 y 2, la variable a y la operación de multiplicación.
$x + 2x + 3x$	Esta expresión algebraica involucra a la variable x, los números 2 y 3, la variable x, y las operaciones de suma y multiplicación.
$\frac{10 - y}{-3}$	Esta expresión algebraica es una combinación de los números 10 y -3, la variable y y las operaciones de resta y división.
$5(r - 6)$	Esta expresión algebraica es una combinación de los números 5 y 6, la variable r y las operaciones de resta y multiplicación.

Evaluación de expresiones algebraicas

Las instrucciones de instalación de un fabricante de trituradores de basura incluyen el diagrama de la figura 8.7. Se expresan con palabras las longitudes de piezas de tubos necesarios para conectar el triturador a la línea de drenaje.

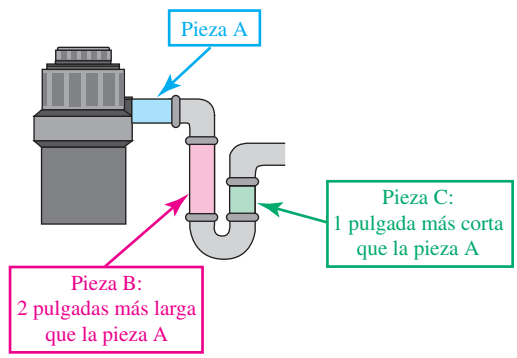


FIGURA 8.7

Las instrucciones nos dicen que las longitudes de las piezas B y C están relacionadas con la pieza A. Si hacemos x = longitud de la pieza A, entonces las longitudes de las otras dos piezas de tubo se pueden representar usando expresiones algebraicas como se muestra en la figura 8.8.

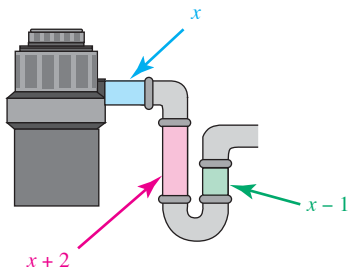


FIGURA 8.8

Como la pieza B es 2 pulgadas más larga que la pieza A,

$x + 2$ = longitud de la pieza B

Como la pieza C es 1 pulgada más corta que la pieza A,

$x - 1$ = longitud de la pieza C

Véase la tabla 8.1 que muestra parte de la hoja de instrucciones del fabricante. Suponga que el modelo #201 es el que se instala. La tabla nos dice que la pieza A debiera ser de 3 pulgadas de largo. Encontramos entonces las longitudes de las otras dos piezas de tubo reemplazando x con 3 en cada una de las expresiones algebraicas.

Modelo	Longitud de la pieza A
#101	2 pulgadas
#201	3 pulgadas
#301	4 pulgadas

Tabla 8.1

Para encontrar la longitud de la pieza B:

Reemplace x con 3.

$$x + 2 = 3 + 2$$
$$= 5$$

La pieza debiera ser de 5 pulgadas de largo.

Para encontrar la longitud de la pieza C:

Reemplace x con 3.

$$x - 1 = 3 - 1$$
$$= 2$$

La pieza C debiera ser de 2 pulgadas de largo.

Cuando reemplazamos la variable en una expresión algebraica con un número y simplificamos, estamos **evaluando la expresión algebraica**. En el ejemplo previo dijimos que *sustituimos* x con 3 para encontrar las longitudes de las otras dos piezas de tubo.

En los siguientes tres ejemplos reemplazamos las variables con números positivos o negativos. Es buena idea escribir entre paréntesis el número cuando se inserta en una expresión algebraica en lugar de la variable.

EJEMPLO 1

Evalúe cada expresión para $x = 3$: **a.** $2x - 1$ y **b.** $\dfrac{-x - 15}{6}$.

Solución

a. $2x - 1 = 2(3) - 1$ Sustituimos x con 3. Use paréntesis para mostrar la multiplicación.

$= 6 - 1$ Haga la multiplicación primero: $2(3) = 6$.

$= 5$ Haga la resta

Autoevaluación 1

Evalúe las expresiones para $y = 5$:

a. $5y - 4$

b. $\dfrac{-y - 15}{5}$

b. $\dfrac{-x-15}{6} = \dfrac{-(3)-15}{6}$ Sustituya x con 3. Use paréntesis.

$= \dfrac{-3-15}{6}$ El opuesto de 3 es -3.

$= \dfrac{-3+(-15)}{6}$ Sume el opuesto de 15.

$= \dfrac{-18}{6}$ Haga la suma: $-3+(-15) = -18$.

$= -3$ Haga la división.

Respuestas **a.** 21, **b.** -4

Autoevaluación 2
Evalúe cada expresión para $t = -3$:
a. $-2t + 4t^2$
b. $-t + 2(t+1)$

EJEMPLO 2

Evalúe las expresiones para $a = -2$: **a.** $-3a + 4a^2$ y **b.** $-a + 3(1+a)$.

Solución

a. $-3a + 4a^2 = -3(-2) + 4(-2)^2$ Reemplace a con -2. Use paréntesis.

$= -3(-2) + 4(4)$ Encuentre la potencia: $(-2)^2 = 4$.

$= 6 + 16$ Haga las multiplicaciones: $-3(-2) = 6$ y $4(4) = 16$.

$= 22$ Haga la suma.

b. $-a + 3(1+a) = -(-2) + 3[1+(-2)]$ Sustituya a con -2.

$= -(-2) + 3(-1)$ Haga la suma dentro de los paréntesis cuadrados.

$= 2 + (-3)$ Haga la multiplicación: $3(-1) = -3$.

$= -1$ Haga la suma.

Respuestas **a.** 42, **b.** -1

Para evaluar expresiones algebraicas que contengan dos o más variables necesitamos saber el valor de cada variable.

Autoevaluación 3
Evalúe $(5rs + 4s)^2$ para $r = -1$ y $s = 5$.

EJEMPLO 3

Evalúe $(8hg + 6g)^2$ para $h = -1$ y $g = 5$.

Solución

$(8hg + 6g)^2 = [8(-1)(5) + 6(5)]^2$ Reemplace h con -1 y g con 5.

$= (-40 + 30)^2$ Haga las multiplicaciones dentro de los paréntesis cuadrados: $8(-1)(5) = -40$ y $6(5) = 30$.

$= (-10)^2$ Haga la suma dentro del paréntesis.

$= 100$ Encuentre la potencia.

Respuesta 25

Fórmulas

Una **fórmula** es una expresión matemática que se usa para establecer una relación entre dos o más variables. Las fórmulas se usan en muchos campos: economía, educación física, antropología, biología, reparación de autos y enfermería, para nombrar sólo unos pocos. En esta sección, consideramos siete fórmulas para negocios, ciencia y matemáticas.

Tiempo de estudio

PARA PENSAR A DETALLE

"Su éxito en la escuela depende de su habilidad de estudiar efectiva y eficientemente. Los resultados de habilidades de estudio pobres son tiempo desperdiciado y calificaciones bajas o reprobadas." Habilidades efectivas de estudio, Dr. Bob Kizlik, 2004

Para un curso de h horas a la semana, la fórmula $H = 2h$ da el número de horas H sugerido que un estudiante debiera estudiar fuera de la clase cada semana. Si un estudiante espera dificultades en un curso la fórmula puede ajustarse hacia arriba a $H = 3h$. Use las fórmulas para completar la tabla de abajo.

	Tiempo sugerido de estudio fuera de clase (horas por semana)	Tiempo expandido de estudio fuera de clase (horas por semana)
Si un curso es de:		
2 horas por semana		
3 horas por semana		
4 horas por semana		
5 horas por semana		

Fórmulas para negocios

Una fórmula para encontrar el precio de venta. Si un automóvil normalmente se vende en \$12 000 se le descuentan \$1500 se puede encontrar el precio de venta usando la fórmula

Precio de venta = precio original − descuento

Se puede escribir esta fórmula usando las variables v para el precio de venta, p para el precio original y d para el descuento.

$$\boxed{v = p - d}$$

Para encontrar el precio de venta del auto sustituimos p con 12 000, d con 1500 y evaluamos la expresión del lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned} v &= p - d \\ &= 12\,000 - 1500 && \text{Sustituya } p \text{ con } 12\,000 \text{ y } d \text{ con } 1500. \\ &= 10\,500 && \text{Haga la resta.} \end{aligned}$$

El precio de venta del auto es \$10 500.

Una fórmula para precio al por menor. Para lograr una ganancia un comerciante debe vender un producto por más de lo que pagó por él. El precio al que vende el producto, llamado *precio al por menor*, es la *suma* de lo que le costó el artículo y la ganancia.

Precio al por menor = costo + ganancia

Podemos escribir la fórmula usando las variables m que represente el precio al por menor, c el costo y g la ganancia.

$$\boxed{m = c + g}$$

Como ejemplo, suponga que el propietario de una tienda compra una lámpara en \$35 y le suma una ganancia de \$20 antes de venderla. Podemos encontrar el precio al por menor de la lámpara usando esta fórmula.

$$m = c + g$$
$$= 35 + 20 \quad \text{Sustituya } c \text{ con 35 y } g \text{ con 20.}$$
$$= 55 \quad \text{Haga la suma.}$$

El precio al por menor de la lámpara es \$55.

Una fórmula para encontrar la ganancia. La ganancia que tiene un negocio es la diferencia entre los ingresos y los costos.

Ganancia = ingresos − costos

Si se usan las variables g para representar las ganancias, i para los ingresos y c para los costos, tenemos la fórmula

$$\boxed{g = i - c}$$

Como ejemplo, suponga que un telemaratón de caridad tuvo \$14 millones en donaciones pero tuvo gastos en total por \$2 millones. Podemos encontrar la ganancia lograda restando los gastos (costos) de las donaciones (ingresos).

$$g = i - c$$
$$= 14 - 2 \quad \text{Sustituya } y \text{ con 14 y } c \text{ con 2.}$$
$$= 12 \quad \text{Haga la resta.}$$

El telemaratón de caridad logró una ganancia de \$12 millones.

Fórmulas para ciencia

Una fórmula para encontrar la distancia viajada. Si conocemos la velocidad a la que se viaja y el tiempo en el que nos movemos a esa velocidad (digamos, 3 horas), podemos encontrar la distancia viajada usando la fórmula

Distancia = velocidad · tiempo

Usando variables para escribir la fórmula tenemos

$$\boxed{d = vt}$$

Si reemplazamos la velocidad v con 55 y el tiempo t con 3 podemos usar esta fórmula para encontrar la distancia viajada.

$$d = vt$$
$$= 55(3) \quad \text{Sustituya } v \text{ con 55 y } t \text{ con 3.}$$
$$= 165 \quad \text{Haga la multiplicación.}$$

La distancia viajada en 3 horas a una velocidad de 55 millas por hora son 165 millas.

Autoevaluación 4
El límite de velocidad de Nevada para camiones es de 75 mph. ¿Qué tan lejos puede viajar un camión en tres horas a velocidad máxima?

EJEMPLO 4 **Límites de velocidad.** Se muestran tres límites de velocidad para camiones. A cada una de estas velocidades, ¿qué tan lejos viajaría un camión en 3 horas?

Solución Para encontrar la distancia viajada por un camión en Ohio escribimos

$$d = vt$$
$$= 55(3) \quad \text{55 mph es la velocidad } v \text{ y 3 horas es el tiempo } t.$$
$$= 165 \quad \text{Haga la multiplicación. Las unidades de la respuesta están en millas.}$$

A 55 mph, un camión viajaría 165 millas en 3 horas. Podemos utilizar una tabla como se muestra en la siguiente página para exhibir los cálculos para cada estado.

	$v \cdot t = d$		
Ohio	55	3	165
Indiana	60	3	180
Kentucky	65	3	195

↑ Esta columna da la distancia viajada en millas.

Respuesta 225 mi

COMENTARIO Cuando se usa $d = vt$ para encontrar la distancia asegúrese que las unidades sean semejantes. Por ejemplo, si la velocidad se da en millas por hora el tiempo debe expresarse en horas.

Una fórmula para conversión de grados Fahrenheit a grados Celsius. Los tableros electrónicos en las afueras de algunos bancos alternan dos lecturas de temperatura. Esto es porque la temperatura se puede medir usando la escala Fahrenheit o la Celsius. La escala Fahrenheit se usa en el sistema norteamericano de medida y la escala Celsius en el sistema métrico. Las dos escalas se muestran en los termómetros de la figura 8.9. Esto puede ayudarle a ver cómo se relacionan las dos escalas. Hay una fórmula para convertir una lectura Fahrenheit a una lectura Celsius:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

o

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

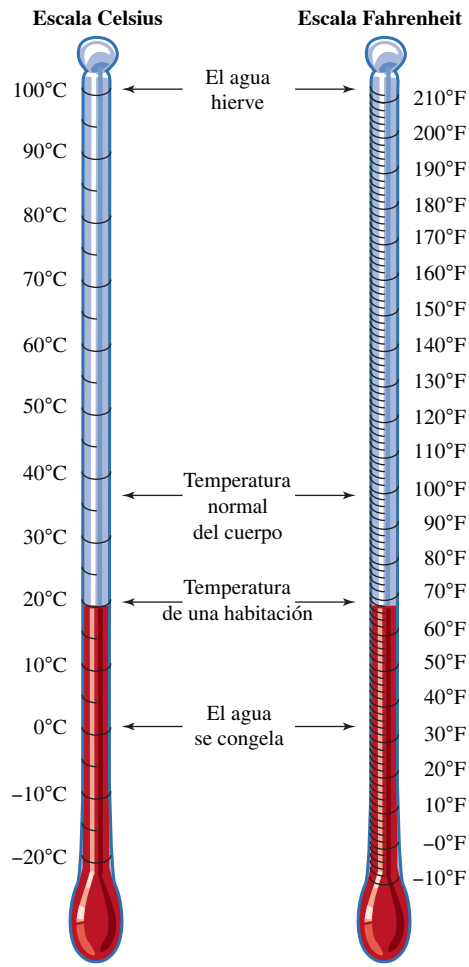


FIGURA 8.9

EJEMPLO 5 El termostato en una oficina de un edificio se fijó en 77° F. Use la primera fórmula para convertir este ajuste a grados Celsius.

Autoevaluación 5
El récord de temperatura máxima de Nuevo México es de 122° F el 27 de junio de 1994. Use la primera fórmula para convertir esta temperatura a grados Celsius.

Solución

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$= \frac{5}{9}(77 - 32) \quad \text{Reemplace } F \text{ con } 77.$$

$$= \frac{5}{9}(45) \quad \text{Haga la resta: } 77 - 32 = 45.$$

$$= \frac{225}{9} \quad \text{Haga la multiplicación: } 5(45) = 225.$$

$$= 25 \quad \text{Haga la división.}$$

Respuesta 50° C.

El termostato se ajustó a 25° C.

Una fórmula para encontrar la distancia a la que cae un objeto. La distancia a la que cae un objeto (en pies) cuando se deja caer desde una altura se relaciona con el tiempo (en segundos) que dura la caída, de acuerdo con la fórmula:

Distancia de la caída	=	16	·	(tiempo)^2

Usando las variables d para representar la distancia y t para el tiempo tenemos

$$\boxed{d = 16t^2}$$

Autoevaluación 6
Encuentre la distancia a la que cae una roca en tres segundos si se soltó desde la orilla del Gran Cañón.

EJEMPLO 6 Encuentre la distancia a la que cae una cámara en 6 segundos por un vacacionista que toma un paseo en globo de aire caliente.

Solución Podemos usar la fórmula $d = 16t^2$ para encontrar la distancia a que cae la cámara.

$$d = 16t^2$$

$$= 16(6)^2 \quad \text{Reemplace } t \text{ con } 6.$$

$$= 16(36) \quad \text{Encuentre la potencia } 6^2 = 36.$$

$$= 576 \quad \text{Haga la multiplicación.}$$

Respuesta 144 pies

La cámara cayó 576 pies.

Sección 8.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Una _____ es una ecuación que establece la relación entre dos o más variables.
2. Una _____ algebraica es una combinación de variables, números y los símbolos de operación de suma, resta, multiplicación y división.
3. Para evaluar una expresión algebraica _____ números específicos en las variables y aplicamos las reglas del orden de las operaciones.
4. Una _____ es una letra que representa un número.

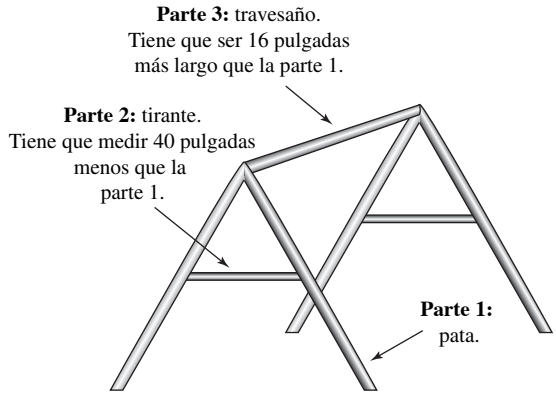
CONCEPTOS

5. Muestre el error que ocurre si no escribimos paréntesis alrededor de -8 cuando evaluamos la expresión $2x + 10$ para $x = -8$.

6. **a.** ¿Cuál de las fórmulas que estudiamos en esta sección involucra la *diferencia* de dos cantidades?

   b. ¿Cuál de las fórmulas usadas en esta sección involucra un *producto*?

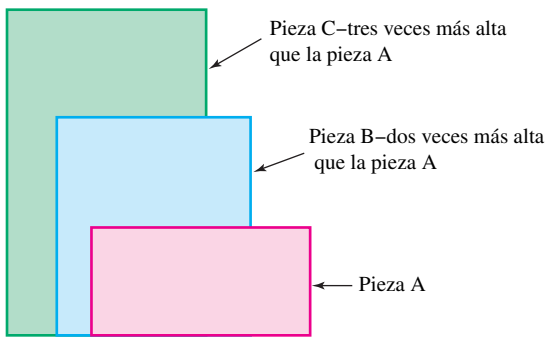
7. EQUIPO DE PATIO DE RECREO Se muestran los planos para construir un columpio para niños. El constructor puede escoger qué tamaño es apropiado para los niños que lo van a usar.


Parte 3: travesaño.
Tiene que ser 16 pulgadas más largo que la parte 1.
Parte 2: tirante.
Tiene que medir 40 pulgadas menos que la parte 1.
Parte 1: pata.

a. Escoja una variable para representar la longitud de una de las partes del columpio. Luego escriba expresiones algebraicas que representen las longitudes de las otras dos partes.

b. Si el constructor escoge que la parte 1 sea de 60 pulgadas de largo, ¿de qué largo son las partes 2 y 3?

8. DISEÑO DE ESCENARIOS Un departamento de arte de un estudio de televisión planea construir una serie de decoraciones de escenarios a partir de madera terciada usando los planos de abajo.



a. Escoja una variable que represente la altura de una pieza de madera terciada. Luego escriba expresiones algebraicas que representen las alturas de las otras dos piezas.

b. Para el primer plano los diseñadores harán la pieza A de 15 pulgadas de alto. ¿De qué altura debieran ser las piezas B y C?

c. Para el fondo la pieza A será de 30 pulgadas de alto. ¿De qué altura debieran ser las piezas B y C?

9. Un expendio de boletos suma un cargo por servicio de $2 al precio de cada boleto que vende. Complete la tabla.

Precio del boleto	Cargo por servicio	Costo total
20	2	
25	2	
p	2	
$10p$	2	

10. Una tienda de llantas cobra $5 por balancear cada llanta nueva que vende. Complete la tabla.

Precio de la llanta nueva	Cargo por balanceo	Costo total
$45	$5	
$65	$5	
$$t$	$5	
5t$	$5	

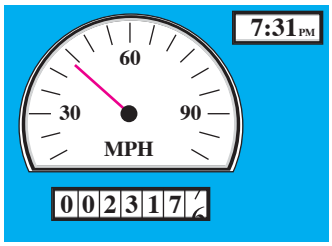
11. Complete la tabla encontrando la distancia viajada en cada caso. Asegúrese de dar las unidades para cada respuesta.

	Velocidad (mph)	Tiempo (hr)	Distancia viajada
Autobús	25	2	
Bicicleta	12	4	
Caminando	3	t	
Corriendo	5	1	
Automóvil	x	3	

12. Cada semestre una universidad cobra a sus estudiantes una cuota por servicio de campus de $10, una cuota de estacionamiento de $12 y una cuota de inscripción de $13 por unidad. Complete la tabla.

Unidades tomadas	Cuota de inscripción ($)	Cuota de servicio de campus ($)	Cuota de estacionamiento ($)	Cobro total ($)
4	52	10	12	
10	130	10	12	
12	156	10	12	
u	$13u$	10	12	

13. TABLEROS La ilustración muestra parte de un tablero de instrumentos. Explique qué mide cada instrumento. ¿Cómo se relacionan matemáticamente estas cantidades?



14. ¿Qué profesión podría usar una fórmula que encuentra:

a. la frecuencia cardiaca después de realizar un entrenamiento?

b. el rendimiento de gasolina de un automóvil?

c. la edad de un fósil?

d. el precio de una casa?

e. la dosis de un medicamento?

f. el índice del costo de la vida?

15. HOJAS DE CÁLCULO Un automóvil se desplaza a una velocidad de 65 mph durante 15 minutos. Considerando lo anterior, ¿dónde está el error en el siguiente razonamiento?

$$\begin{aligned} d &= rt \\ &= 65(15) \\ &= 975 \end{aligned}$$

El automóvil viajó 975 millas en 15 minutos.

16. HOJAS DE CÁLCULO A continuación se muestran los datos de un experimento de química. Para obtener un resultado, el químico debe usar la fórmula

SUMA(A1:D1) − **MIN**(D1:D3)

Si A1:D1 significa de la celda A1 hasta la D1 incluyéndola encuentre el resultado.

	A	B	C	D
1	12	−5	6	−2
2	15	4	5	−4
3	6	4	−2	8

NOTACIÓN

17. Use variables para escribir la fórmula que relaciona cada una de las cantidades enlistadas.

a. Velocidad, distancia, tiempo

b. Temperatura centígrada, temperatura Fahrenheit

c. Tiempo, distancia que cae un objeto cuando cae

18. Use variables para escribir la fórmula que relaciona cada una de las cantidades enlistadas.

a. Precio original, precio de venta, descuento

b. Número de valores, promedio, suma de valores

c. Costo, ganancia, ingresos

d. Ganancia, precio al por menor, costo

PRÁCTICA

Evalúe cada expresión para el valor dado de la variable.

19. $3x + 5$ para $x = 4$

20. $1 + 7a$ para $a = 2$

21. $-p$ para $p = -4$

22. $-j$ para $j = -9$

23. $-4t$ para $t = -10$

24. $-12m$ para $m = -6$

25. $\dfrac{x - 8}{2}$ para $x = -4$

26. $\dfrac{-10 + y}{-4}$ para $y = -6$

27. $2(p + 9)$ para $p = -12$

28. $3(r - 20)$ para $r = 15$

29. $x^2 - x - 7$ para $x = -5$

30. $a^2 + 3a - 9$ para $a = -3$

31. $8s - s^3$ para $s = -2$

32. $5r + r^3$ para $r = 1$

33. $4x^2$ para $x = 5$

34. $3f^2$ para $f = 3$

35. $3b - b^2$ para $b = -4$

36. $5a - a^2$ para $a = -3$

37. $\dfrac{24 + k}{3k}$ para $k = 3$

38. $\dfrac{4 - h}{h - 4}$ para $h = -1$

Evalúe cada expresión para los valores dados de las variables.

39. $\dfrac{x}{y}$ para $x = 30$ y $y = -10$

40. $\dfrac{e}{3f}$ para $e = 24$ y $f = -8$

41. $-x - y$ para $x = -1$ y $y = 8$

42. $-a - 5b$ para $a = -9$ y $b = 6$

43. $x(5h - 1)$ para $x = -2$ y $h = 2$

44. $c(2k - 7)$ para $c = -3$ y $k = 4$

45. $b^2 - 4ac$ para $b = -3$, $a = 4$ y $c = -1$

46. $3r^2h$ para $r = 4$ y $h = 2$

47. $x^2 - y^2$ para $x = 5$ y $y = -2$

48. $x^3 - y^3$ para $x = -1$ y $y = 2$

49. $\dfrac{50 - 6s}{-t}$ para $s = 5$ y $t = 4$

50. $\dfrac{7v - 5r}{-r}$ para $v = 8$ y $r = 4$

51. $-5abc + 1$ para $a = -2$, $b = -1$ y $c = 3$

52. $-rst + 2t$ para $r = -3$, $s = -1$ y $t = -2$

53. $5s^2t$ para $s = -3$ y $t = -1$

54. $-3k^2t$ para $k = -2$ y $t = -3$

Use la fórmula apropiada para ayudarse a resolver cada pregunta.

55. Al dueño de una cafetería le cuesta 20 centavos hacer un cono de nieve. Si su ganancia es de 50 centavos, ¿cuál será el precio de un cono de nieve?

56. Encuentre la distancia cubierta por un jet si viaja tres horas a 550 mph.

57. Un carnaval escolar dejó ingresos por $13 500 y tuvo costos por $5300. ¿Cuál fue la ganancia?

58. Para el mes de junio los costos del negocio de una florista fueron $3795. Si los ingresos de junio totalizaron $5115, ¿cuál fue su ganancia del mes?

59. Una joyería compra brazaletes en $18 y les añade $5 para venderlos. ¿Cuál es el precio al por menor de un brazalete?

60. Una tendera le suma al precio de cada artículo que vende la misma cantidad que pagó por él. Si un ventilador le cuesta $27, ¿cuánto cobra por el ventilador?

61. Encuentre la distancia cubierta por un automóvil que viaja a 60 millas por hora durante 5 horas.

62. Encuentre el precio de venta de un par de esquís que normalmente se venden en $200 pero que se les descuenta $35.

63. Encuentre la lectura de temperatura Celsius si la lectura Fahrenheit es 14º.

64. Encuentre la lectura de temperatura Celsius si la lectura Fahrenheit es 113º.

65. El área de un trapecio está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura y b_1 y b_2 son las bases. Encuentre el área de un trapecio cuyas bases miden 32 metros y 16 metros y cuya altura es 10 metros.

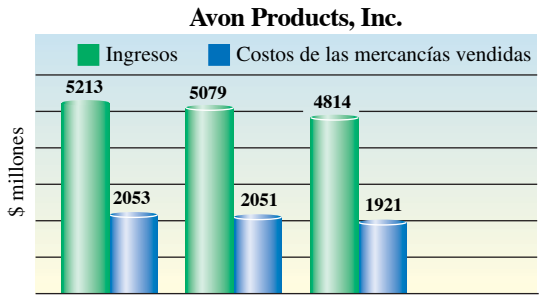
66. En su primera noche de negocios un restaurante de pizza tuvo entradas por $445. El propietario estimó que sus costos de esa noche fueron $295. ¿Cuál fue la ganancia?

67. Encuentre la distancia a la que cae una pelota 2 segundos después que se dejó caer desde un edificio alto.

68. El dueño de una tienda compra un par de plantas en $25 y les añade $15 para la venta. ¿Cuál es el precio de venta al por menor de las plantas?

APLICACIONES

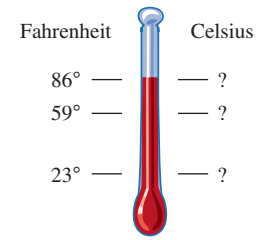
69. ESTADOS FINANCIEROS Use los datos de la ilustración para completar los estados financieros de Avon Products, Inc.



Basado en datos de *Hoover's online*.

Finanzas anuales: Declaración de ingresos Todas las cantidades en dólares en millones	Dic. '98	Dic. '97	Dic. '96
Ingresos			
Costo de las mercancías vendidas			
Ganancia bruta			

70. ESCALAS TERMOMÉTRICAS Un fabricante de termómetros desea poner en sus termómetros tanto grados Celsius como Fahrenheit. Encuentre las medidas faltantes en grados Celsius en la ilustración.



71. HOJAS DE CÁLCULO Un gerente de una tienda desea usar una hoja de cálculo para enviar los precios de venta de los artículos a los cajeros en las cajas registradoras. Si la columna B enlista el precio normal y la columna C enlista el descuento, escriba una fórmula que use los nombres de las columnas para que la computadora encuentre el precio de venta. Después llene la columna D.

	A	B	C	D
1	Juego de toallas de baño	$25	$5	
2	Almohadas	$15	$3	
3	Manta acolchada	$53	$11	

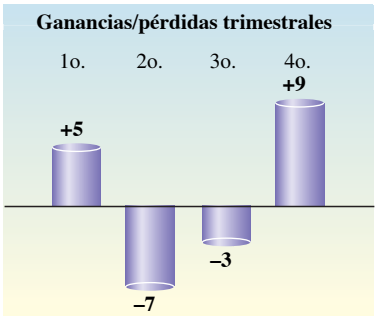
72. GANANCIAS DE DISTRIBUIDORES Un distribuidor de automóviles le agrega $500 al precio de fábrica a los autos que vende (esto es, $500 más a lo que le cuesta comprar el auto de la fábrica). Complete la tabla.

Modelo	Precio de fábrica ($)	Ganancia ($)	Precio ($)
Minivan	15 600		
Camioneta	13 200		
Convertible	x		

73. FUTBOL AMERICANO Los resultados de cada carga que un corredor tuvo durante un juego se registran en la tabla. Encuentre el promedio de yardas ganadas por carga en el juego.

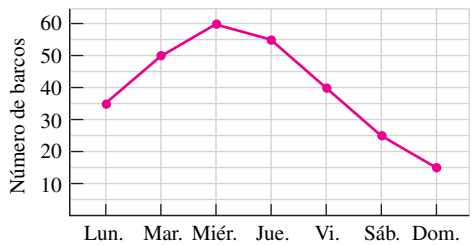
Jugada	Resultado
Barrida	Ganancia de 16 yd
Lanzador	Ganancia de 10 yd
Clavado	Ganancia de 4 yd
Clavado	Ninguna ganancia
Barrida	Pérdida de 4 yd

74. REPORTES TRIMESTRALES Se muestra el desempeño financiero de una compañía de computadoras en cada trimestre del año. Encuentre el promedio financiero trimestral de la compañía. Las cifras son en millones de dólares.



CALCULADORA *Use una calculadora para responder las preguntas.*

75. BARCOS La ilustración muestra el número de barcos que usaron las instalaciones de los muelles de un puerto en una semana de julio. Encuentre el número promedio por día de barcos que atracaron ahí en esa semana.



76. OBJETOS EN CAÍDA En la tabla de la columna siguiente encuentre la distancia recorrida en pies por un objeto que cae en 1, 2, 3 y 4 segundos. Apunte los resultados en la columna de en medio. Luego encuentre la distancia que recorrió el objeto en cada intervalo de tiempo y apúntela en la columna de la derecha.

Tiempo de caída	Distancia recorrida	Intervalos de tiempo
1 s		Distancia recorrida de 0 s a 1 s
2 s		Distancia recorrida de 1 s a 2 s
3 s		Distancia recorrida de 2 s a 3 s
4 s		Distancia recorrida de 3 s a 4 s

77. ENCUESTAS A CLIENTES Al salir, a los clientes de un restaurante se les pide que califiquen el servicio que recibieron. Un buen servicio se califica como 5, uno regular como 3 y uno malo con 1. Se muestra la hoja de cuenta compilada por el encuestador. ¿Cuál fue la calificación promedio del restaurante en esta encuesta?

Tipo de servicio	Valor en puntos	Número
Bueno	5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
Regular	3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
Malo	1	𝍸 ||||

78. DISTANCIA RECORRIDA

a. Cuando está en órbita, el transbordador espacial viaja a una velocidad de 17 500 mph aproximadamente. ¿Qué distancia recorre en un día?

b. La velocidad de la luz es 186 000 millas por segundo aproximadamente. ¿Qué distancia recorre la luz en 1 minuto?

c. La velocidad del sonido en el aire es de 1100 pies por segundo aproximadamente a temperatura normal. ¿Qué tan lejos viaja en medio minuto?

POR ESCRITO

79. Explique el proceso de evaluar una expresión algebraica.

80. Explique cómo podemos usar un cronómetro para encontrar la distancia recorrida por un objeto en caída.

81. Escriba una definición para los siguientes conceptos de negocios: *ingresos, sobreprecio y ganancia.*

82. ¿Qué es una fórmula?

REPASO

83. ¿Cuáles de los siguientes son números primos: 9, 15, 17, 33, 37, 41?

84. ¿Cómo se puede escribir esta multiplicación repetida de una manera más simple: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$?

85. Evalúe: $|-2 + (-5)|$.

86. Multiplique: $-3(-2)(4)$.

87. En la ecuación $\frac{x}{3} = -4$, ¿qué operación se ejecuta sobre la variable?

88. Falso o verdadero: $-25.001 < -24.999$

89. Reste: $-3 - (-6)$.

90. ¿Cuál está indefinida: división de cero o división entre cero?

8.4 Simplificación de expresiones algebraicas y la propiedad distributiva

• Simplificación de expresiones algebraicas que involucran multiplicación • La propiedad distributiva • Distribución de un factor de -1 • Extensión de la propiedad distributiva

En matemáticas a menudo es útil reemplazar algo complicado con algo de forma más simple. En esta sección simplificamos expresiones algebraicas. Los resultados son expresiones equivalentes pero más simples.

Simplificación de expresiones algebraicas que involucran multiplicación

Para **simplificar una expresión algebraica**, las propiedades del álgebra para escribir la expresión dada en una forma más simple. Dos de las propiedades que se utilizan para simplificar expresiones algebraicas son las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación. Recuerde que la propiedad asociativa nos permite cambiar la agrupación de los factores involucrados en una multiplicación. La propiedad conmutativa nos permite cambiar el orden de los factores.

Para escribir $6(5x)$ de una manera más simple podemos empezar reescribiéndola como $6 \cdot (5 \cdot x)$.

$$\begin{aligned} 6(5x) &= 6 \cdot (5 \cdot x) && 5x = 5 \cdot x. \\ &= (6 \cdot 5)x && \text{Use la propiedad asociativa de la multiplicación.} \\ & && \text{En lugar de agrupar 5 con } x \text{ agrúpelo con 6.} \\ &= 30x && \text{Haga las operaciones dentro del paréntesis primero: } 6 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

Decimos que $6(5x)$ se simplifica a $30x$; esto es, $6(5x) = 30x$.

Para verificar que $6(5x)$ y $30x$ son **expresiones equivalentes** (representan el mismo número) podemos evaluar cada expresión para varias x. Para cada valor de x los resultados deben ser los mismos

Si $x = 10$		**Si $x = -3$**	
$6(5\boldsymbol{x}) = 6[5(\boldsymbol{10})]$	$30\boldsymbol{x} = 30(\boldsymbol{10})$	$6(5\boldsymbol{x}) = 6[5(\boldsymbol{-3})]$	$30\boldsymbol{x} = 30(\boldsymbol{-3})$
$= 6[50]$	$= 300$	$= 6[-15]$	$= -90$
$= 300$		$= -90$	

Autoevaluación 1
Simplifique las expresiones:
a. $4 \cdot 8r$
b. $-3y(-5)$

Respuestas **a.** $32r$, **b.** $15y$

EJEMPLO 1

Simplifique: **a.** $-2(7x)$ y **b.** $-12t(-6)$.

Solución Usamos la propiedad asociativa para reagrupar los factores de la expresión de tal forma que los números estén separados de la variable. Después de multiplicar los números el resultado se multiplica por la variable.

a. $-2(7x) = (-2 \cdot 7)x$ Aplique la propiedad asociativa de la multiplicación. Reagrupe los factores.

$= -14x$ Haga la operación dentro del paréntesis primero: $-2 \cdot 7 = -14$.

b. $-12t(-6) = -12(-6)t$ Aplique la propiedad conmutativa de la multiplicación. Cambie el orden de los factores.

$= [-12(-6)]t$ Aplique la propiedad asociativa de la multiplicación para agrupar los números. Use corchetes.

$= 72t$ Realice primero la operación dentro de los corchetes: $-12(-6) = 72$.

Autoevaluación 2
Simplifique las expresiones:
a. $-7k(-5t)$
b. $2(4a)(-3d)$

Respuestas **a.** $35kt$, **b.** $-24ad$

EJEMPLO 2

Simplifique: **a.** $-4m(-5n)$ y **b.** $2(6y)(-4z)$.

Solución

a. $-4m(-5n) = [-4(-5)](m \cdot n)$ Agrupe los números y variables por separado usando las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación.

$= 20mn$ Haga la multiplicación dentro de los paréntesis cuadrados: $-4(-5) = 20$. Escriba $m \cdot n$ como mn.

b. $2(6y)(-4z) = [2(6)(-4)](y \cdot z)$ Use las propiedades conmutativa y asociativa para cambiar el orden y reagrupar los factores.

$= -48yz$ Haga la multiplicación dentro de los corchetes: $2(6)(-4) = -48$. Escriba $y \cdot z$ como yz.

COMENTARIO Tenga cuidado cuando use términos como *simplificar* y *resolver*. En matemáticas *simplificamos expresiones* y *resolvemos ecuaciones*. No simplifique las ecuaciones ni resuelva las expresiones.

La propiedad distributiva

Otra propiedad del álgebra que se usa para simplificar expresiones algebraicas es la **propiedad distributiva.** Para presentar esta propiedad examinaremos la expresión $2(5 + 3)$, que se puede evaluar de dos maneras.

Método 1: Reglas para el orden de las operaciones. Debido a los símbolos de agrupamiento en $2(5 + 3)$, las reglas del orden de las operaciones requieren que calculemos primero la *suma* dentro del paréntesis.

$2(\mathbf{5 + 3}) = 2(\mathbf{8})$ Haga la suma dentro del paréntesis primero: $5 + 3 = 8$.

$= 16$ Haga la multiplicación.

Método 2: La propiedad distributiva. La propiedad distributiva nos permite evaluar la expresión $2(5 + 3)$ de otra forma. Podemos distribuir el factor 2 sobre el 5 y sobre el 3, después encontramos esos productos por separado y sumamos los resultados.

Distribuya la multiplicación por 2.

$2(5 + 3) = \mathbf{2}(5 + 3)$ Cada número dentro del paréntesis está multiplicado por el factor fuera del paréntesis.

Primer producto ↓ Segundo producto ↓

$= \mathbf{2}(5) + \mathbf{2}(3)$

$= 10 + 6$ Haga la multiplicación primero: $2(5) = 10$ y $2(3) = 6$.

$= 16$ Haga la suma.

Nótese que el resultado usando cualquier método es 16.

Ahora podemos enunciar la propiedad distributiva con símbolos.

La propiedad distributiva

Si a, b y c representan números,

$$a(b + c) = ab + ac$$

Como restar es lo mismo que sumar el opuesto, la propiedad distributiva también se cumple para la resta.

La propiedad distributiva

Si a, b y c representan números

$$a(b - c) = ab - ac$$

EJEMPLO 3 Use la propiedad distributiva para quitar el paréntesis: **a.** $3(s + 7)$ y **b.** $6(x - 1)$.

Solución

a. $\mathbf{3}(s + 7) = \mathbf{3}s + \mathbf{3}(7)$ Distribuya la multiplicación por 3.

$= 3s + 21$ Haga la multiplicación.

Después de aplicar la propiedad distributiva a $3(s + 7)$ para obtener $3s + 21$, decimos que hemos *quitado los paréntesis*.

b. $\mathbf{6}(x - 1) = \mathbf{6}x - \mathbf{6}(1)$ Distribuya la multiplicación por 6.

$= 6x - 6$ Haga la multiplicación.

Autoevaluación 3

Quite los paréntesis

a. $5(h + 4)$

b. $9(a - 3)$

Respuestas **a.** $5h + 20$, **b.** $9a - 27$

COMENTARIO El hecho de que una expresión contenga paréntesis no significa que automáticamente deba usarse la propiedad distributiva para simplificarla. Por ejemplo, la propiedad distributiva no se aplica a expresiones como $5(4x)$ o $5(4 \cdot x)$, donde un producto se multiplica por 5. La propiedad distributiva se aplica a expresiones tales como $5(4 + x)$ o $5(4 - x)$, donde una suma o una diferencia se multiplica por un número.

Autoevaluación 4
Quite los paréntesis:
a. $-4(6y + 8)$
b. $-7(2 - 8m)$

Respuestas **a.** $-24y - 32$,
b. $-14 + 56m$

EJEMPLO 4

Quite los paréntesis: **a.** $-3(4x + 2)$ y **b.** $-9(3 - 2t)$.

Solución

a. $-3(4x + 2) = -3(4x) + (-3)(2)$ Distribuya la multiplicación por -3.
$= -12x + (-6)$ Haga la multiplicación.
$= -12x - 6$ Escriba la respuesta de manera más simple. Sumar -6 es lo mismo que restar 6.

b. $-9(3 - 2t) = -9(3) - (-9)(2t)$ Aplique la propiedad distributiva.
$= -27 - (-18t)$ Haga las multiplicaciones.
$= -27 + 18t$ Escriba la respuesta de manera más simple. Sume el opuesto de $-18t$.

COMENTARIO Es una práctica común escribir respuestas de forma simplificada. Por ejemplo, la respuesta en el ejemplo 4, parte a, se indica como $-12x - 6$ porque involucra menos símbolos que $-12x + (-6)$. La respuesta al ejemplo 4, parte b, se da como $-27 + 18t$ en lugar de $-27 - (-18t)$.

Como la multiplicación es conmutativa podemos escribir la propiedad distributiva en cualquiera de las formas siguientes.

$$(b + c)a = ba + ca$$
$$(b - c)a = ba - ca$$

Autoevaluación 5
Multiplique:
a. $(8 + 7x)5$
b. $(5 - c)3$

Respuestas **a.** $40 + 35x$,
b. $15 - 3c$

EJEMPLO 5

Multiplique: **a.** $(5 + 3r)7$ y **b.** $(4 - x)2$.

Solución

a. $(5 + 3r)7 = (5)7 + (3r)7$ Distribuya la multiplicación por 7.
$= 35 + 21r$ Haga las multiplicaciones.

b. $(4 - x)2 = (4)2 - (x)2$ Distribuya la multiplicación por 2.
$= 8 - 2x$ Haga las multiplicaciones.

Distribución de un factor de -1

A primera vista, $-(x + 8)$ no parece estar en la forma apropiada para aplicar la propiedad distributiva; el número frente a los paréntesis parece faltar. Pero el signo negativo enfrente de los paréntesis en realidad representa al número -1.

El signo negativo representa -1.

$-(x + 8) = -1(x + 8)$
$= -1(x) + (-1)(8)$ Use la propiedad distributiva. Distribuya -1.
$= -x + (-8)$ Haga las multiplicaciones.
$= -x - 8$ Sumar -8 es lo mismo que restar 8.

EJEMPLO 6 Simplifique: $-(-6-2e)$.

Solución

$$-(-6-2e) = \mathbf{-1}(-6-2e)$$ Reescriba el signo negativo frente a los paréntesis como -1.

$$= \mathbf{-1}(-6) - (\mathbf{-1})(2e)$$ Distribuya la multiplicación por -1.

$$= 6 - (-2e)$$ Haga las multiplicaciones.

$$= 6 + 2e$$ Sume el opuesto de $-2e$.

Autoevaluación 6
Simplifique: $-(-2t+4)$.

Respuesta $2t-4$

Después de trabajar varios problemas como el ejemplo 6 verá que no es necesario mostrar cada uno de los pasos. El resultado se puede obtener rápidamente *cambiando el signo de cada cantidad dentro del paréntesis y quitando los paréntesis*.

Extensión de la propiedad distributiva

La propiedad distributiva se puede extender a situaciones donde hay más de dos términos dentro de los paréntesis.

La propiedad distributiva extendida

Si a, b, c y d representan números,

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

EJEMPLO 7 Quite los paréntesis: $-6(-3x-6y+8)$.

Solución Distribuimos la multiplicación por -6.

$$\mathbf{-6}(-3x-6y+8) = \mathbf{-6}(-3x) - (\mathbf{-6})(6y) + (\mathbf{-6})(8)$$

$$= 18x - (-36y) + (-48)$$ Haga las multiplicaciones.

$$= 18x + 36y + (-48)$$ Escriba la resta como suma del opuesto de $-36y$, que es $36y$.

$$= 18x + 36y - 48$$ Sumar -48 es lo mismo que restar 48.

Sección 8.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. La propiedad _____ nos dice cómo multiplicar $5(x+7)$. Después de hacer la multiplicación para obtener $5x+35$, decimos que se han _____ los paréntesis.
2. _____ una expresión algebraica significa usar propiedades algebraicas para escribirla en una forma más simple.
3. Cuando una expresión algebraica se simplifica el resultado es una expresión _____.
4. _____ expresiones y _____ ecuaciones.

CONCEPTOS

5. Enuncie la propiedad distributiva usando las variables x, y y z.

6. Use las variables r, s y t para enunciar la propiedad distributiva.

7. Las expresiones siguientes son ejemplos de la propiedad distributiva por la *derecha* y por la *izquierda*:

$$5(w + 7) \quad \text{y} \quad (w + 7)5$$

¿A cuál de las dos debería llamársele propiedad distributiva derecha?

8. Para cada una de las expresiones siguientes diga si la propiedad distributiva se aplica.

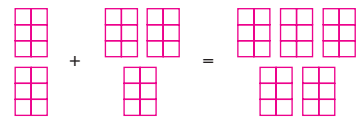
a. $2(5t)$ **b.** $2(t + 5)$

c. $5(2 \cdot t)$ **d.** $(2t)5$

e. $(2)(-t)5$ **f.** $(5 - t)(-2)$

9. La propiedad distributiva se puede demostrar usando la ilustración. Llene los espacios: dos grupos de 6 más tres grupos de 6 son ☐ grupos de 6. Por tanto,

$$\square \cdot 2 + \square \cdot 3 = 6(\square + \square)$$



10. a. Simplifique: $2(5x)$.

b. Quite los paréntesis: $2(5 + x)$.

11. Escriba una expresión equivalente $-(y + 9)$ sin usar paréntesis.

12. Explique qué ilustran las flechas.

$$-9(y - 7)$$

NOTACIÓN *Complete las soluciones.*

13. $-5(7n) = (\square \cdot 7)n$
$= -35n$

14. $4(2a + b - 1) = 4(\square) + 4(\square) - \square(1)$
$= 8a + 4b - 4$

Llene los espacios.

15. a. $2(x + 4) = 2x \square 8$

b. $2(x - 4) = 2x \square 8$

c. $-2(x + 4) = -2x \square 8$

d. $-2(-x - 4) = 2x \square 8$

16. $-(x + 10) = \square(x + 10)$

17. Escriba las expresiones de forma más simple usando menos símbolos matemáticos.

a. $-(-x)$

b. $x - (-5)$

c. $5x - 10y + (-15)$

d. $5 \cdot x$

18. Determine cuál es el número a ser distribuido.

a. $-6(x - 2)$ **b.** $(t + 1)(-5)$

c. $(a + 24)8$ **d.** $-(z - 16)$

PRÁCTICA *Simplifique las expresiones.*

19. $2(6x)$ **20.** $4(7b)$

21. $-5(6y)$ **22.** $-12(6t)$

23. $-10(-10t)$ **24.** $-8(-6k)$

25. $(4s)3$ **26.** $(9j)7$

27. $2c \cdot 7$ **28.** $11f \cdot 9$

29. $-5 \cdot 8h$ **30.** $-8 \cdot 4d$

31. $-7x(6y)$ **32.** $13a(-2b)$

33. $4r \cdot 4s$ **34.** $7x \cdot 7y$

35. $2x(5y)(3)$ **36.** $4(3z)(4)$

37. $5r(2)(-3b)$ **38.** $4d(5)(-3e)$

39. $5 \cdot 8c \cdot 2$ **40.** $3 \cdot 6j \cdot 2$

41. $(-1)(-2e)(-4)$ **42.** $(-1)(-5t)(-1)$

Use la propiedad distributiva para quitar los paréntesis.

43. $4(x + 1)$ **44.** $5(y + 3)$

45. $4(4 - x)$ **46.** $5(7 + k)$

47. $-2(3e + 3)$ **48.** $-5(7t + 2)$

49. $-8(2q - 6)$ **50.** $-5(3p - 8)$

51. $-4(-3 - 5s)$ **52.** $-6(-1 - 3d)$

53. $(7 + 4d)6$ **54.** $(8r + 2)7$

55. $(5r - 6)(-5)$ **56.** $(3z - 7)(-8)$

57. $(-4 - 3d)6$ **58.** $(-4 - 2j)5$

59. $3(3x - 7y + 2)$ **60.** $5(4 - 5r + 8s)$

61. $-3(-3z - 3x - 5y)$ **62.** $-10(5e + 4a + 6t)$

Escriba las expresiones sin usar paréntesis.

63. $-(x + 3)$ **64.** $-(5 + y)$

65. $-4t + 5)$ **66.** $-(8x + 4)$

67. $-(-3w - 4)$ **68.** $-(-6 - 4y)$

69. $-(5x - 4y + 1)$ **70.** $-(6r - 5f + 1)$

Cada expresión es el resultado de una aplicación de la propiedad distributiva. ¿Cuál era la expresión algebraica original?

71. $2(4x) + 2(5)$ **72.** $3(3y) + 3(7)$

73. $-4(5) - 3x(5)$ **74.** $-8(7) - (4s)(7)$

75. $-3(4y) - (-3)(2)$ **76.** $-5(11s) - (-5)(11t)$

77. $3(4) - 3(7t) - 3(5s)$ **78.** $2(7y) + 2(8x) - 2(4)$

POR ESCRITO

79. Explique qué significa simplificar una expresión algebraica. Dé un ejemplo.

80. Explique las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

81. Explique cómo aplicar la propiedad distributiva.

82. Explique por qué la propiedad distributiva se aplica a $2(3 + x)$ pero no se aplica a $2(3x)$.

REPASO

83. Simplifique: $|-6 + 1|$. **84.** Simplifique: $-1 - (-4)$.

85. Identifique la operación asociada con cada palabra: *producto, cociente, diferencia* y *suma.*

86. ¿Cuáles son los pasos usados para encontrar la media (promedio) de un conjunto de números?

87. Inserte el símbolo de desigualdad apropiado, $>$ o $<$:

$$-6 \quad -7$$

88. Llene el espacio correspondiente: Factorizar un número significa expresarlo como una _____ de otros números enteros.

89. De las siguientes actividades, ¿cuál involucra el área: alfombrar un cuarto, colocar una cerca en un patio, caminar alrededor de un lago, pinta una pared?

90. Escriba siete al cuadrado y siete al cubo.

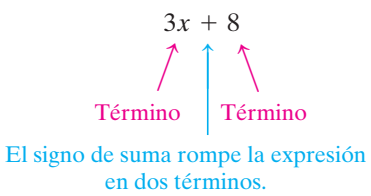
8.5 Asociación o combinación de términos semejantes

- Términos de una expresión algebraica
- Coeficientes de un término
- Términos y factores
- Términos semejantes
- Asociación de términos semejantes
- Fórmulas de perímetros

En esta sección mostraremos cómo la propiedad distributiva se puede usar para simplificar expresiones algebraicas que involucran suma y resta. También repasamos el concepto de perímetro y escribimos fórmulas para los perímetros de un rectángulo y un cuadrado usando variables.

Términos de una expresión algebraica

Los signos de suma rompen una expresión algebraica en pedazos más pequeños llamados **términos**. La expresión $3x + 8$ contiene dos términos: $3x$ y 8.



Términos

Un **término** es un número o un producto de un número y una o más variables.

Algunos ejemplos de términos son

$$6b^2, \quad -15x, \quad -4ac, \quad x, \quad -y, \quad 12$$

Si una expresión algebraica involucra resta, la resta se puede expresar como suma del opuesto. Por ejemplo, $5x - 6$ se puede escribir en la forma equivalente $5x + (-6)$. Vemos entonces que $5x - 6$ contiene dos términos, $5x$ y -6.

Autoevaluación 1
Enliste los términos de las expresiones:
a. $-12y^2 + y + 10$
b. $-4ab$
c. $9 - m - 6m + 12$

Respuestas **a.** $-12y^2$, y, 10, **b.** $-4ab$, **c.** 9, $-m$, $-6m$, 12

EJEMPLO 1 Enliste los términos de las expresiones. **a.** $-3x^2 + 5x + 8$, **b.** $-24rs$, y **c.** $x - 5 - 3x + 10$.

Solución
a. $-3x^2 + 5x + 8$ contiene tres términos: $-3x^2$, $5x$ y 8.
b. $-24rs$ es un término.
c. $x - 5 - 3x + 10$ se puede escribir como $x + (-5) + (-3x) + 10$. Contiene cuatro términos: x, -5, $-3x$ y 10.

Coeficientes de un término

Un término de una expresión algebraica puede consistir de un solo número (llamado **constante**), una variable sola o un producto de números y variables.

Coeficientes numéricos

En un término el producto de un número y una o más variables, el factor numérico se llama el **coeficiente numérico** (o simplemente el **coeficiente**) del término. El coeficiente de un término constante es la constante misma.

En el término $3x$, 3 es el *coeficiente* y x la parte *variable*. Algunos ejemplos más se muestran en la tabla 8.2.

Término	Coeficiente	Parte variable
$6b^2$	6	b^2
$-15x$	-15	x
$-4ac$	-4	ac
x	1	x
$-y$	-1	y
25 (constante)	25	ninguna

TABLA 8.2

Nótese que cuando no hay número frente a una variable el coeficiente se entiende que es 1. Por ejemplo, el coeficiente del término x es 1. Si hay solamente un signo negativo (u opuesto) frente a la variable se entiende que el coeficiente es -1. Por tanto, se puede pensar en $-y$ como $-1y$.

Autoevaluación 2
Enliste los términos semejantes de las expresiones: $6y^3 - y + 7$.

EJEMPLO 2 Identifique el coeficiente de cada término en la expresión $-5x^2 + x - 15$.

Solución Primero, escribimos la resta como suma del opuesto.

$$-5x^2 + x - 15 = -5x^2 + x + (-15)$$

Vemos que la expresión tiene tres términos.

Término	Coeficiente	
$-5x^2$	-5	
x	1	
-15	-15	Decimos que -15 es un término constante.

Respuestas 6, -1, 7

Términos y factores

Es importante poder distinguir entre los *términos* de una expresión algebraica y los *factores* de un término. Los términos se separan por un signo de suma + y los factores son números o variables multiplicados entre sí.

Considere la expresión $-2x + 3xy$, que contiene dos términos.

El primer término: $-2x$ — El segundo término: $3xy$

El primer término contiene dos factores: -2 y x.

El segundo término contiene tres factores: 3, x y y.

EJEMPLO 3 Determine si y es un factor o un término de las expresiones:
a. $8 + y$ y **b.** $8y$.

Solución

a. Como y se suma a 8, y es un término de $8 + y$.

b. Como y está multiplicado por 8, y es un factor de $8y$.

Autoevaluación 3

Determine si x es un factor o un término de las expresiones:
a. $-5x$ y **b.** $x + 5$.

Respuestas **a.** factor, **b.** término

Términos semejantes

La expresión $5t - 6t + 10$ contiene tres términos. Las partes variables de dos de los términos, $5t$ y $-6t$, son idénticas. Decimos entonces que son **términos semejantes** o **similares**.

Términos semejantes (términos similares)

Los **términos semejantes**, o **términos similares**, son términos con exactamente las mismas variables y exponentes. Cualesquier constantes en una expresión se consideran términos semejantes.

Términos semejantes

$2x$ y $3x$

Variables idénticas

$-3a^2$, $16a^2$ y $125a^2$

Variables idénticas elevadas a potencias idénticas

Términos no semejantes

$2x$ y $2t$

Distintas variables

$8y$ y $-14y^2$

Distintos exponentes de la variable y

COMENTARIO Cuando se busquen términos semejantes no se fije en los coeficientes de los términos. Considere sólo sus partes variables.

Autoevaluación 4
Enliste los términos semejantes de las expresiones:
a. $10c + 8 + 7$
b. $8 + 8x + x^2 + x^3$
c. $4r + 8t - 3r + t$

Respuestas **a.** 8 y 7, **b.** ninguno, **c.** $4r$ y $-3r$, $8t$ y t

EJEMPLO 4 Enliste los términos semejantes en las expresiones siguientes:
a. $5a + 6 + 3a$, **b.** $3x^2 - 3x^5 + 2$, y **c.** $-5x^2 + 3 - 1 + x^2$.

Solución

a. En $5a + 6 + 3a$, los términos $5a$ y $3a$ tienen la misma variable y el mismo exponente. Son términos semejantes.

b. $3x^2 - 3x^5 + 2$ no tiene términos semejantes.

c. $-5x^2 + 3 - 1 + x^2$ contiene dos pares de términos semejantes. $-5x^2$ y x^2 son semejantes porque la variable y el exponente son los mismos. Los números 3 y -1 son términos semejantes.

Asociación de términos semejantes

Si vamos a sumar o restar objetos tienen que ser similares. Por ejemplo, las fracciones que se sumen deben tener un denominador común. Cuando se suman decimales alineamos columnas para asegurarnos que sumamos décimos con décimos, centésimos con centésimos y así sucesivamente. Lo mismo es cierto cuando trabajamos con términos de una expresión algebraica. Se pueden sumar o restar sólo si son términos semejantes.

La expresión siguiente no se puede simplificar porque sus términos no son semejantes.

$$3x + 4y$$

Términos no semejantes
Las partes variables no son idénticas.

La expresión siguiente sí se puede simplificar porque contiene términos semejantes.

$$3x + 4x$$

Términos semejantes
Las partes variables con idénticas.

Para simplificar una expresión que contenga términos semejantes usamos la propiedad distributiva. Por ejemplo, podemos simplificar $3x + 4x$ como sigue.

$3x + 4x = (3 + 4)x$ Distribuya el factor x con 3 y 4.
$= 7x$ Haga la suma dentro del paréntesis: $3 + 4 = 7$.

Decimos que hemos *simplificado* la expresión $3x + 4x$. El resultado es la expresión equivalente $7x$. Simplificar la suma (o diferencia) de términos semejantes se llama **combinar términos semejantes.**

Autoevaluación 5
Simplifique las expresiones reduciendo términos semejantes:
a. $-5b + 10b$
b. $12c - 9c$

Respuestas **a.** $5b$, **b.** $3c$

EJEMPLO 5 Simplifique las expresiones asociando o combinando términos semejantes: **a.** $-3x + 7x$ y **b.** $6y - 4y$.

Solución

a. $-3x + 7x = (-3 + 7)x$ Use la propiedad distributiva. El factor x se distribuyó sobre -3 y 7.
$= 4x$ Haga la suma dentro de los paréntesis: $-3 + 7 = 4$.

b. $6y - 4y = (6 - 4)y$ Use la propiedad distributiva. El factor y se distribuyó.
$= 2y$ Haga la resta dentro del paréntesis: $6 - 4 = 2$.

Los resultados del ejemplo 5 sugieren la regla siguiente.

Reducción de términos semejantes

Para sumar o restar términos semejantes, se combinan sus coeficientes y se mantienen las mismas variables con los mismos exponentes.

EJEMPLO 6 Simplifique asociando términos semejantes: **a.** $-7x + (-9x)$ y **b.** $6m + 3m$.

Solución

a. $-7x + (-9x) = -16x$ Sume los coeficientes de los términos semejantes: $-7 + (-9) = -16$

b. $6m + 3m = 9m$ Sume los coeficientes: $6 + 3 = 9$. Conserve la variable m.

Autoevaluación 6

Simplifique reduciendo términos semejantes:

a. $-5n + (-2n)$

b. $15r + 4r$

Respuestas **a.** $-7n$, **b.** $19r$

EJEMPLO 7 Simplifique asociando términos semejantes: **a.** $5n - 3n$, **b.** $16h - 24h$ y **c.** $-4d - (-5d)$.

Solución

a. $5n - 3n = 2n$ Reste: $5 - 3 = 2$. Conserve la variable n.

b. $16h - 24h = -8h$ Reste: $16 - 24 = 16 + (-24) = -8$. Conserve la variable h.

c. $-4d - (-5d) = -4d + 5d$ Sume el opuesto de $-5d$.

$= 1d$ Sume: $-4 + 5 = 1$. Conserve la variable d.

$= d$ $1d = d$.

Autoevaluación 7

Simplifique reduciendo términos semejantes:

a. $25c - 5c$

b. $9w - 15w$

c. $-7p - (-6p)$

Respuestas **a.** $20c$, **b.** $-6w$, **c.** $-p$

COMENTARIO Las expresiones que involucran resta de cero a menudo se simplifican incorrectamente. Por ejemplo, $0 - 6x \neq 6x$. Para simplificar $0 - 6x$, podemos usar el hecho de que la resta es lo mismo que suma del opuesto.

$0 - 6x = 0 + (-6x)$ Sume el opuesto de $6x$, que es $-6x$.

$= -6x$ Cuando sumamos 0 a cualquier otro número, el número no cambia.

EJEMPLO 8 Simplifique: $8s - 8S - 5s + S$.

Solución Las letras s minúscula y S mayúscula son variables distintas. Reacomodamos los términos para que los términos semejantes estén juntos.

$8s - 8S - 5s + S = 8s - 5s - 8S + S$ Use la propiedad conmutativa de la suma para juntar los términos semejantes.

$= 3s - 7S$ Asocie los términos semejantes: $8 - 5 = 3$ y conserve, $-8 + 1 = -7$ y conserve S.

EJEMPLO 9 Simplifique: $4(x + 3) - 2(x - 1)$.

Solución

$4(x + 3) - 2(x - 1) = 4x + 12 - 2x + 2$ Use la propiedad distributiva dos veces.

$= 4x - 2x + 12 + 2$ Use la propiedad conmutativa de la suma para juntar los términos semejantes.

$= 2x + 14$ Asocie los términos semejantes: $4x - 2x = 2x$ y $12 + 2 = 14$.

Autoevaluación 9

Simplifique: $6(y + 4) - 5(y - 6)$.

Respuesta $y + 54$

Las expresiones de los ejemplos 8 y 9 contenían dos conjuntos de términos semejantes. En cada solución reacomodamos los términos para que estuvieran juntos. Sin embargo, en la práctica podrá combinar o asociar los términos semejantes sin tener que escribirlos unos junto al otro.

Autoevaluación 10
Simplifique: $-6(3y - 2) + 4y - 1$.

Respuesta $-14y + 11$

EJEMPLO 10 Simplifique: $-5(2x - 2) + 8x - 6$.

Solución

$-5(2x - 2) + 8x - 6 = -10x + 10 + 8x - 6$ Distribuya -10.

$= -2x + 4$ Asocie los términos semejantes: $-10x + 8x = -2x$ y $10 - 6 = 4$.

Fórmulas de perímetros

Para desarrollar una fórmula para el perímetro de un rectángulo, hacemos l = longitud del rectángulo y a = ancho del rectángulo. (Véase la figura 8.10.) Entonces

$P = l + a + l + a$ El perímetro es la distancia alrededor del rectángulo.

$= 2l + 2a$ Asocie los términos semejantes: $l + l = 2l$ y $a + a = 2a$.

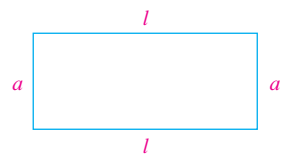


FIGURA 8.10

El perímetro de un rectángulo

El perímetro P de un rectángulo con largo l y ancho a está dado por

$$P = 2l + 2a$$

Para desarrollar la fórmula para el perímetro de un cuadrado hacemos c = longitud de un lado del cuadrado. (Véase la figura 8.11.) Entonces

$P = c + c + c + c$ Sume las longitudes de los cuatro lados.

$= 4c$ Asocie los términos semejantes. Recuerde que $c = 1c$.

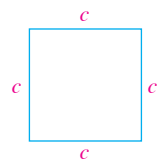


FIGURA 8.11

El perímetro de un cuadrado

El perímetro P de un cuadrado con lados de longitud c está dado por

$$P = 4c$$

EJEMPLO 11 Conservación de energía.

Véase la figura 8.12. Encuentre el costo de sellar la puerta delantera y la ventana de la casa si el material cuesta 20¢ el pie.

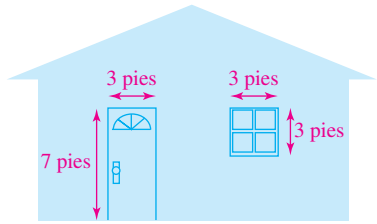


FIGURA 8.12

Analice el problema

Para encontrar el costo del sellado debemos encontrar los perímetros de la puerta y de la ventana. La puerta tiene la forma de rectángulo y la ventana forma de cuadrado.

Forme una ecuación

Sea P = perímetro total y traduzca las palabras del problema en una ecuación.

El perímetro total	es	el perímetro de la puerta	más	el perímetro de la ventana.	
P	=	$2l + 2a$	+	$4c$	Escriba las fórmulas para el perímetro de un rectángulo y de un cuadrado.

Resuelva la ecuación

$P = 2\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{c}$

$= 2(\mathbf{7}) + 2(\mathbf{3}) + 4(\mathbf{3})$ Sustituya l por 7, a por 3 y c por 3.

$= 14 + 6 + 12$ Haga las multiplicaciones.

$= 32$ Haga las sumas

Enuncie la conclusión

El perímetro total es 32 pies. A 20¢ el pie el costo total será $(32 \cdot 20)$¢. Esto es, 640¢ o \$6.40.

Compruebe el resultado

Podemos comprobar los resultados por estimación. El perímetro es aproximadamente 30 pies y $30 \cdot 20 = 600$¢, que es \$6. La respuesta, \$6.40, parece razonable.

Sección 8.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Un _____ es un número o un producto de un número y una o más variables.
2. En el término $5t$, a 5 se le llama el _____ y a t se le llama la parte _____
3. El _____ de una figura geométrica es la distancia a su alrededor.
4. Cuando escribimos $9x + x$ como $10x$ decimos que hemos _____ los términos semejantes.
5. $2(x + 3) = 2x + 2(3)$ es un ejemplo de uso de la propiedad _____.
6. A los términos con exactamente las mismas variables y exponentes se les llama términos _____.

7. Simplificar la _____ (o diferencia) de términos semejantes se llama asociación de términos semejantes.

8. A los números multiplicados juntos para formar un producto se les llama _____.

CONCEPTOS

9. Determine si x se usa como factor o como término.

a. $12 + x$

b. $7x$

c. $12y + 12x - 6$

d. $-36xy$

10. Determine si $6y$ se usa como factor o como término.

a. $6yz$ **b.** $10 + 6y$

c. $9xy + 6y$ **d.** $6y - 18$

11. ¿Cuál es el coeficiente de cada término?

a. $11x$ **b.** $8t$

c. $-4x^2$ **d.** a

e. $-x$ **f.** $102xy$

12. ¿Cuál es el coeficiente del segundo término de cada expresión?

a. $5x^2 + 6x + 7$

b. $xy - x + y + 10$

c. $9y^2 + y + 8$

d. $5x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

13. Complete la tabla.

Término	Coeficiente	Parte variable
$6m$		
$-75t$		
w		
$4bh$		

14. Simplifique cada par de expresiones si es que es posible.

a. $5(2x)$ y $5 + 2x$

b. $6(-7x)$ y $6 - 7x$

c. $2(3x)(3)$ y $2 + 3x + 3$

d. $x \cdot x$ y $x + x$

15. Cuando se simplifica una expresión algebraica algunos estudiantes usan subrayados.

$$\underline{\underline{3y}} + \underline{4} + \underline{\underline{5y}} + \underline{8}$$

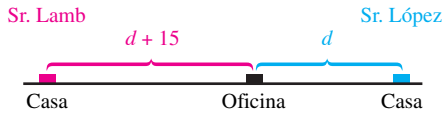
¿Para qué propósito sirve el subrayado?

16. Determine si cada enunciado es verdadero o falso.

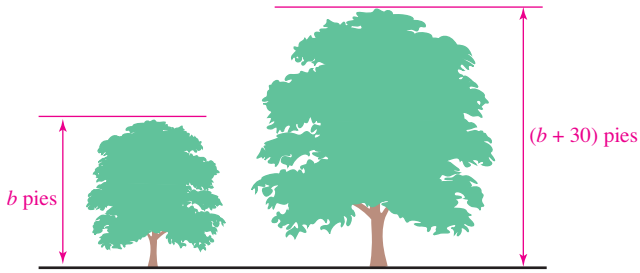
a. $x = 1x$ **b.** $2x + 0 = 2x$

c. $-y = -1y$ **d.** $0 - 4c = 4c$

17. La ilustración muestra la distancia (en millas) a la que dos hombres viven de la oficina. Encuentre la distancia total que viajan los hombres de la casa a la oficina.



18. Se muestran las alturas de dos árboles. Encuentre la suma de sus alturas.



19. **a.** ¿Qué es lo que ilustra el diagrama?

$$9x + 5x = 14x$$

b. ¿Qué es lo que ilustra el diagrama?

$$12k - 4k = 8k$$

20. Para cada expresión identifique los términos semejantes.

a. $3a + 8 + 2a$ **b.** $10 - 13h + 12$

c. $3x^2 + 3x + 3$ **d.** $9y^2 - 9m - 8y^2$

NOTACIÓN *Complete las soluciones.*

21. $5x + 7x = (5 + \square)x$
$= 12x$

22. $12a - 16a = (\square - 16)a$
$= -4a$

23. $2(x - 1) + 3x = 2x - \square + 3x$
$= \square - 2$

24. $-3(1 - b) - b = \square + \square - b$
$= -3 + \square$

25. En la fórmula $P = 2l + 2a$,

a. ¿Qué representa P?

b. ¿Qué significa $2l$?

c. ¿Qué significa $2a$?

26. En la fórmula $P = 4c$,

a. ¿Qué representa P?

b. ¿Qué significa $4c$?

PRÁCTICA *Identifique los términos de las expresiones.*

27. $3x^2 + 5x + 4$

28. $y^2 + 12y + 6$

29. $5 + 5t - 8t + 4$

30. $3x - y - 5x + y$

¿Qué exponente debe aparecen en cada hueco para que los términos sean semejantes?

31. $3x^{\square}, -6x^2$

32. $7a^3, 21a^{\square}$

33. $-8h^5, -5h^{\square}$

34. $25n^4, -15n^{\square}$

Simplifique asociando términos semejantes si es que es posible.

35. $6t + 9t$

36. $7r + 5r$

37. $5c - c$

38. $8y - y$

39. $-5x + 6x$

40. $-8m + 6m$

41. $-5d + 9d$

42. $-4a + 12a$

43. $3e - 7e$

44. $2a - 4a$

45. $h - 7$

46. $j - 8$

47. $4z - 10z$

48. $3a - 18a$

49. $-3x - 4x$

50. $-7y - 9y$

51. $2t - 2t$

52. $7r - 7r$

53. $-6s + 6s$

54. $19c + (-19c)$

55. $x + x + x + x$

56. $c - c - c$

57. $2x + 2y$

58. $5a - 5b$

59. $0 - 2y$

60. $0 - 7x$

61. $3a - 0$

62. $10t + 0$

63. $6t + 9 + 5t + 3$

64. $5x + 3 + 5x + 4$

65. $3w - 4 - w - 1$

66. $6y + 6 - y - 1$

67. $-4r + 8R + 2R - 3r + R$

68. $12a - A - a - 8A - a$

69. $-45d - 12a - 5d + 12a$

70. $-m - n - 8m + n$

71. $4x - 3y - 7 + 4x - 2 - y$

72. $2a + 8 - b - 5 + 5a - 9b$

Simplifique las expresiones.

73. $4(x + 1) + 5(6 + x)$

74. $7(1 + y) + 8(2y + 3)$

75. $5(3 - 2s) + 4(2 - 3s)$

76. $6(t - 3) + 9(2 - t)$

77. $-4(6 - 4e) + 3(e + 1)$

78. $-5(7 - 4t) + 3(2 + 5t)$

79. $3t - (t - 8)$

80. $6n - (4n + 1)$

81. $-2(2 - 3x) - 3(x - 4)$

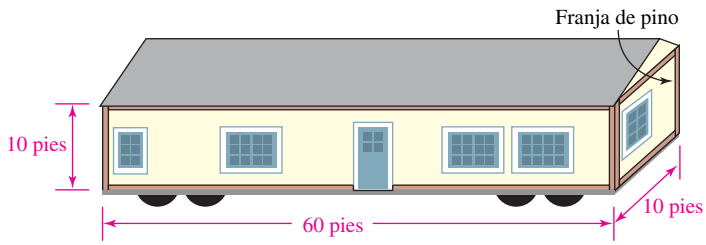
82. $-3(1 - y) - 5(2y - 6)$

83. $-4(-4y + 5) - 6(y + 2)$

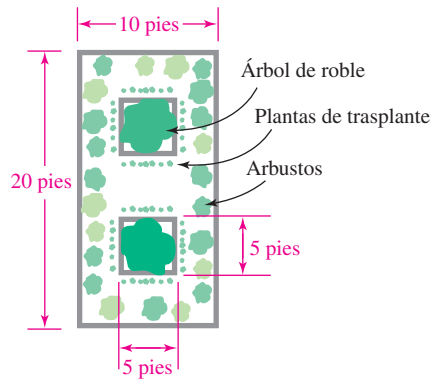
84. $-3(-6y - 8) - 4(5 - y)$

APLICACIONES

85. DISEÑOS DE CASAS MÓVILES El diseño de una casa móvil requiere una franja de 6 pulgadas de ancho de pino entintado alrededor de cada pared exterior, como se muestra en café. Si la franja de pino cuesta 80¢ por pie lineal, ¿cuánto se gastará en el pino usado para el arreglo?



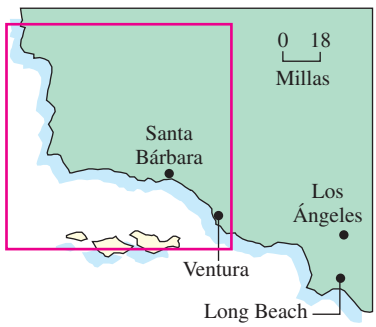
86. DISEÑO DE PAISAJES Un arquitecto del paisaje ha diseñado un macetón alrededor de dos árboles de roble como se muestra. El macetón se tiene que bordear con orillas de madera roja de forma rectangular y dos cuadrados. Si el material cuesta 17¢ por pie lineal, ¿cuánto costará la madera de este proyecto?



87. PREPARATIVOS DE FIESTA El tamaño apropiado de una pista de baile para un número dado de personas se puede determinar de la tabla en la página siguiente. Encuentre el perímetro de las pistas enlistadas.

Bailantes lentos	Bailantes rápidos	Tamaño de la pista (en pies)
8	5	9×9
14	9	12×12
22	15	15×15
32	20	18×18
50	30	21×21

88. PERFORACIÓN COSTERA El mapa siguiente muestra un área de la costa de California donde se planea perforar para sacar petróleo. Use la escala para estimar las longitudes de los lados del área remarcada en el mapa. Luego encuentre su perímetro.



POR ESCRITO

89. Explique qué significa que dos términos sean términos semejantes.

90. Explique qué significa decir que el coeficiente de x es un 1 implícito.

91. Explique la diferencia entre un término y un factor. Dé algunos ejemplos.

92. La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2a$. Explique por qué podemos escribir esta fórmula en la forma $P = 2(l + a)$.

REPASO

93. Resuelva: $-4t = -8$.

94. Evalúe: $(-1)(-1)(-1)$.

95. Encuentre la factorización en primos de 100.

96. Escriba $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ como una expresión exponencial.

97. Llene los blancos para hacer que el enunciado sea verdadero. La _____ _____ de un número en una recta es la distancia entre él y el cero en la recta numérica.

98. Enuncie la propiedad de la división de la igualdad en palabras.

8.6 Simplificación de expresiones para resolver ecuaciones

• Comprobación de soluciones • Resolución de ecuaciones • Variables en ambos lados de una ecuación • Eliminación de paréntesis • Una estrategia para resolver ecuaciones

A menudo tenemos que simplificar expresiones algebraicas para resolver ecuaciones. Algunas veces es necesario asociar términos semejantes para despejar la variable en un lado de la ecuación. Otras veces es necesario aplicar la propiedad distributiva para escribir una ecuación de forma que se pueda resolver. En esta sección discutimos ambas situaciones.

Comprobación de soluciones

Resolver una *ecuación* significa encontrar todos los valores de una variable que hacen que la ecuación sea verdadera.

Autoevaluación 1
¿-4 es solución de $-4a - 6 = -2 - 3a$?

EJEMPLO 1 Determine si -3 es solución de $5x - 1 = 6x + 8$.

Solución Si -3 es solución, obtendremos un enunciado verdadero cuando x se sustituya con -3.

$$5x - 1 = 6x + 8 \qquad 5x \text{ significa } 5 \cdot x,\ 6x \text{ significa } 6 \cdot x.$$
$$5(-3) - 1 \stackrel{?}{=} 6(-3) + 8 \qquad \text{Sustituya } -3 \text{ por } x.$$
$$-15 - 1 \stackrel{?}{=} -18 + 8 \qquad \text{Haga las multiplicaciones.}$$
$$-16 \neq -10 \qquad \text{Simplifique cada lado.}$$

Como $-16 \neq -10$, concluimos que -3 no es solución de $5x - 1 = 6x + 8$.

Respuesta sí

Resolución de ecuaciones

Algunas veces varias propiedades de la igualdad se tienen que aplicar una después de otra para resolver una ecuación.

EJEMPLO 2 Resuelva: $-12x + 5 = 17$. Compruebe el resultado.

Solución En el lado izquierdo de la ecuación x se multiplica por -12 y luego se suma 5 a ese producto. Para despejar x usamos las reglas para el orden de las operaciones en *reversa*.

- Para deshacer la suma de 5 restamos 5 de ambos lados.
- Para deshacer la multiplicación por -12, dividimos ambos lados entre -12.

$$-12x + 5 = 17$$
$$-12x + 5 \mathbf{- 5} = 17 \mathbf{- 5} \qquad \text{Reste 5 de ambos lados.}$$
$$-12x = 12 \qquad \text{Haga las restas: } 5 - 5 = 0 \text{ y } 17 - 5 = 12.$$
$$\frac{-12x}{\mathbf{-12}} = \frac{12}{\mathbf{-12}} \qquad \text{Divida ambos lados entre } -12.$$
$$x = -1 \qquad \text{Haga la división } \tfrac{12}{-12} = -1.$$

Verifique que -1 sea la solución haciendo la comprobación.

Respuesta -15

Autoevaluación 2
Resuelva: $-3a - 15 = 30$.

EJEMPLO 3 Resuelva: $100 = t - 20 + t$.

Solución

$$100 = t - 20 + t$$
$$100 = 2t - 20 \qquad \text{Asocie los términos semejantes: } t + t = 2t.$$
$$100 \mathbf{+ 20} = 2t - 20 \mathbf{+ 20} \qquad \text{Para deshacer la resta de 20 sume 20 a ambos lados.}$$
$$120 = 2t \qquad \text{Haga las sumas.}$$
$$\frac{120}{\mathbf{2}} = \frac{2t}{\mathbf{2}} \qquad \text{Para deshacer la multiplicación por 2 divida ambos lados entre 2.}$$
$$60 = t \qquad \text{Haga las divisiones.}$$
$$t = 60 \qquad \text{Intercambie los lados de la ecuación.}$$

Verifique que 60 satisfaga la ecuación original.

Respuesta 78

Autoevaluación 3
Resuelva: $155 = d - 1 + d$.

PARA PENSAR A DETALLE — Matrimonio

"Los adultos se casan hoy después de lo que lo hacían en el pasado. La posposición del matrimonio ha conducido a un aumento sustancial en el número de adultos jóvenes que nunca se han casado." Jason Fields, Oficina del Censo de Estados Unidos, 2000.

1. Considere el problema siguiente:

> En 1950 la edad mediana del primer matrimonio para los hombres era 2.5 años mayor que la de las mujeres. La suma de las edades medianas de la novia y el novio era 43.1 años. ¿Cuál era la edad mediana al primer matrimonio para los hombres y para las mujeres en 1950?

Si hacemos x = la edad mediana al primer matrimonio de las mujeres en 1950, entonces $x + 2.5$ = edad mediana al primer matrimonio de los hombres en 1950. Escriba una ecuación que muestre que la suma de las edades medianas era 43.1 y resuélvala para responder al problema.

2. Use un enfoque similar para resolver el problema siguiente:

> En 2002, la edad mediana en Estados Unidos al primer matrimonio era 1.6 años más que para las mujeres. La suma de las edades medianas de la novia y el novio era 52.2 años. ¿Cuál era la edad mediana al primer matrimonio para los hombres y para las mujeres en 2002?

Variables en ambos lados de una ecuación

Cuando se resuelve una ecuación queremos despejar la variable en un lado de la ecuación. Si las variables aparecen en ambos lados podemos usar la propiedad de suma (o resta) de la igualdad para tener todos los términos variables en un lado y todos los términos constantes en el otro.

Autoevaluación 4
Resuelva: $9B = 3B - 18$.

EJEMPLO 4 Resuelva: $8y = 2y + 12$.

Solución Hay términos variables (resaltados en azul) en ambos lados de la ecuación. Para despejar y en el lado izquierdo de la ecuación usamos la propiedad de la resta de la igualdad para eliminar $2y$ en el lado derecho.

$$8y = 2y + 12$$

$$8y \mathbf{-\ 2y} = 2y + 12 \mathbf{-\ 2y}$$ Para eliminar $2y$ del lado derecho reste $2y$ de ambos lados.

$$6y = 12$$ Reduzca los términos semejantes: $8y - 2y = 6y$ y $2y - 2y = 0$.

$$\frac{6y}{\mathbf{6}} = \frac{12}{\mathbf{6}}$$ Para deshacer la multiplicación por 6 divida ambos lados entre 6.

$$y = 2$$ Haga las divisiones.

Respuesta -3

Verifique que 2 satisfaga la ecuación.

COMENTARIO Cuando resolvemos ecuaciones no importa si la variable se despeja del lado derecho o el izquierdo de la ecuación. En el ejemplo 4 podríamos haber despejado y en el lado derecho pero de esta forma habría involucrado más pasos.

Autoevaluación 5
Resuelva: $72 - 13d = 12d - 3$.

EJEMPLO 5 Resuelva: $-9 - 6t = 5t + 2$.

Solución Hay términos variables (resaltados en azul) en ambos lados de la ecuación. Podemos restar $5t$ de ambos lados para despejar a t en el lado izquierdo o podemos

sumar $6t$ a ambos lados para despejar t en el lado derecho. Parece que los cálculos serán más fáciles si sumamos $6t$ a ambos lados.

$$-9 - 6t = 5t + 2$$

$-9 - 6t + 6t = 5t + 2 + 6t$ Para eliminar $-6t$ del lado izquierdo sume $6t$ en ambos lados.

$-9 = 11t + 2$ Asocie los términos semejantes: $-6t + 6t = 0$ y $5t + 6t = 11t$.

$-9 - 2 = 11t + 2 - 2$ Para deshacer la suma de 2 reste 2 a ambos lados.

$-11 = 11t$ Haga las restas: $-9 - 2 = -11$ y $2 - 2 = 0$.

$\frac{-11}{11} = \frac{11t}{11}$ Para deshacer la multiplicación por 11 divida ambos lados entre 11.

$-1 = t$ Haga las divisiones.

$t = -1$ Intercambie los lados de la ecuación.

Verifique que -1 satisface la ecuación.

Respuesta 3

Eliminación de paréntesis

A veces debemos usar la propiedad distributiva para resolver una ecuación.

EJEMPLO 6

Resuelva: $3(x + 15) = 45$.

Autoevaluación 6
Resuelva: $7(t + 5) = -70$.

Solución

$3(x + 15) = 45$

$3x + 3(15) = 45$ Distribuya la multiplicación por 3.

$3x + 45 = 45$ Haga la multiplicación.

$3x + 45 - 45 = 45 - 45$ Para deshacer la suma de 45 reste 45 de ambos lados.

$3x = 0$ Haga las restas: $45 - 45 = 0$.

$\frac{3x}{3} = \frac{0}{3}$ Para deshacer la multiplicación por 3 divida ambos lados entre 3.

$x = 0$ Haga las divisiones.

Verifique que 0 satisfaga la ecuación.

Respuesta -15

Una estrategia para resolver ecuaciones

Para resumir, cuando se resuelve una ecuación debemos despejar la variable en un lado del símbolo $=$. A veces esto requiere que se eliminen paréntesis y/o asocien términos semejantes. Los pasos siguientes debieran aplicarse en orden cuando se resuelva una ecuación.

Estrategia para resolver ecuaciones

1. Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
2. Asocie los términos semejantes en ambos lados de la ecuación.
3. Aplique las propiedades de la suma o la resta de la igualdad para dejar las variables de un lado del símbolo $=$ y los términos constantes del otro.
4. Continúe asociando términos semejantes cuando sea posible.
5. Deshaga las operaciones de multiplicación y división para despejar la variable.
6. Compruebe el resultado.

No siempre tiene que seguir los seis pasos para resolver una ecuación dada. Si un paso no aplica, sáltelo y siga con el siguiente.

Autoevaluación 7
Resuelva: $4x = -13 - (3x + 8)$.

Respuesta -3

EJEMPLO 7 Resuelva: $2x = 2 - (4x + 14)$.

Solución

$2x = 2 - (4x + 14)$	
$2x = 2 - \mathbf{1}(4x + 14)$	Rescriba: $2 - (4x + 14) = 2 - 1(4x + 14)$.
$2x = 2 - 4x - 14$	Use la propiedad distributiva para quitar los paréntesis: $-1(4x + 14) = -4x - 14$.
$2x = -12 - 4x$	Asocie los términos semejantes $2 - 14 = -12$.
$2x + \mathbf{4x} = -12 - 4x + \mathbf{4x}$	Para eliminar $-4x$ del lado derecho sume $4x$ a ambos lados.
$6x = -12$	Asocie los términos semejantes: $2x + 4x = 6x$ y $-4x + 4x = 0$.
$\frac{6x}{\mathbf{6}} = \frac{-12}{\mathbf{6}}$	Para deshacer la multiplicación por 6 divida ambos lados entre 6.
$x = -2$	Haga las divisiones.

Verifique que -2 satisface la ecuación.

Sección 8.6 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. _____ una ecuación significa encontrar todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea un enunciado verdadero.
2. _____ una solución significa sustituir ese valor en la ecuación original para ver si resulta un enunciado verdadero.
3. En $2(x + 4)$, quitar los paréntesis significa aplicar la propiedad _____.
4. Las expresiones algebraicas se simplifican y las _____ se resuelven.
5. La frase "_____ términos semejantes" se refiere a las operaciones de suma y resta.
6. A _____ es una letra que representa un número. Una _____ es un número fijo y no cambia de valor.

CONCEPTOS

7. Explique por qué -5 no es solución de $5x - 3x = -9$.
8. **a.** Para cada ecuación, encierre en un círculo los términos que involucren variables.
   $5x + 3x = 8$ $5t = 3t + 8$ $7 = 5h + 3h - 1$
   b. ¿Qué ecuación tiene variables en ambos lados?
9. Para resolver $6k = 5k - 18$, necesitamos eliminar $5k$ del lado derecho. Para hacerlo, ¿qué tenemos que restar de ambos lados?
10. Determine el primer paso para resolver las ecuaciones.
    a. $2x + 4x = 36$
    b. $6x = x + 10$
    c. $5(x + 1) = 15$
    d. $50 = x + 4 + x$
11. Considere la ecuación $2x - 8 = 4x - 14$.
    a. Para resolver esta ecuación despejando x en el lado izquierdo, ¿qué debiéramos restar de ambos lados?
    b. Para resolver esta ecuación despejando x en el lado derecho, ¿qué debiéramos restar de ambos lados?
12. Llene los espacios.
    $6 - (d - 4) = 8$
    $6 - \square(d - 4) = 8$
    $6 - \square + \square = 8$
13. **a.** Simplifique: $3t - t - 8$.
    b. Resuelva: $3t - t = -8$.
    c. Evalúe $3t - t - 8$ para $t = -4$.

14. **a.** Evalúe $2(x + 1)$ para $x = -4$.

b. Simplifique: $2(x + 1) - 4$.

c. Resuelva: $2(x + 1) = -4$.

NOTACIÓN *Complete las soluciones para resolver la ecuación.*

15.
$$\begin{aligned} 4x - 2x &= -20 \\ \square &= -20 \\ \frac{2x}{\square} &= \frac{-20}{\square} \\ x &= \square \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} 8y - 6 &= -2 + 10y \\ 8y - 6 - \square &= -2 + 10y - \square \\ -6 &= -2 + \square \\ -6 + \square &= -2 + 2y + \square \\ -4 &= \square \\ \frac{-4}{\square} &= \frac{2y}{\square} \\ -2 &= y \\ y &= \square \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 5(x - 9) &= 5 \\ 5x - 5(\square) &= 5 \\ 5x - \square &= 5 \\ 5x - 45 + \square &= 5 + 45 \\ \square &= 50 \\ \frac{5x}{\square} &= \frac{50}{\square} \\ x &= \square \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} -2(-1 - x) &= 16 \\ 2 + \square &= 16 \\ 2 + 2x - \square &= 16 - \square \\ 2x &= \square \\ \frac{2x}{\square} &= \frac{\square}{\square} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

PRÁCTICA *Para cada ecuación determine si el número dado es una solución.*

19. $5f + 8 = 4f + 11;\ 3$

20. $3r + 8 = 5r - 2;\ 5$

21. $2(x - 1) = 33;\ 12$

22. $-6(x + 4) = -40;\ 8$

Resuelva las ecuaciones

23. $7x - 6 = 8$

24. $4x - 2 = 26$

25. $-2x + 3 = 31$

26. $-6x + 7 = 49$

27. $60 = 3v - 5v$

28. $28 = x - 3x$

29. $-28 = -m + 2m$

30. $-120 = -p + 4p$

31. $x + x + 6 = 90$

32. $c + c + 1 = 51$

33. $T + T - 17 = 57$

34. $r + r - 15 = 95$

35. $600 = m - 12 + m$

36. $403 = x - 3 + x$

37. $1500 = b + 30 + b$

38. $8000 = h + 100 + h$

39. $7x = 3x + 8$

40. $4x = 2x + 14$

41. $x - 14 = 2x$

42. $2x - 7 = 3x$

43. $9t - 40 = 14t$

44. $5r - 24 = 8r$

45. $25 + 4j = 9j$

46. $36 + 5j = 9j$

47. $-48 + 12t = 16t$

48. $-28 + 7t = 21t$

49. $-5g - 40 = -15g$

50. $-20s - 20 = -40s$

51. $3s + 1 = 4s - 7$

52. $6v + 2 = 7v - 3$

53. $50a - 1 = 60a - 101$

54. $25y - 2 = 75y - 202$

55. $-7 + 5r = 83 - 10r$

56. $-20 + t = 44 - 7t$

57. $100 - y = 100 + y$

58. $-60 + z = -60 - z$

59. $2(x + 6) = 4$

60. $9(y - 1) = 27$

61. $-16 = 2(t + 2)$

62. $-10 = 5(y - 7)$

63. $-3(2w - 3) = 9$

64. $-4(5t + 2) = -8$

65. $-(c - 4) = 3$

66. $-(6 - 2x) = -8$

67. $4(p - 2) = 0$

68. $10(4s - 4) = 0$

69. $2(4y + 8) = 3(2y - 2)$

70. $3(7 - y) = 3(2y + 1)$

71. $16 - (x + 3) = -13$

72. $10 - (w + 4) = -12$

73. $5 - (7 - y) = -5$

74. $10 - (x - 5) = 40$

75. $2x + 3(x - 4) = 23$

76. $5j + 6(j + 1) = 226$

77. $10q + 3(q - 7) = 18$

78. $2q + 6(q - 4) = 24$

POR ESCRITO

79. Explique el error en lo siguiente.

$$2x = 4x - x$$
$$2x = 4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

80. Considere $3x = 2x + 9$. ¿Por qué es necesario eliminar uno de los términos variables para poder resolver para x?

81. ¿Qué significa *resolver una ecuación*?

82. Explique cómo determinar si un número es una solución de una ecuación.

REPASO

83. Reste: $-7 - 9$.

84. ¿Qué números no son factores de 28?: 4, 6, 7, 8

85. Evalúe: $\dfrac{-8 + 2}{-2 + 4}$.

86. Simplifique: $\dfrac{\frac{3}{2} + 5}{3 - \frac{1}{2}}$.

87. Simplifique: $-(-5)$.

88. Usando x y y, ilustre la propiedad conmutativa de la suma.

89. ¿Cuál es el signo del producto de dos enteros negativos?

90. Evalúe: $3 + 4[-4 - 3(-2)]$.

8.7 Exponentes

- Regla del producto para los exponentes
- Regla de la potencia para los exponentes
- Regla de la potencia para los productos

En capítulos previos hemos aplicado las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para simplificar expresiones algebraicas. Ahora discutimos cómo simplificar expresiones que involucran exponentes.

Regla del producto para los exponentes

Hemos visto que los exponentes se usan para representar una multiplicación repetida. Por ejemplo, x^5 es una expresión exponencial con base x y exponente 5. Se llama una *potencia de x.* Aplicando la definición de exponente vemos que

$$x^5 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 factores de } x}$$

Autoevaluación 1
Escriba la multiplicación repetida representada por cada expresión:

a. t^4

b. $(12f)^3$

c. $(-2x)^2$

EJEMPLO 1 Escriba la multiplicación repetida representada por cada expresión: **a.** n^3, **b.** $(3h)^2$ y **c.** $(-6b)^4$.

Solución

a. Para n^3, la base es n y el exponente es 3. Por tanto,

$$n^3 = n \cdot n \cdot n$$

b. Para $(3h)^2$, la base es $3h$ y el exponente es 2. Por tanto,

$$(3h)^2 = 3h \cdot 3h$$

c. Para $(-6b)^4$, la base es $-6b$ y el exponente es 4. Por tanto,

$$(-6b)^4 = (-6b)(-6b)(-6b)(-6b)$$

Respuestas **a.** $t \cdot t \cdot t \cdot t$, **b.** $12f \cdot 12f \cdot 12f$, **c.** $(-2x)(-2x)$

La expresión $x^3 \cdot x^5$ es el producto de dos potencias de x. Para desarrollar una regla para multiplicarlas usaremos el hecho que lo que indica un exponente es una multiplicación repetida.

$x^3 \cdot x^5 = (\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{3 factores de } x})(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 factores de } x})$ — x^3 significa escribir x como factor 3 veces; x^5 significa escribir x como factor 5 veces.

$= (\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{8 factores de } x})$ — Haga la multiplicación para obtener 8 factores de x.

$= x^8$ — Como se usa x como factor 8 veces podemos escribir el producto como x^8.

Nótese que el exponente es el resultado de la *suma* de los exponentes en $x^3 \cdot x^5$.

Suma de los exponentes

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

Estas observaciones son sugeridas para seguir la regla.

Regla del producto para los exponentes

Para cualquier número x y cualesquier enteros positivos n y m,

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Para multiplicar dos expresiones exponenciales con la misma base, sume los exponentes y conserve la base común.

EJEMPLO 2

Simplifique los productos: **a.** $3^4 \cdot 3^7$ **b.** $(y^2)(y^4)$ y **c.** $x^2x^4x^9$.

Solución

a. $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7}$ — Como las bases son las mismas sume los exponentes y conserve la base común que es 3.

$= 3^{11}$ — Haga la suma: $4 + 7 = 11$.

b. $(y^2)(y^4) = y^{2+4}$ — Como las bases son las mismas sume los exponentes y conserve la base común que es y.

$= y^6$ — Haga la suma: $2 + 4 = 6$.

c. Como las bases son las mismas sume los exponentes y conserve la base común que es x.

$= x^{15}$ — Haga la suma: $2 + 4 + 9 = 15$.

Autoevaluación 2

Simplifique los productos:

a. $5^3 \cdot 5^6$

b. $m^2(m^3)$

c. $b^3b^8b^2$

Respuestas **a.** 5^9, **b.** m^5, **c.** b^{13}

COMENTARIO No podemos usar la regla del producto para exponentes para simplificar una expresión como $x^4 + x^3$, porque no es un producto. Tampoco la podemos usar para simplificar $x^4 \cdot y^3$, porque las bases no son las mismas.

La regla del producto para exponentes se puede usar para simplificar expresiones algebraicas más complicadas que involucran multiplicación.

Autoevaluación 3
Simplifique los productos:
a. $4m \cdot 6m^5$
b. $8r^3(-5r^2)$

Respuestas **a.** $24m^6$, **b.** $-40r^5$

EJEMPLO 3
Simplifique los productos: **a.** $3a(5a^2)$ y **b.** $-2t^2 \cdot 6t^6$.

Solución

a. $3a(5a^2) = (3 \cdot 5)(a \cdot a^2)$ Aplique las propiedades conmutativa y asociativa para cambiar el orden y reagrupar los factores.

$= (3 \cdot 5)(a^1 \cdot a^2)$ Recuerde que $a = a^1$.

$= 15a^{1+2}$ Haga la multiplicación $3 \cdot 5 = 15$. Luego sume los exponentes y conserve la base común que es a.

$= 15a^3$ Haga la suma: $1 + 2 = 3$.

b. $-2t^2 \cdot 6t^6 = (-2 \cdot 6)(t^2 \cdot t^6)$ Cambie el orden de los factores y reagrúpelos.

$= -12t^{2+6}$ Haga la multiplicación: $-2 \cdot 6 = -12$. Luego sume los exponentes y conserve la base común.

$= -12t^8$ Haga la suma: $2 + 6 = 8$.

Las expresiones exponenciales a menudo contienen más de una variable.

Autoevaluación 4
Simplifique lo siguiente:
a. $c^3d^2 \cdot cd^5$
b. $-7a^2b^3(8a^4b^5)$

Respuestas **a.** c^4d^7, **b.** $-56a^6b^8$

EJEMPLO 4
Simplifique lo siguiente: **a.** $n^2m \cdot n^8m^3$ y **b.** $4xy^2(-3x^2y^3)$.

Solución

a. $n^2m \cdot n^8m^3 = (n^2 \cdot n^8)(m \cdot m^3)$ Cambie el orden y agrupe los factores con bases iguales.

$= n^{2+8} \cdot m^{1+3}$ Sume los exponentes de las bases iguales. Recuerde que $m = m^1$.

$= n^{10}m^4$ Haga las sumas.

b. $4xy^2(-3x^2y^3) = [4(-3)](x \cdot x^2)(y^2 \cdot y^3)$ Agrupe los factores con bases iguales.

$= -12 \cdot x^{1+2} \cdot y^{2+3}$ Haga la multiplicación. Sume los exponentes de las bases iguales.

$= -12x^3y^5$ Haga las sumas.

Regla de la potencia para los exponentes

Para desarrollar una regla de la potencia para exponentes consideramos la expresión $(x^2)^5$. Nótese que la base, x^2, está elevada a una potencia. Por tanto, estamos trabajando con una potencia de una potencia. De nuevo usaremos la definición de exponente para encontrar una regla para simplificar esta expresión exponencial.

$(x^2)^5 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$ El exponente 5 nos dice que escribamos la base 5 veces.

$= x^{2+2+2+2+2}$ Como las bases son iguales sume los exponentes y conserve la base común.

$= x^{10}$ Haga la suma: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

Nótese que el exponente del resultado es el *producto* de los exponentes en $(x^2)^5$.

Producto de los exponentes

$(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$

Esta observación sugiere la regla siguiente.

Regla de la potencia para exponentes

Para cualquier número x y cualesquier números m y n,

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \qquad \text{o simplemente,} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

Para elevar una expresión exponencial a una potencia, conserve la base y multiplique los exponentes.

EJEMPLO 5

Simplifique las expresiones: **a.** $(2^3)^7$ y **b.** $(b^5)^3$.

Solución

a. $(2^3)^7 = 2^{3 \cdot 7}$ Aplique la regla de la potencia para exponentes conservando la base y multiplicando los exponentes.

$= 2^{21}$ Haga la multiplicación: $3 \cdot 7 = 21$.

b. $(b^5)^3 = b^{5 \cdot 3}$ Conserve la base y multiplique los exponentes.

$= b^{15}$ Haga la multiplicación: $5 \cdot 3 = 15$.

Autoevaluación 5

Simplifique las expresiones:

a. $(4^2)^6$

b. $(y^6)^4$

Respuestas **a.** 4^{12}, **b.** y^{24}

En algunos casos cuando simplificamos expresiones algebraicas que tienen exponentes se tienen que aplicar dos reglas de exponentes.

EJEMPLO 6

Simplifique: **a.** $(n^3)^4(n^2)^5$ y **b.** $(n^2n^3)^5$.

Solución

a. $(n^3)^4(n^2)^5 = n^{3 \cdot 4} \cdot n^{2 \cdot 5}$ Conserve cada base y multiplique sus exponentes.

$= n^{12} \cdot n^{10}$ Haga las multiplicaciones: $3 \cdot 4 = 12$ y $2 \cdot 5 = 10$.

$= n^{12+10}$ Como las bases son iguales conserve la base y sume los exponentes.

$= n^{22}$ Haga la suma: $12 + 10 = 22$.

b. $(n^2n^3)^5 = (n^{2+3})^5$ Trabaje dentro de los paréntesis primero. Como las bases son iguales conserve la base y sume los exponentes.

$= (n^5)^5$ Haga la suma: $2 + 3 = 5$.

$= n^{5 \cdot 5}$ Conserve la base y multiplique los exponentes.

$= n^{25}$ Haga la multiplicación: $5 \cdot 5 = 25$.

Autoevaluación 6

Simplifique:

a. $(x^4)^2(x^3)^3$

b. $(x^4x^2)^3$

Respuestas **a.** x^{17}, **b.** x^{18}

Regla de la potencia para los productos

La expresión exponencial $(2x)^4$ tiene exponente 4 y base $2x$. La base $2x$ es un producto ya que $2x = 2 \cdot x$. Por tanto, $(2x)^4$ es una potencia de un producto. Para encontrar una regla para simplificarla usaremos de nuevo la definición de exponente.

$(2x)^4 = 2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot 2x$ Escribimos la base, $2x$, como factor cuatro veces.

$= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(x \cdot x \cdot x \cdot x)$ Aplicamos las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para cambiar el orden y agrupar los términos semejantes.

$= 2^4x^4$ Ambos factores, 2 y x, se repiten 4 veces. Aplicamos la definición de exponente.

El resultado tiene como factores 2 y x. En el problema original los factores estaban dentro de paréntesis. Ahora cada uno está elevado a la cuarta potencia.

Cada factor dentro del paréntesis termina siendo elevado a la 4ª potencia.

$$(2x)^4 = 2^4x^4$$

Esta observación sugiere la siguiente regla.

Regla de la potencia para productos

Para cualesquier números x y y y cualquier entero positivo m,

$$(xy)^m = x^m y^m$$

Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor del producto a esa potencia.

Autoevaluación 7
Simplifique las expresiones:
a. $(10c)^2$
b. $(5rs)^3$

Respuestas **a.** $100c^2$, **b.** $125r^3s^3$

EJEMPLO 7

Simplifique las expresiones: **a.** $(8a)^2$ y **b.** $(2bx)^3$.

Solución

a. $(8a)^2 = 8^2a^2$ Para elevar $8a$ a la 2ª potencia eleve cada factor del producto a la 2ª potencia.

$= 64a^2$ Encuentre la potencia: $8^2 = 64$.

b. $(2bx)^3 = 2^3b^3x^3$ Para elevar $2bx$ a la 3ª potencia eleve los factores del producto a la 3ª potencia.

$= 8b^3x^3$ Encuentre la potencia: $2^3 = 8$.

Autoevaluación 8
Simplifique las expresiones:
a. $(3n^2)^3$
b. $(6h^2s^9)^2$

Respuestas **a.** $27n^6$, **b.** $36h^4s^{18}$

EJEMPLO 8

Simplifique las expresiones: **a.** $(10a^2)^3$ y **b.** $(3c^5d^3)^4$.

Solución

a. $(10a^2)^3 = 10^3(a^2)^3$ Para elevar $10a^2$ a la 3ª potencia eleve los factores en el producto, 10 y a^2, a la 3ª potencia.

$= 10^3a^{2\cdot3}$ Para elevar a^2 a una potencia conserve la base y multiplique los exponentes.

$= 10^3a^6$ Haga la multiplicación $2 \cdot 3 = 6$.

$= 1000a^6$ Encuentre la potencia: $10^3 = 1000$.

b. $(3c^5d^3)^4 = 3^4(c^5)^4(d^3)^4$ Para elevar $3c^5d^3$ a la 4ª potencia eleve los factores en el producto, 3, c^5 y d^3, a la 4ª potencia.

$= 3^4c^{5\cdot4}d^{3\cdot4}$ Para elevar c^5 y d^3 a una potencia conserve las bases y multiplique sus exponentes.

$= 3^4c^{20}d^{12}$ Haga las multiplicaciones: $5 \cdot 4 = 20$ y $3 \cdot 4 = 12$.

$= 81c^{20}d^{12}$ Encuentre la potencia: $3^4 = 81$.

Autoevaluación 9
Simplifique: $(4y^3)^2(3y^4)^3$.

EJEMPLO 9

Simplifique: $(2a^2)^2(4a^3)^3$.

Solución

$(2a^2)^2(4a^3)^3 = 2^2(a^2)^2 \cdot 4^3(a^3)^3$ Para elevar $2a^2$ y $4a^3$ a potencias eleve los factores de cada producto a la potencia apropiada.

$= 2^2a^{2\cdot 2} \cdot 4^3 \cdot a^{3\cdot 3}$ Para elevar a^2 y a^3 a potencias conserve las bases y multiplique los exponentes.

$= 2^2a^4 \cdot 4^3a^9$ Haga las multiplicaciones: $2 \cdot 2 = 4$ y $3 \cdot 3 = 9$.

$= (2^2 \cdot 4^3)(a^4 \cdot a^9)$ Cambie el orden de los factores y agrupe las bases iguales.

$= (2^2 \cdot 4^3)(a^{4+9})$ Para multiplicar $a^4 \cdot a^9$, conserve las base y sume los exponentes.

$= (2^2 \cdot 4^3)a^{13}$ Haga la suma: $4 + 9 = 13$.

$= (4 \cdot 64)a^{13}$ Encuentre las potencias: $2^2 = 4$ y $4^3 = 64$.

$= 256a^{13}$ Haga la multiplicación: $4 \cdot 64 = 256$.

Respuesta $432y^{18}$

Sección 8.7 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. En x^n, a x se le llama la _____ y a n el _____.
2. x^2 es la segunda _____ de x o podemos leerlo también como "x al _____."
3. $x^m \cdot x^n$ es el producto de dos expresiones exponenciales con bases _____ .
4. $(x^m)^n$ es una potencia de una _____.
5. $(2x)^n$ es un _____ elevado a una potencia.
6. En x^{m+n}, $m + n$ es la _____ de m y n.

CONCEPTOS

7. Represente las multiplicaciones usando exponentes.
   - **a.** $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
   - **b.** $x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
   - **c.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$
8. Escriba las expresiones exponenciales como multiplicaciones repetidas.
   - **a.** a^3b^5
   - **b.** $(x^2)^3$
   - **c.** $(2a)^6$
9. Escriba un producto de dos expresiones exponenciales con bases variables iguales. Luego simplifíquelo usando una regla para los exponentes.
10. Escriba una potencia de un producto y luego simplifíquela usando una regla para los exponentes.
11. Escriba una potencia de una potencia y luego simplifíquela usando una regla para los exponentes.
12. ¿Qué propiedad algebraica nos permite cambiar el orden de los factores de una multiplicación?
13. Complete las reglas para los exponentes.
    - **a.** $x^m x^n =$ ☐
    - **b.** $(x^m)^n =$ ☐
    - **c.** $(xy)^n =$ ☐
14. En cada caso diga cómo la expresión se ha simplificado erróneamente.
    - **a.** $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$
    - **b.** $3^3 \cdot 3^4 = 9^7$
    - **c.** $(2^3)^4 = 2^7$
15. Escriba cada expresión sin exponente.
    - **a.** 2^1 **b.** $(-10)^1$ **c.** x^1
16. Encuentre las potencias.
    - **a.** 2^3 **b.** 4^3 **c.** 5^3
17. Simplifique las expresiones si es que es posible.
    - **a.** $x \cdot x$ y $x + x$
    - **b.** $x \cdot x^2$ y $x + x^2$
    - **c.** $x^2 \cdot x^2$ y $x^2 + x^2$
18. Simplifique las expresiones si es que es posible.
    - **a.** $a \cdot a$ y $a - a$
    - **b.** $2a \cdot a$ y $2a - a$
    - **c.** $2a \cdot 3a$ y $2a - 3a$
19. Simplifique las expresiones si es que es posible.
    - **a.** $4x \cdot x$ y $4x + x$
    - **b.** $4x \cdot 3x$ y $4x + 3x$
    - **c.** $4x^2 \cdot 3x$ y $4x^2 + 3x$

20. Simplifique las expresiones si es que es posible.

a. $a(-2a)$ y $a - 2a$

b. $-2a(3a)$ y $-2a + 3a$

c. $-2a(-3a)$ y $-2a - 3a$

21. Evalúe la expresión exponencial x^{m+n} para $x = 3$, $m = 2$ y $n = 1$.

22. Evalúe la expresión exponencial $(x^m)^n$ para $x = 2$, $m = 3$ y $n = 2$.

NOTACIÓN *Complete las soluciones.*

23. $x^5 \cdot x^7 = x^{\square+\square}$
$= x^{12}$

24. $(x^5)^4 = x^{\square\cdot\square}$
$= x^{20}$

25. $(2x^4)(8x^3) = (2 \cdot 8)(\square \cdot \square)$
$= 16x^{\square+\square}$
$= 16x^7$

26. $(2x^2)^3 = 2^3(x^2)^3$
$= 2^3x^{\square\cdot\square}$
$= 2^3x^{\square}$
$= 8x^6$

PRÁCTICA *Escriba las expresiones usando un solo exponente.*

27. $x^2 \cdot x^3$

28. $t^4 \cdot t^3$

29. x^3x^7

30. y^2y^5

31. $f^5(f^8)$

32. $g^6(g^2)$

33. $n^{24} \cdot n^8$

34. $m^9 \cdot m^{61}$

35. $l^4 \cdot l^5 \cdot l$

36. $w^4 \cdot w \cdot w^3$

37. $x^6(x^3)x^2$

38. $y^5(y^2)(y^3)$

39. $2^4 \cdot 2^8$

40. $3^4 \cdot 3^2$

41. $5^6(5^2)$

42. $(8^3)8^4$

Simplifique los productos.

43. $2x^2 \cdot 4x$

44. $5y \cdot 6y^3$

45. $5t \cdot t^9$

46. $f^4 \cdot 3f$

47. $-6x^3(4x^2)$

48. $-7y^5(5y^3)$

49. $-x \cdot x^3$

50. $8x^6(-x)$

51. $6y(2y^3)3y^4$

52. $2d(5d^4)(d^2)$

53. $-2t^3(-4t^2)(-5t^5)$

54. $-7k^5(-3k^3)(-2k^9)$

55. $xy^2 \cdot x^2y$

56. $s^2t \cdot st$

57. $b^3 \cdot c^2 \cdot b^5 \cdot c^6$

58. $h^3 \cdot f^3 \cdot f^2 \cdot h^4$

59. $x^4y(xy)$

60. $(ab)(ab^2)$

61. $a^2b \cdot b^3a^2$

62. $w^2y \cdot yw^4$

63. $x^5y \cdot y^6$

64. $a^7 \cdot b^2a^4$

65. $3x^2y^3 \cdot 6xy$

66. $25a^3b \cdot 2ab^5$

67. $xy^2 \cdot 16x^3$

68. $mn^4 \cdot 8n^3$

69. $-6f^2t(4f^4t^3)$

70. $(-5a^2b^2)(5a^3b^6)$

71. $ab \cdot ba \cdot a^2b$

72. $xy \cdot y^2x \cdot x^2y$

73. $-4x^2y(-3x^2y^2)$

74. $-2rt^4(-5r^2t^2)$

Simplifique las expresiones.

75. $(x^2)^4$

76. $(y^6)^3$

77. $(m^{50})^{10}$

78. $(n^{25})^4$

79. $(2a)^3$

80. $(3x)^3$

81. $(xy)^4$

82. $(ab)^8$

83. $(3s^2)^3$

84. $(5f^6)^2$

85. $(2s^2t^3)^2$

86. $(4h^5y^6)^2$

87. $(x^2)^3(x^4)^2$

88. $(a^5)^2(a^3)^3$

89. $(c^5)^3 \cdot (c^3)^5$

90. $(y^2)^8 \cdot (y^8)^2$

91. $(2a^4)^2(3a^3)^2$

92. $(5x^3)^2(2x^4)^3$

93. $(3a^3)^3(2a^2)^3$

94. $(6t^5)^2(2t^2)^2$

95. $(x^2x^3)^{12}$

96. $(a^3a^3)^3$

97. $(2b^4b)^5$

98. $(3y^2y^5)^3$

POR ESCRITO

99. Explique la diferencia entre x^2 y $2x$.

100. Explique por qué las reglas para los exponentes no se aplican $x^2 + x^3$.

101. Una de las reglas para los exponentes es que la potencia de un producto es el producto de las potencias. Use un ejemplo específico para explicar esta regla.

102. Para encontrar el resultado cuando se *multiplican* dos expresiones exponenciales con bases iguales debemos *sumar* los exponentes. Explique por qué esto es así.

REPASO

103. JOYERÍA Un lote al que nos referimos como joyería de oro está en realidad hecho de una combinación de oro con otro metal. Por ejemplo, el oro de 18 quilates es $\frac{18}{24}$ de oro en peso. Simplifique la fracción.

104. Después de evaluarse, ¿cuál es el signo de $(-13)^5$?

105. Divida: $\dfrac{-25}{-5}$.

106. ¿En cuánto cambió la temperatura si pasamos de $-4°$ F a $-17°$ F?

107. Evalúe: $2\left(\dfrac{12}{-3}\right) + 3(5)$.

108. Resuelva: $-10 = x + 1$.

109. Resuelva: $-x = -12$.

110. Divida: $\dfrac{0}{10}$.

CONCEPTO CLAVE

Variables

Uno de los principales objetivos de este curso es que se sienta cómodo cuando trabaje con **variables**. Recordará que una variable es una letra que representa un número.

En los problemas de aplicación hacemos que la variable represente una cantidad desconocida como el número de clientes que solía tener un estilista, la antigüedad de una vasija y el dinero en efectivo que se le dio a un ganador del premio Nobel. Luego escribimos una ecuación para describir la situación matemáticamente y resolver la ecuación para encontrar el valor representado por la variable.

En los problemas del 1 al 6 suponga que va a responder la pregunta: ¿Qué cantidad debiera representarse con una variable? Enuncie su respuesta en la forma: "Hagamos $x = \ldots$."

1. El costo mensual por rentar una van es \$120 menos que el costo mensual por comprarla. Para comprarla los pagos son \$290. ¿Cuánto cuesta mensualmente rentar la van?

2. Un pedazo de tubo es 10 pies más largo que otro. Juntos, su longitud total es 24 pies. ¿Cuánto mide la pieza más corta de tubo?

3. La longitud de un campo rectangular es 50 pies. ¿Cuánto es su anchura si tiene un perímetro de 200 pies?

4. Si una manguera puede llenar una tinaja en 2 horas y otra la llena en 3 horas, ¿cuánto tardará en llenarse si se usan ambas mangueras?

5. Encuentre la distancia recorrida por un conductor en tres horas si su velocidad promedio fue 55 millas por hora.

6. ¿En qué año se casó una pareja si su 50 aniversario fue en 1998?

Las variables también se pueden usar para enunciar propiedades matemáticas en notación concisa "taquigráfica". En los problemas del 7 al 14 enuncie las propiedades usando símbolos matemáticos y la(s) variable(s) dada(s).

7. Use las variables a y b para enunciar que dos números se pueden sumar en cualquier orden para dar la misma suma.

8. Use la variable x para enunciar que cuando se resta 0 de un número el resultado es el mismo número.

9. Use la variable b para enunciar que el resultado cuando se divide un número entre 1 es el mismo número.

10. Use la variable x para mostrar que la suma de un número y 1 es mayor que el número.

11. Usando la variable n enuncie el hecho de que cuando 1 se resta de cualquier número la diferencia es menor que el número.

12. Enuncie el hecho de que el producto de cualquier número y 0 es 0 usando la variable a.

13. Use las variables r, s y t para enunciar que la forma en que agrupemos tres números cuando se suman no afecta la respuesta.

14. Usando la variable n, enuncie el hecho de que cuando un número se multiplica por 1 el resultado es el número.

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

SECCIÓN 8.1

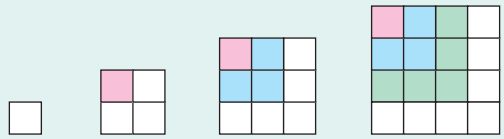
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Pida prestada una balanza y algunas pesas en el departamento de química. Úselas como parte de una presentación en clase para explicar cómo la propiedad de la resta de la igualdad se usa para resolver la ecuación $x + 2 = 5$. Luego use la propiedad de la suma para resolver $x - 3 = 7$.

SECCIÓN 8.2

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Use una balanza y algunas pesas para explicar a la clase cómo resolver $5x = 20$ y $\frac{x}{3} = 4$.

SECCIÓN 8.3

ÁREA DE UN CUADRADO Examine las ilustraciones. ¿Qué patrón ve conforme aumenta el tamaño del cuadrado? Dibuje los cuatro cuadrados siguientes de esta sucesión identificándolos de forma semejante.



1
1
$1 \square 1$

$1 + 3$
4
$2 \square 2$

$1 + 3 + 5$
9
$3 \square 3$

$1 + 3 + 5 + 7$
16
$4 \square 4$

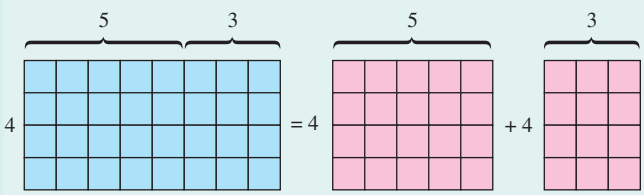
SECCIÓN 8.4

LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA La ilustración muestra tres rectángulos que se dividen en cuadrados. Como el área del rectángulo a la izquierda del signo igual se puede encontrar multiplicando su ancho por su largo su área es $4(5 + 3)$ unidades cuadradas. Al evaluar esta expresión vemos que el área sombreada en azul es $4(8) = 32$ unidades cuadradas.

El área al lado derecho del signo igual es la suma de las áreas de dos rectángulos: $4(5) + 4(3)$. Al evaluar esta expresión vemos que el área sombreada en rojo es también 32 unidades cuadradas: $4(5) + 4(3) = 20 + 12 = 32$. Por tanto,

$$4(5 + 3) = 4(5) + 5(3)$$

Haga una demostración semejante de la propiedad distributiva usando rectángulos con dimensiones distintas de los de la ilustración.



SECCIÓN 8.5

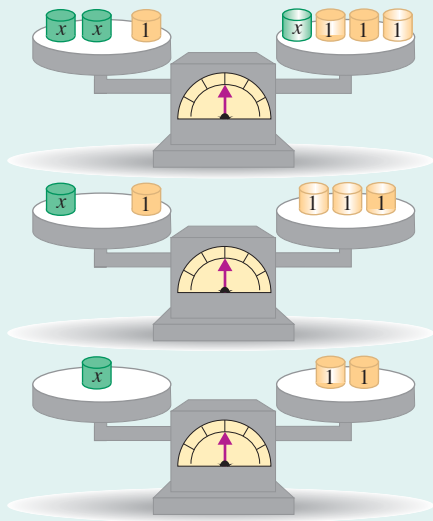
TÉRMINOS SEMEJANTES Si queremos sumar o restar objetos, éstos tienen que ser semejantes. Simplifique las expresiones siguientes reduciendo términos semejantes. Tendrá que cambiar algunas de las unidades para que trabaje con términos semejantes. Para hacerlo use los factores de conversión siguientes.

- Hay doce pulgadas en un pie.
- Hay 36 pulgadas en una yarda.
- Hay 3 pies en una yarda.
- Hay 5 280 pies en una milla.

a. 1 pie + 6 pulgadas
b. 1 yarda + 11 pulgadas
c. 1 milla − 1 pie
d. 12 pies − 1 yarda
e. 1 yarda + 1 pie + 5 pulgadas
f. 2 yardas + 2 pies − 2 pulgadas
g. 6 pulgadas + 3 pies − 4 pulgadas + 2 pies

SECCIÓN 8.6

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES



Hemos visto cómo se pueden usar las balanzas para ilustrar los pasos que se siguen para resolver una ecuación.

a. ¿Qué ecuación se resuelve en la ilustración? ¿Cuál es su solución?
b. Haga una serie de ilustraciones que muestren la solución de las ecuaciones siguientes:
1. $3x = 2x + 4$
2. $3x + 1 = 2x + 4$
3. $2x + 6 = 4x$
4. $2x + 6 = 4x + 2$

SECCIÓN 8.7

REGLAS PARA LOS EXPONENTES Haga que un estudiante de su grupo escriba las tres reglas para los exponentes presentadas en la sección 8.7 en tarjetas separadas de 3×5. Haga que otro estudiante escriba una descripción con palabras de las reglas en tarjetas separadas. Finalmente, haga que un tercer estudiante escriba un ejemplo del uso de las reglas en tarjetas separadas.

Cuando los tres juegos de tarjetas estén completos, júntelos, mézclelos y trabajen juntos como grupo para emparejar la descripción simbólica, la descripción en palabras y el ejemplo de cada regla.

REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 8.1 *Resolución de ecuaciones por suma y resta*

CONCEPTOS

Una *ecuación* es un enunciado en el que dos expresiones son iguales.

En la ecuación $x + 5 = 7$, x es la *variable* o *incógnita*. Dos ecuaciones que tengan exactamente las mismas *soluciones* se dice que son *equivalentes*.

Para resolver una ecuación, despeje la variable en un lado de la ecuación deshaciendo la operación se hace sobre ella. Esto se logra usando la operación opuesta.

Si se suma el mismo número a ambos lados de una ecuación resulta una ecuación equivalente.

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Si el mismo número se resta de ambos lados de una ecuación resulta una ecuación equivalente.

Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Para resolver un problema siga estos pasos:

1. Analice el problema.
2. Forme una ecuación.
3. Resuelva la ecuación.
4. Enuncie la conclusión.
5. Compruebe el resultado.

EJERCICIOS DE REPASO

Determine si el número dado es solución de la ecuación.

1. $x + 2 = 13;\ 5$

2. $x - 3 = 1;\ 4$

Identifique la variable en las ecuaciones.

3. $y - 12 = 50$

4. $114 = 4 - t$

Resuelva las ecuaciones y compruebe el resultado.

5. $x - 7 = 2$

6. $x - 11 = 20$

7. $225 = y - 115$

8. $101 = p - 32$

Resuelva las ecuaciones y compruebe el resultado.

9. $x + 9 = 18$

10. $b + 12 = 26$

11. $175 = p + 55$

12. $212 = m + 207$

13. FINANZAS Una pareja de recién casados dio un enganche de $25 500 por una casa de $122 750. ¿Cuánto pidieron prestado?

14. CLIENTELA MÉDICA Después de cambiar de oficina un doctor perdió 13 pacientes. Si le quedaron 172 pacientes, ¿cuántos tenía originalmente?

SECCIÓN 8.2 *Resolución de ecuaciones por división y multiplicación*

Si ambos lados de una ecuación se dividen entre el mismo número distinto de cero resulta una ecuación equivalente.

Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ $(c \neq 0)$.

Resuelva las ecuaciones y compruebe el resultado.

15. $3x = 12$

16. $15y = 45$

17. $105 = 5r$

18. $224 = 16q$

Si ambos lados de una ecuación se multiplican por el mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente:

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ $(c \neq 0)$.

Para resolver un problema siga estos pasos:

1. Analice el problema.
2. Forme una ecuación.
3. Resuelva la ecuación.
4. Enuncie la conclusión.
5. Compruebe el resultado.

Resuelva las ecuaciones y compruebe el resultado.

19. $\frac{x}{7} = 3$

20. $\frac{a}{3} = 12$

21. $15 = \frac{s}{21}$

22. $25 = \frac{d}{17}$

23. CARPINTERÍA Si puede cortar una tabla de 18 pies en tres partes iguales, ¿cuánto mediría cada pieza?

24. JOYERÍA Cuatro hermanas se reparten el costo de una cadena de oro en partes iguales. ¿Cuánto costó la cadena si lo que pagó cada hermana fue $32?

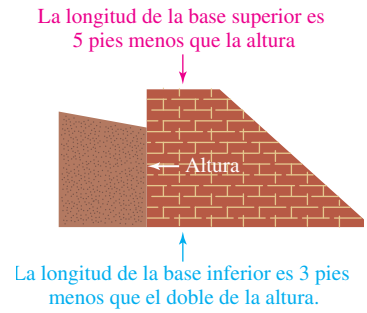
SECCIÓN 8.3 *Expresiones algebraicas y fórmulas*

Cuando se reemplaza una variable, o variables, en una expresión algebraica con un número específico y luego aplicamos las reglas para el orden de las operaciones estamos *evaluando la expresión algebraica*.

MUROS DE CONTENCIÓN La ilustración muestra el diseño de un muro de contención. Las relaciones entre las longitudes de sus partes importantes se dan con palabras.

25. Escoja una variable para representar la altura del muro. Escriba expresiones algebraicas para representar las longitudes de las bases superior e inferior.

26. Suponga que los ingenieros determinan que se necesita un muro de 10 pies de alto. Encuentre las longitudes de las bases superior e inferior.


La longitud de la base superior es 5 pies menos que la altura
Altura
La longitud de la base inferior es 3 pies menos que el doble de la altura.

Evalúe las expresiones algebraicas.

27. $-2x + 6$ para $x = -3$

28. $\frac{6 - a}{1 + a}$ para $a = -2$

29. $b^2 - 4ac$ para $a = 4$, $b = 6$, y $c = -4$

30. $\frac{-2k^3}{1 - 2 - 3}$ para $k = -2$

Una *fórmula* es una regla general que describe una relación conocida entre dos o más variables.

Distancia = velocidad · tiempo

31. DISTANCIA RECORRIDA Complete la tabla encontrando la distancia recorrida para un tiempo dado a una velocidad dada.

	Velocidad (mph)	Tiempo (hr)	Distancia recorrida (mi)
Monorriel	65	2	
Metro	38	3	
Tren	x	6	
Autobús	55	t	

Fórmulas de los negocios:

Precio de venta = precio original − descuento

Precio al por menor = costo + ganancia

Beneficios = venta − costo

32. PRECIOS DE VENTA Encuentre el precio de venta de un trampolín que normalmente se vende en $315 si se ofrece un descuento de $37.

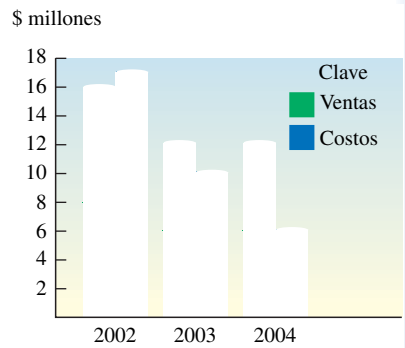
33. GANANCIAS ANUALES La gráfica de barras muestra las ventas y los costos de una compañía en los años de 2002 a 2004 en millones de dólares.

GANANCIAS ANUALES La gráfica de barras muestra las ventas y los costos de una compañía en los años de 2002 a 2004 en millones de dólares.

34. ¿En qué año hubo las mayores ventas?

35. ¿Qué año tuvo las mayores ganancias?

36. ¿Qué puede decir de los costos en este periodo de tres años?



Fórmulas de ciencia

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Distancia caída = $16 \cdot (\text{tiempo})^2$

37. CONVERSIONES DE TEMPERATURA En un lugar de veraneo los visitantes se pueden relajar metiéndose en una piscina o un lago. El agua de la piscina se mantiene a temperatura constante de 77° F. El agua del lago está a 23° C. ¿Cuál agua es más tibia y por cuántos grados Celsius?

38. DISTANCIA CAÍDA Un trabajador acerero deja caer su martillo accidentalmente mientras trabajaba en lo alto de un nuevo edificio muy alto. ¿Qué tanto caerá el martillo en 2 segundos?

SECCIÓN 8.4 *Simplificación de expresiones algebraicas y la propiedad distributiva*

Para *simplificar una expresión algebraica* usamos propiedades del álgebra para escribir expresiones de forma más simple.

La *propiedad distributiva*:
Si a, b y c son números entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(b + c)a = ba + ca$$
$$a(b - c) = ab - ac$$
$$(b - c)a = ba - ca$$
$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

Simplifique las expresiones.

39. $-2(5x)$

40. $-7x(-6y)$

41. $4d \cdot 3e \cdot 5$

42. $(4s)8$

43. $-1(-e)(2)$

44. $7x \cdot 7y$

45. $4 \cdot 3k \cdot 7$

46. $(-10t)(-10)$

Multiplique para quitar los paréntesis.

47. $4(y + 5)$

48. $-5(6t + 9)$

49. $(-3 - 3x)7$

50. $-3(4e - 8x - 1)$

Escriba una expresión equivalente sin paréntesis.

51. $-(6t - 4)$

52. $-(5 + x)$

53. $-(6t - 3s + 1)$

54. $-(-5a - 3)$

SECCIÓN 8.5 *Asociación o combinación de términos semejantes*

Un *término* es un número o un producto de un número y una o más variables.

En un término que es un producto de un número y una o más variables al factor que es un número se le llama *coeficiente*.

Los *términos semejantes* son términos con exactamente las mismas variables y exponentes.

Para asociar los términos semejantes, combine sus coeficientes y conserve las variables y exponentes.

Identifique el segundo término y el coeficiente del tercer término.

55. $5x^2 - 4x + 8$

56. $7y - 3y + x - y$

Determine si x se usa como un factor o un término.

57. $5x - 6y^2$

58. $x + 6$

59. $6xy$

60. $-36 - x + b$

Determine si los siguientes son términos semejantes.

61. $4x, -5x$

62. $4x, 4x^2$

63. $3xy, xy$

64. $-5b^2c, -5bc^2$

Simplifique asociando términos semejantes.

65. $3x + 4x$

66. $6r - 9r$

67. $-3t - 6t$

68. $2z + (-5z)$

69. $6x - x$

70. $-6y - 7y - (-y)$

71. $5w - 8 - 4w + 3$

72. $-5x - 5y - x + 7y$

Simplifique asociando términos semejantes

73. $-45d - 2a + 4a - d$

74. $5y + 8h - 3 + 7h + 5y + 2$

Simplifique las expresiones.

75. $7(y + 6) + 3(2y + 2)$

76. $-4(t - 7) - (t + 6)$

77. $5x - 2(x - 6)$

78. $6f + 7(12 - 8f)$

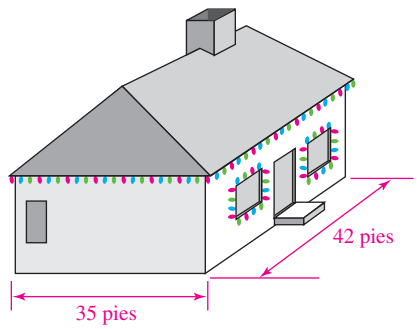
El perímetro de un rectángulo está dado por

$$P = 2l + 2w$$

El perímetro de un cuadrado está dado por

$$P = 4s$$

79. LUCES DE FIESTA Para decorar una casa se van a colgar luces alrededor de ésta como se muestra. También se colocarán alrededor de dos ventanas de 5 pies por 5 pies en el frente. ¿Cuántos pies de luces se necesitan?



SECCIÓN 8.6 *Simplificación de expresiones para resolver ecuaciones*

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de la variable que cuando se sustituyen en la ecuación original hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

80. ¿-3 es solución de $-4x + 6 = 2(x + 12)$? Explique.

Resuelva las ecuaciones. **Compruebe todas las respuestas.**

81. $3x + 4 = -8$

82. $5a - 1 - 3a = -32 - 5$

83. $7x = 3x - 12$

84. $5(y - 15) = 0$

85. $-3(2x + 4) - 4 = -40$

86. $y + 170 = 5y - 170$

87. $-6(2x + 3) = -(5x - 3)$

88. $2(3 - 2x) - 5(1 - 3x) = -21$

89. Enliste los pasos de la estrategia para resolver ecuaciones.

SECCIÓN 8.7 *Exponentes*

Los *exponentes* representan multiplicación repetida.

90. **a.** ¿Qué multiplicación repetida representa $(4h)^3$?

b. Escriba esta expresión usando exponentes $5 \cdot 5 \cdot d \cdot d \cdot d \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$

Regla del producto para exponentes:

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

Simplifique las expresiones.

91. $h^6 h^4$

92. $t^3(t^5)$

93. $w^2 \cdot w \cdot w^4$

94. $4^7 \cdot 4^5$

Simplifique los productos.

95. $2b^2 \cdot 4b^5$

96. $-6x^3(4x)$

97. $-2f^2(-4f)(3f^4)$

98. $-ab \cdot b \cdot a$

99. $xy^4 \cdot xy^2$

100. $(mn)(mn)$

101. $3z^3 \cdot 9m^3z^4$

102. $-5cd(4c^2d^5)$

Regla de la potencia para exponentes:

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

Simplifique las expresiones.

103. $(v^3)^4$

104. $(3y)^3$

105. $(5t^4)^2$

106. $(2a^4b^5)^3$

Regla de la potencia de un producto:

$$(xy)^m = x^m y^m$$

Simplifique las expresiones.

107. $(c^4)^5(c^2)^3$

108. $(3s^2)^3(2s^3)^2$

109. $(c^4c^3)^2$

110. $(2xx^2)^3$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8

Resuelva las ecuaciones.

1. $10 = x + 6$

2. $y - 12 = 18$

3. $5t = 55$

4. $\frac{q}{3} = 27$

5. $500 + x = 700$

6. $100x = 2400$

7. ESTACIONAMIENTO Después de muchas quejas de los estudiantes una universidad decidió destinar fondos para duplicar el número de espacios de estacionamiento en un campus. Este incremento elevaría el número total de espacios a 6200. ¿Cuántos espacios tiene actualmente la universidad?

8. BIBLIOTECAS Un edificio de una biblioteca le faltan 6 años para los 200 años de su construcción. ¿Qué antigüedad tiene el edificio actualmente?

9. Evalúe $\frac{x - 16}{x}$ para $x = 4$.

10. DISTANCIA RECORRIDA Encuentre la distancia recorrida por un conductor que salió de su casa a las 9:00 A.M. y llegó a su destino al mediodía viajando a una velocidad de 55 millas por hora.

Simplifique quitando los paréntesis.

11. $5(5x + 1)$

12. $-6(7 - x)$

13. $-(6y + 4)$

14. $3(2a + 3b - 7)$

15. Determine si x se usa como factor o como término.

a. $5xy$ **b.** $8y + x + 6$

16. Simplifique asociando términos semejantes.

a. $-20y + 6x - 8y + 4x$

b. $-t - t - t$

17. Identifique los términos en $8x^2 - 4x - 6$.

18. Simplifique.

a. $7x + 4x$ **b.** $3c \cdot 4e \cdot 2$

c. $6x - x$ **d.** $-5y(-6)$

19. Simplifique: $4(y + 3) - 5(2y + 3)$.

Resuelva las ecuaciones.

20. $15a - 10 = 20$

21. $3x - 4 - 3 = 2x + 3x + 11$

22. $6r + 3 - 2r = -9$

23. $2(4x - 1) = 3(4 - 2x)$.

24. a. ¿Cuál es el valor (en centavos) de k décimos?

b. ¿Cuál es el valor de $p + 2$ billetes de 20 dólares?

25. Simplifique las expresiones.

a. h^2h^4 **b.** $-7x^3(4x^2)$

c. $b^2 \cdot b \cdot b^5$ **d.** $-3g^2k^3(-8g^3k^{10})$

26. Simplifique las expresiones.

a. $(f^3)^5$ **b.** $(2a^2b)^2$

c. $(x^2)^3(x^3)^3$ **d.** $(x^2x^3)^3$

27. Explique la diferencia entre una expresión y una ecuación.

28. Explique qué significa *resolver una ecuación*.

29. Muestre cómo comprobar que -7 es solución de $2x + 1 = -15$.

30. Explique qué está mal en la siguiente ecuación: $5^4 \cdot 5^3 = 25^7$.

CAPÍTULOS 1-8 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

Considere el número 7 535 670.

1. Redondéelo a la centena más cercana.

2. Redondéelo a la decena de millar más cercana.

Efectúe las operaciones.

3.
$$\begin{array}{r} 5679 \\ +3458 \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 7697 \\ -4375 \\ \hline \end{array}$$

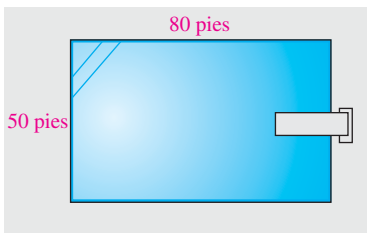
5.
$$\begin{array}{r} 5345 \\ \times \quad 46 \\ \hline \end{array}$$

6. $35\overline{)30\,625}$

Refiérase a la piscina rectangular de abajo.

7. Encuentre el perímetro de la piscina.

8. Encuentre el área de la superficie de la piscina.



Encuentre la factorización en números primos de cada número.

9. 168

10. 225

11. 180

12. 720

Evalúe las expresiones.

13. $8 + (-2)(-5)$

14. $(-2)^4 - 3^3$

15. $\dfrac{2(-7) + 3(2)}{2(-4)}$

16. $\dfrac{2(3^2 + 4^2)}{-2(3) + 1}$

Realice las operaciones.

17. $\dfrac{10}{21} \cdot \dfrac{3}{10}$

18. $\dfrac{22}{25} \div \dfrac{11}{5}$

19. $\dfrac{11}{12} + \dfrac{2}{3}$

20. $\dfrac{11}{12} - \dfrac{2}{3}$

Evalúe las expresiones para $x = 4$.

21. $2x - 1$

22. $\dfrac{9x}{2} - x$

23. $3x - x^3$

24. $x + 2(x - 7)$

Simplifique las expresiones.

25. $-3(5x)$

26. $-4x(-7x)$

27. $-2(3x - 4)$

28. $-5(3x - 2y + 4)$

Reduzca los términos semejantes.

29. $-3x + 8x$

30. $4a^2 - (-3a^2)$

31. $4x - 3y - 5x + 2y$

32. $-2(3x - 4) + 2x$

Resuelva las ecuaciones y compruebe la respuesta.

33. $3x + 2 = -13$

34. $-5z - 7 = 18$

35. $\frac{y}{4} - 1 = -5$

36. $\frac{n}{5} + 1 = -11$

37. $6x - 12 = 2x + 4$

38. $3(2y - 8) = -2(y - 4)$

39. HORAS DE OBSERVACIÓN Para obtener un grado de maestría en aprendizaje de discapacidades un estudiante debe hacer 100 horas de observación. Si el estudiante ya ha hecho observaciones por 37 horas, ¿cuántos turnos de 3 horas más debe hacer?

40. GEOMETRÍA Un rectángulo tiene 84 pies de largo. Si su perímetro es 210 pies, encuentre sus dimensiones.

Simplifique los productos.

41. p^3p^5

42. $-3t^2 \cdot 5t^7$

43. $(-x^2y^3)(x^3y^4)$

44. $(3a^2)^4$

45. $(-n^2)^3$

46. $(3x^3y)^2$

47. $(2p^3)^2(3p^2)^3$

48. $(-x^2)^3(2x)^3$

CAPÍTULO 9

Introducción a la geometría

9.1 Definiciones básicas

9.2 Rectas paralelas y perpendiculares

9.3 Polígonos

9.4 Propiedades de los triángulos

9.5 Perímetros y áreas de polígonos

9.6 Círculos

9.7 Área superficial y volumen

Concepto clave: fórmulas

Énfasis en el trabajo en equipo

Repaso del capítulo

Examen del capítulo

Ejercicios acumulativos de repaso

Getty Images

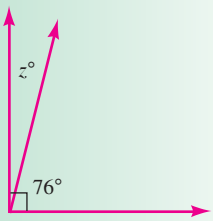
Mucha gente disfruta abordar proyectos de remodelación y reparación en sus hogares, todas estas actividades son del tipo hágalo usted mismo. Estos proyectos se hacen más rápido y son más eficientes con los recursos si se hace una planificación cuidadosa con anticipación. Esta planeación a menudo requiere el uso de las matemáticas, y en particular, de la geometría. Por ejemplo, para comprar la cantidad correcta de materiales para cercar un patio usted necesita calcular el *perímetro*. Si va a pintar una recámara usted necesita calcular el *área* total de la superficie de las paredes para determinar el número de galones a comprar.

Verifique sus conocimientos

1. Las rectas _____ no se intersectan. Si dos rectas se intersectan y forman ángulos rectos son _____.
2. Un polígono con cuatro lados se llama _____. Un _____ es un polígono con tres lados.
3. Un triángulo que tenga un ángulo de 90º se llama triángulo _____. El lado más grande de dicho triángulo se llama _____.
4. Los triángulos que son del mismo tamaño y de la misma forma se llaman triángulos _____. Si dos triángulos tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño se llaman triángulos _____.
5. La distancia alrededor de un polígono se llama _____. La medida de la superficie encerrada por un polígono se llama su _____.
6. Un segmento dibujado desde el centro de un círculo hasta un punto en el círculo se llama _____. A la distancia alrededor del círculo se le llama su _____. Un _____ es una cuerda que pasa por el centro de un círculo.
7. Al espacio contenido dentro de un sólido geométrico se llama su _____.
8. Relacione las descripciones con los ángulos.

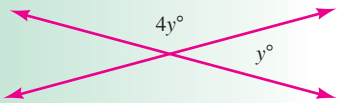
a. 37°	____	I.	ángulo recto
b. 90°	____	II.	ángulo llano
c. 125°	____	III.	ángulo agudo
d. 180°	____	IV.	ángulo obtuso

9. En la notación $\angle ABC$, ¿qué punto es el vértice del ángulo?
10. Refiérase a la ilustración de la izquierda. Encuentre z.



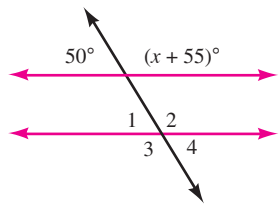
PROBLEMA 10

11. Refiérase a la ilustración de la izquierda. Encuentre y.



PROBLEMA 11

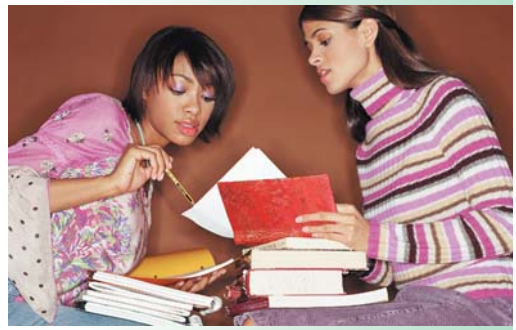
12. Encuentre el suplemento de un ángulo que mide 119°.
13. Refiérase a la ilustración en la cual las rectas horizontales son paralelas.



a. Encuentre m($\angle 1$). **b.** Encuentre m($\angle 2$).
c. Encuentre m($\angle 3$). **d.** Encuentre m($\angle 4$).
e. Encuentre x.

14. Si la medida de un ángulo de un triángulo es 45º y la medida de otro es 55º, ¿cuál es la medida del tercer ángulo?
15. Un rectángulo es de 12 pies de largo y 5 pies de ancho.
    a. Encuentre la longitud de la diagonal del rectángulo.
    b. Encuentre el área del rectángulo.
16. Encuentre el área de un triángulo con base de 4.5 pulgadas y altura de 7.8 pulgadas.
17. Encuentre el área de un círculo si el diámetro es de 10 pies.
18. Encuentre el volumen de una esfera que tiene 4 pies de diámetro.
19. Encuentre el volumen de un sólido rectangular con largo de 5 pies, ancho de 4 pies y alto de 10 pies.
20. Encuentre el volumen de un cilindro de 8 pies de diámetro y 10 pies de alto.

Taller de habilidades para el estudio



PREPARACIÓN PARA SU SIGUIENTE CLASE DE MATEMÁTICAS

De acuerdo con el Dr. Benjamin Bloom, el 50% de su aprovechamiento global en su siguiente clase de matemáticas se basa en el conocimiento matemático que tenga antes de esa clase. [Bloom, *Human Characteristics and School Learning* (Nueva York: McGraw-Hill, 1976)]. De tal forma, si quiere tener éxito en su siguiente clase de matemáticas es buena idea prepararse desde antes. Qué tanto tenga que hacer depende de cuánto tiempo ha pasado entre sus cursos de matemáticas, qué tan bien recuerde el material y qué tan bien le fue en su curso de matemáticas previo. Es siempre buena idea tomar su siguiente curso de matemáticas tan pronto como esta clase haya terminado. La excepción a esto es que no debiera tomar un curso intensivo de matemáticas (como los cursos semestrales de muchas universidades) a menos que se sienta muy confiado en sus habilidades matemáticas. Es una buena idea conservar su libro de texto de esta clase hasta que termine su siguiente clase; resístase a la urgencia de recuperar un par de dólares vendiendo su libro en librerías de usado en su campus. El libro de texto que usó este periodo de estudio es un buen recurso entre periodos y a través de su siguiente curso.

He aquí algunas actividades que puede realizar para prepararse para su siguiente clase:

- *Repase los exámenes anteriores.* Trate de trabajar los problemas de exámenes anteriores sin mirar las respuestas. Si se atasca puede verlas –pero entonces repita el problema hasta que pueda hacerlo sin mirar la solución.
- *Repase los exámenes de capítulo de su libro de texto anterior.* Intente hacer los exámenes que aparecen al final de cada capítulo en su libro de texto de este curso. Verifique sus respuestas y repase el libro para ayudarse a corregir los problemas que haya hecho incorrectamente.
- *Trate de conseguir su nuevo texto antes de que la clase empiece.* Si tiene tiempo, el leer por adelantado su nuevo texto es una buena forma de empezar bien su nueva clase.
- *Considere conseguir un asesor.* Si no le fue tan bien como le hubiera gustado en esta clase considere pagar a un tutor en el tiempo entre periodos para aprender algunos de los conceptos que se le fueron en este curso.

Geometría proviene de las palabras griegas geo *(que significa tierra) y* metron *(que significa medida).*

9.1 Definiciones básicas

- Puntos, rectas y planos
- Ángulos
- Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice
- Ángulos complementarios y suplementarios

En este capítulo estudiamos figuras geométricas bidimensionales como rectángulos y círculos. En la vida diaria a menudo se necesita encontrar el perímetro o el área de una de estas figuras. Por ejemplo, para encontrar la cantidad de cerca que se necesita para encerrar un jardín circular debemos encontrar el perímetro de un círculo (llamado su *circunferencia*). Para encontrar la cantidad de pintura necesaria para pintar un cuarto debemos encontrar el área de sus cuatro paredes rectangulares.

También estudiamos figuras tridimensionales como cilindros y esferas. Para hallar la cantidad de espacio encerrado dentro de estas figuras debemos encontrar sus volúmenes.

Puntos, rectas y planos

La geometría se basa en tres palabras no definidas: **punto**, **recta** y **plano**. Aunque no haremos ningún intento de definir estas palabras formalmente podemos pensar que un punto es una figura geométrica que tiene posición pero no longitud, ancho o profundidad. Los puntos siempre se etiquetan con letras mayúsculas. El punto A se muestra en la figura 9.1(a).

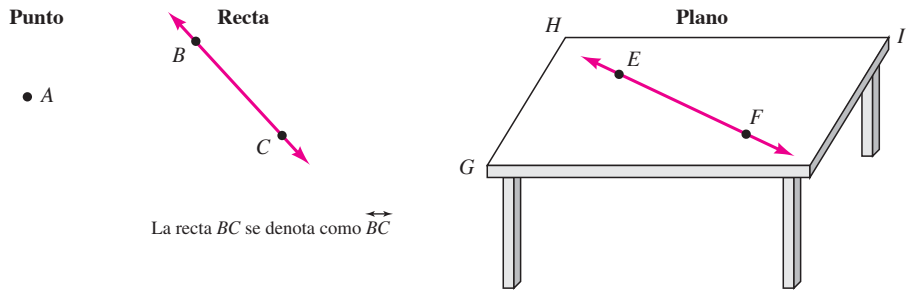


FIGURA 9.1

Una recta tiene longitud infinita pero no tiene ancho ni profundidad. La figura 9.1(b) muestra la recta BC, que pasa por los puntos B y C. Un plano es una superficie llana, como una mesa, que tiene longitud y ancho pero no profundidad. En la figura 9.1(c) la recta EF yace en el plano GHI.

Como ilustra la figura 9.1(b), los puntos B y C determinan exactamente una recta, la recta BC. En la figura 9.1(c) los puntos E y F determinan exactamente una recta, la recta EF. En general, cualquier par de puntos determinan exactamente una recta.

Otras figuras geométricas se pueden crear usando partes o combinaciones de puntos, rectas y planos.

Segmento de recta

El **segmento de recta** AB, denotado como $\overline{AB}$, es la parte de la recta que consiste de los puntos A y B y todos los puntos intermedios. (Véase la figura 9.2 en la página siguiente.) Los puntos A y B se llaman los **puntos extremos** del segmento.

El segmento de recta AB se denota como $\overline{AB}$

FIGURA 9.2

Todo segmento de recta tiene un **punto medio**, que divide al segmento en dos partes de igual longitud. En la figura 9.3, M es el punto medio del segmento AB, porque la medida de $\overline{AM}$, denotada como $\text{m}(\overline{AM})$, es igual que la medida de $\overline{MB}$, denotada como $\text{m}(\overline{MB})$.

$$\text{m}(\overline{AM}) = 4 - 1$$
$$= 3$$

y

$$\text{m}(\overline{MB}) = 7 - 4$$
$$= 3$$

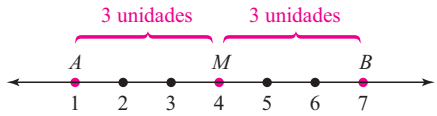


FIGURA 9.3

Como la medida de ambos segmentos es 3 unidades, $\text{m}(\overline{AM}) = \text{m}(\overline{MB})$.

Cuando dos segmentos de recta tienen la misma medida decimos que son **congruentes.** Como $\text{m}(\overline{AM}) = \text{m}(\overline{MB})$, podemos escribir

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$ $\cong$ se lee como "es congruente con".

Otra figura geométrica es el *rayo,* como se muestra en la figura 9.4.

Rayo

Un **rayo** es la parte de una recta que empieza en algún punto (digamos, A) y continúa para siempre en una dirección. El punto A se llama **punto extremo** del rayo.

El rayo AB se denota como $\overrightarrow{AB}$. El punto extremo del rayo siempre se escribe primero.

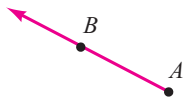


FIGURA 9.4

Ángulos

Ángulo

Un **ángulo** es una figura formada por dos rayos con punto extremo común. El punto extremo común se llama **vértice** y los rayos se llaman **lados**.

El ángulo de la figura 9.5 se puede denotar como

$\angle BAC$, $\angle CAB$, $\angle A$, o $\angle 1$ El símbolo $\angle$ significa ángulo.

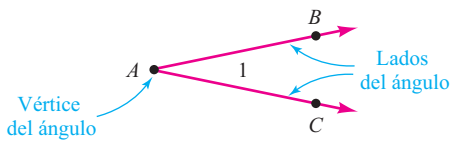


FIGURA 9.5

COMENTARIO Cuando se usan tres letras para denotar un ángulo asegúrese de que la letra de en medio sea el vértice.

Una unidad de medida de un ángulo es el **grado**. Es $\frac{1}{360}$ de una vuelta completa. Podemos usar un **transportador** para medir los ángulos en grados. (Véase la figura 9.6.)

Ángulo	Medida en grados
$\angle ABC$	30°
$\angle ABD$	60°
$\angle ABE$	110°
$\angle ABF$	150°
$\angle ABG$	180°

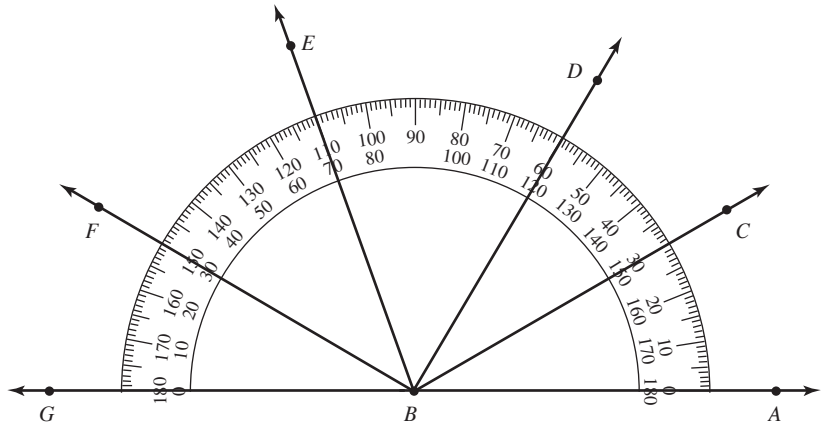


FIGURA 9.6

Si leemos el transportador de izquierda a derecha podemos ver que la medida de $\angle GBF$ (denotada como $\text{m}(\angle GBF)$) es 30°.

Cuando dos ángulos tienen la misma medida decimos que son congruentes. Como $\text{m}(\angle ABC) = 30°$ y $\text{m}(\angle GBF) = 30°$, podemos escribir

$$\angle ABC \cong \angle GBF$$

Clasificamos los ángulos de acuerdo con su medida como en la figura 9.7.

Clasificación de ángulos

Ángulo agudo: Ángulo cuya medida es mayor que 0º pero menor que 90º.

Ángulo recto: Ángulo cuya medida es 90º.

Ángulo obtuso: Ángulo cuya medida es mayor que 90º y menor que 180º.

Ángulo llano: Ángulo cuya medida es 180º.

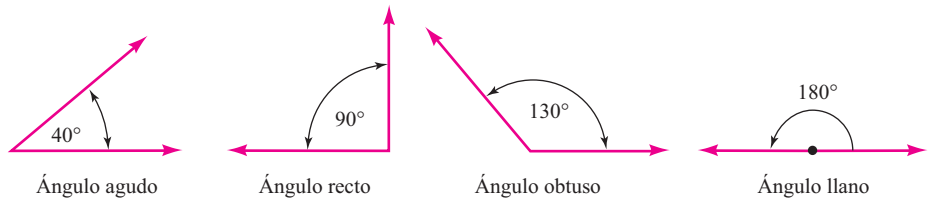


FIGURA 9.7

EJEMPLO 1 Clasifique los ángulos de la figura 9.8 como ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso o ángulo llano.

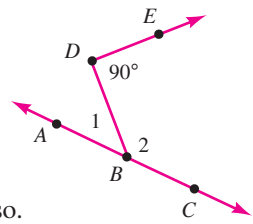


FIGURA 9.8

Solución

Como m($\angle 1$) $< 90°$, es un ángulo agudo.

Como m($\angle 2$) $> 90°$, pero menor que 180º, es un ángulo obtuso.

Como m($\angle BDE$) $= 90°$, es un ángulo recto.

Como m($\angle ABC$) $= 180°$, es un ángulo llano.

Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice

Dos ángulos que tienen un vértice en común y tienen un lado común se llaman **ángulos adyacentes**.

EJEMPLO 2 Dos ángulos con medidas de $x°$ y $35°$ son adyacentes. Use la información de la figura 9.9 para encontrar x.

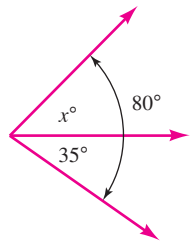


FIGURA 9.9

Solución Podemos usar álgebra para resolver este problema. Como la suma de las medidas de los ángulos es 80°, tenemos

$$x + 35 = 80$$

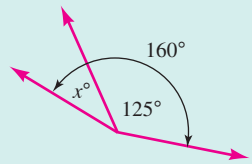
$$x + 35 \mathbf{\ - 35} = 80 \mathbf{\ - 35}$$ Para deshacer la suma de 35 reste 35 de ambos lados.

$$x = 45$$ Haga las restas: $35 - 35 = 0$ y $80 - 35 = 45$.

Por tanto, x es 45.

Autoevaluación 2

Para la figura de abajo encuentre x.



Respuesta 35

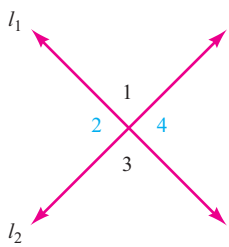
Cuando dos rectas se intersectan los pares de ángulos que no son adyacentes se llaman **ángulos opuestos** por el vértice. En la figura 9.10(a) las rectas l_1 (léase como "recta l sub 1") y l_2 (léase como "recta l sub 2") se intersectan. Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son opuestos por el vértice así como los ángulos $\angle 2$ y $\angle 4$.

Para ilustrar que los ángulos opuestos por el vértice siempre tienen la misma medida, hacemos referencia a la figura 9.10(b) con ángulos que miden $x°$, $y°$ y $30°$. Como la medida de cualquier ángulo llano es 180º tenemos

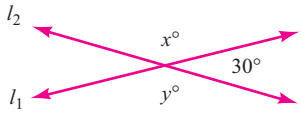
$$\mathbf{30} + x = 180 \quad \text{y} \quad \mathbf{30} + y = 180$$

$$x = 150 \qquad\qquad y = 150$$ Para deshacer la suma, reste 30 de ambos lados.

Como x y y son ambos 150, $x = y$.



(a)



(b)

Note que los ángulos que tienen medidas $x°$ y $y°$ son ángulos opuestos por el vértice.

FIGURA 9.10

Propiedad de los ángulos opuestos por el vértice

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (tienen la misma medida).

Autoevaluación 3

En la figura 9.11 encuentre:

a. m(∠2)

b. m(∠4)

Respuestas **a.** 100°, **b.** 30°

EJEMPLO 3

En la figura 9.11 halle: **a.** m(∠1) y **b.** m(∠3).

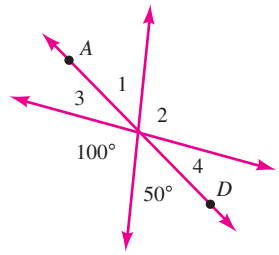


FIGURA 9.11

Solución

a. El ángulo de 50º y ∠1 son opuestos por el vértice. Como los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, m(∠1) = 50°.

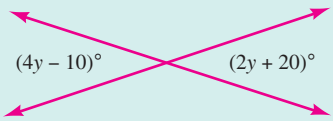
b. Como AD es una recta la suma de las medidas de ∠3, el ángulo de 100º y el ángulo de 50º es 180º. Si m(∠3) = x, tenemos

$$x + 100 + 50 = 180$$
$$x + 150 = 180 \quad \text{Haga la suma: } 100 + 50 = 150.$$
$$x = 30 \quad \text{Reste 150 de ambos lados.}$$

Por tanto, m(∠3) = 30°.

Autoevaluación 4

En la figura de abajo encuentre y.



Respuesta 15

EJEMPLO 4

En la figura 9.12 encuentre x.

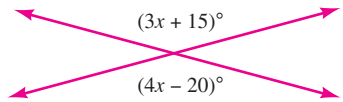


FIGURA 9.12

Solución Como los ángulos son opuestos por el vértice tienen medidas iguales.

$$4x - 20 = 3x + 15$$
$$x - 20 = 15 \quad \text{Para eliminar } 3x \text{ del lado derecho reste } 3x \text{ de ambos lados.}$$
$$x = 35 \quad \text{Para deshacer la resta de 20 sume 20 de ambos lados.}$$

Por tanto, x es 35.

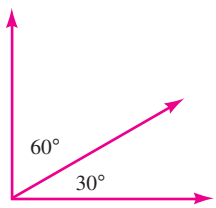
Ángulos complementarios y suplementarios

Ángulos complementarios y suplementarios

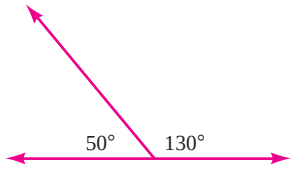
Dos **ángulos** son **complementarios** cuando la suma de sus medidas sea 90º.

Dos **ángulos** son **suplementarios** cuando la suma de sus medidas sea 180º.

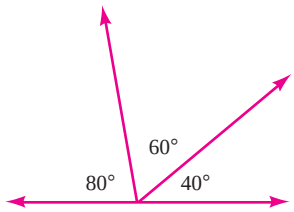
Ángulos con medidas de 60º y 30º son ejemplos de ángulos complementarios porque la suma de sus medidas es 90º. Cada ángulo es complemento del otro.



Ángulos de 130º y 50º son suplementarios porque la suma de sus medidas es 180º. Cada ángulo es suplemento del otro.



COMENTARIO La definición de ángulos suplementarios requiere que la suma de dos ángulos sea 180º. Tres ángulos de 40º, 60º y 80º no son suplementarios aunque su suma sea 180º.



EJEMPLO 5

a. Encuentre el complemento de un ángulo de 35°.

b. Encuentre el suplemento de un ángulo de 105°.

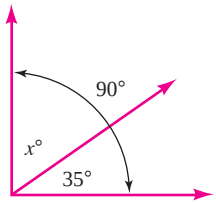


FIGURA 9.13

Solución

a. Vea la figura 9.13. Sea x el complemento del ángulo de 35º. Como los ángulos son complementarios, tenemos

$x + 35 = 90$ La suma de las medidas de los ángulos debe ser 90º.

$x = 55$ Para deshacer la suma de 35 reste 35 de ambos lados.

El complemento de 35º es 55º.

b. Vea la figura 9.14. Sea y el suplemento del ángulo de 105º. Como los ángulos son suplementarios, tenemos

$y + 105 = 180$ La suma de las medidas de los ángulos debe ser 180º.

$y = 75$ Para deshacer la suma de 105 reste 105 de ambos lados.

El suplemento de 105º es 75º.

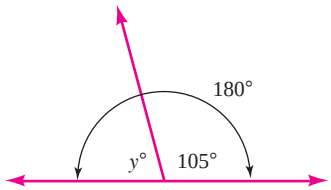


FIGURA 9.14

Autoevaluación 5

a. Encuentre el complemento de un ángulo de 50º.

b. Encuentre el suplemento de un ángulo de 50º.

Respuestas **a.** 40°, **b.** 130°

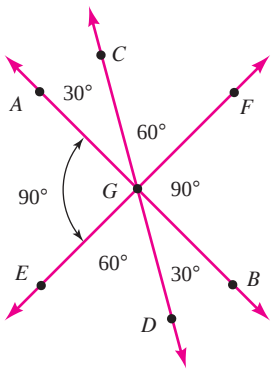
Sección 9.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Un _____ de recta tiene dos puntos extremos.
2. Dos puntos _____ a lo más una recta.
3. Un _____ divide a un segmento de recta en dos partes de igual longitud.
4. Un ángulo se mide en _____.
5. Para medir los ángulos se usa un _____.
6. Un ángulo _____ mide menos de 90º.
7. Un ángulo _____ mide 90º.
8. Un ángulo _____ es mayor de 90º pero menor de 180º.
9. La medida de un ángulo recto es _____.
10. Los ángulos adyacentes tienen el mismo vértice y tienen _____.
11. La suma de dos ángulos _____ es 180º.
12. La suma de dos ángulos complementarios es _____.

CONCEPTOS

Refiérase a la ilustración y determine si cada enunciado es verdadero. Si un enunciado es falso explique por qué.



13. $\overrightarrow{GF}$ tiene el punto G como punto extremo.

14. $\overline{AG}$ no tiene puntos extremos.

15. La recta CD tiene tres puntos extremos.

16. El punto D es el vértice de $\angle DGB$.

17. $\text{m}(\angle AGC) = \text{m}(\angle BGD)$

18. $\angle AGF \cong \angle BGE$

19. $\angle FGB \cong \angle EGA$

20. $\angle AGC$ y $\angle CGF$ son ángulos adyacentes.

Refiérase a la ilustración de arriba y determine si cada ángulo es agudo, recto, obtuso o llano.

21. $\angle AGC$

22. $\angle EGA$

23. $\angle FGD$

24. $\angle BGA$

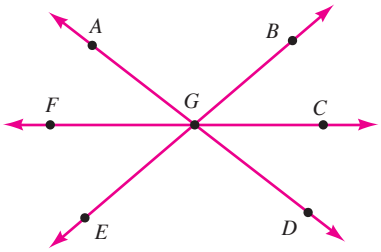
25. $\angle BGE$

26. $\angle AGD$

27. $\angle DGC$

28. $\angle DGB$

Refiérase a la ilustración de abajo para determinar si cada par de ángulos son congruentes.



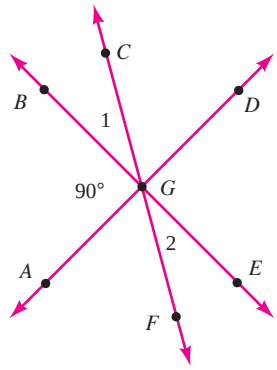
29. $\angle AGF$ y $\angle DGC$ son opuestos por el vértice.

30. $\angle FGE$ y $\angle BGA$ son opuestos por el vértice.

31. $\text{m}(\angle AGB) = \text{m}(\angle BGC)$

32. $\angle AGC \cong \angle DGF$

Refiérase a la ilustración de abajo para determinar si cada par de ángulos son congruentes.



33. $\angle 1$ y $\angle 2$

34. $\angle FGB$ y $\angle CGE$

35. $\angle AGB$ y $\angle DGE$

36. $\angle CGD$ y $\angle CGB$

37. $\angle AGF$ y $\angle FGE$

38. $\angle AGB$ y $\angle BGD$

Refiérase a la ilustración de arriba y determine si los enunciados son verdaderos.

39. $\angle 1$ y $\angle CGD$ son adyacentes.

40. $\angle 2$ y $\angle 1$ son adyacentes.

41. $\angle FGA$ y $\angle AGC$ son suplementarios.

42. $\angle AGB$ y $\angle BGC$ son complementarios.

43. $\angle AGF$ y $\angle 2$ son complementarios.

44. $\angle AGB$ y $\angle EGD$ son suplementarios.

45. $\angle EGD$ y $\angle DGB$ son suplementarios.

46. $\angle DGC$ y $\angle AGF$ son complementarios.

NOTACIÓN

Llene los espacios.

47. El símbolo $\angle$ significa _____.

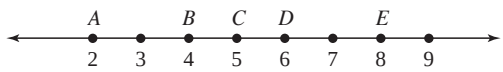
48. El símbolo $\overline{AB}$ se lee como "_____ AB."

49. El símbolo $\overrightarrow{AB}$ se lee como "_____ AB."

50. El símbolo ____ se lee como "es congruente con".

PRÁCTICA

Refiérase a la ilustración de abajo y encuentre la longitud de cada segmento.



51. $\overline{AC}$

52. $\overline{BE}$

53. $\overline{CE}$

54. $\overline{BD}$

55. $\overline{CD}$

56. $\overline{DE}$

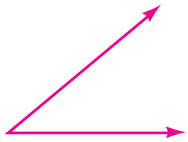
Refiérase a la ilustración de arriba y encuentre los puntos medios.

57. Encuentre el punto medio de $\overline{AD}$.

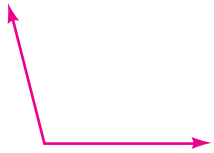
58. Encuentre el punto medio de $\overline{BE}$.

Use un transportador para medir los ángulos.

59.

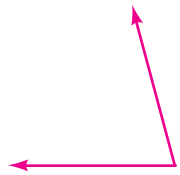


60.



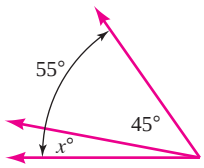
61.

62.

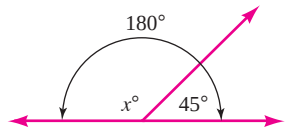


Encuentre x.

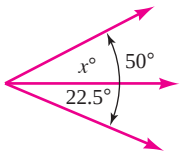
63.



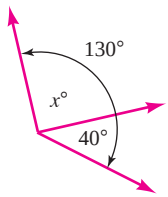
64.



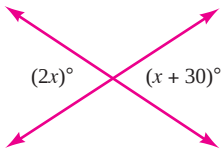
65.



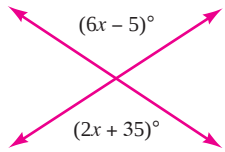
66.



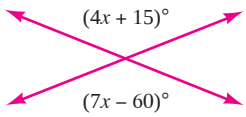
67.



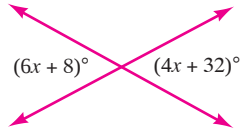
68.



69.



70.



Haga que x represente la medida desconocida del ángulo. Dibuje un diagrama, escriba una ecuación apropiada y resuélvala para x.

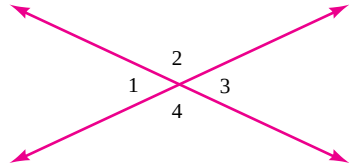
71. Encuentre el complemento de un ángulo de 30º.

72. Encuentre el suplemento de un ángulo de 30º.

73. Encuentre el suplemento de un ángulo de 105º.

74. Encuentre el complemento de un ángulo de 75º.

Refiérase a la ilustración de abajo en la cual m(∠1) = 50°. *Encuentre la medida de los ángulos o de la suma de ángulos.*

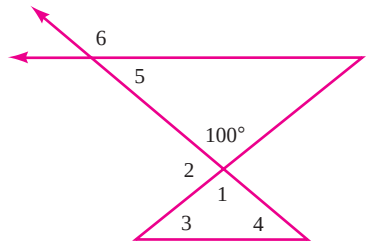


75. ∠4 **76.** ∠3

77. m(∠1) + m(∠2) + m(∠3)

78. m(∠2) + m(∠4)

Refiérase a la ilustración de abajo en la cual m(∠1) + m(∠3) + m(∠4) = 180°, ∠3 ≅ ∠4 *y* ∠4 ≅ ∠5. *Encuentre la medida de cada ángulo.*



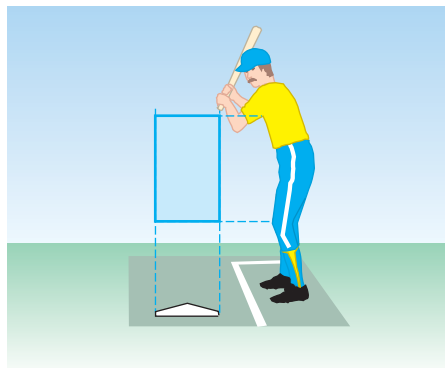
79. ∠1 **80.** ∠2

81. ∠3 **82.** ∠6

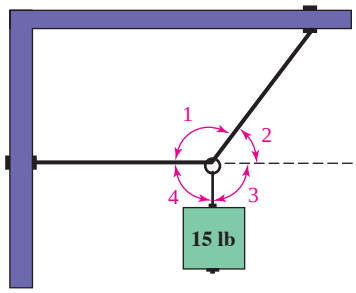
APLICACIONES

83. BÉISBOL Use la definición siguiente para dibujar la zona de strike para el jugador que se muestra.

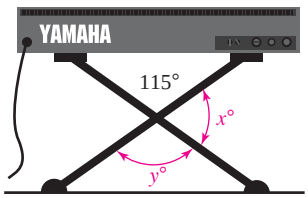
La zona de strike es el área sobre la almohadilla de home, cuyo nivel superior es una recta horizontal a la altura del punto medio entre los hombros y la parte alta de los pantalones del uniforme, y el nivel inferior es una recta a la altura del hueco bajo la rótula.



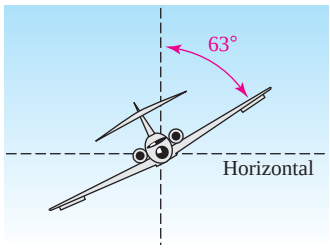
84. FÍSICA La ilustración muestra un bloque de 15 libras que está suspendido con dos cuerdas una de las cuales es horizontal. Clasifique cada ángulo numerado en la ilustración como agudo, obtuso o recto.



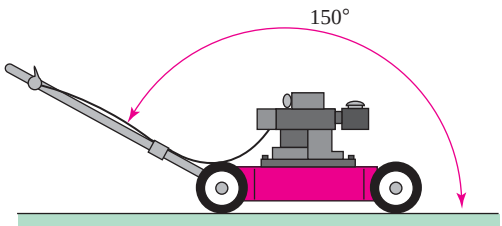
85. SINTETIZADORES Refiérase a la ilustración. Encuentre x y y.

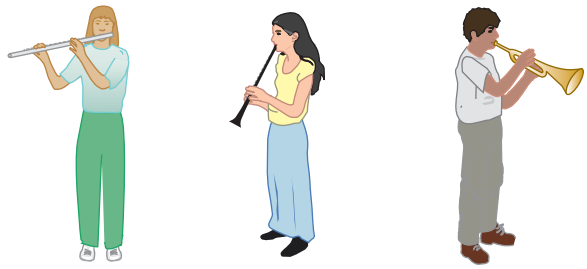


86. AVIACIÓN ¿A cuántos grados de la posición horizontal están las alas del aeroplano?



87. JARDINERÍA ¿Qué ángulo forma la agarradera de la podadora de césped con el suelo?



88. INSTRUMENTOS MUSICALES Suponga que usted es un maestro de banda principiante que describe la postura correcta necesaria para tocar varios instrumentos. Use los diagramas siguientes para aproximar la medida del ángulo con la que se debe sostener cada instrumento en relación con el cuerpo del estudiante: **a.** Flauta, **b.** Clarinete, **c.** Trompeta

a. **b.** **c.**

POR ESCRITO

89. FRASES Explique lo que piense que significan estas frases. ¿Cómo está involucrada la geometría?

a. El presidente hizo un giro completo de 180º en el tema de las reducciones de impuestos.

b. La patinadora hizo "360" cuando saltó de la rampa.

90. En los enunciados de abajo el símbolo ° se usa de dos formas diferentes. Explique la diferencia.

$$85^\circ \text{ F} \qquad \text{y} \qquad m(\angle A) = 85^\circ$$

91. ¿Qué es un transportador?

92. Explique la diferencia entre un rayo y un segmento de recta.

93. Explique por qué un ángulo que mida 105º no puede tener complemento.

94. Explique por qué un ángulo que mida 210º no puede tener suplemento.

REPASO

95. Encuentre: 2^4.

96. Sume: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

97. Reste: $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}$.

98. Multiplique: $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{6}{5}$.

99. Divida: $\frac{12}{17} \div \frac{4}{34}$.

100. ¿Cuánto es 7% de 7?

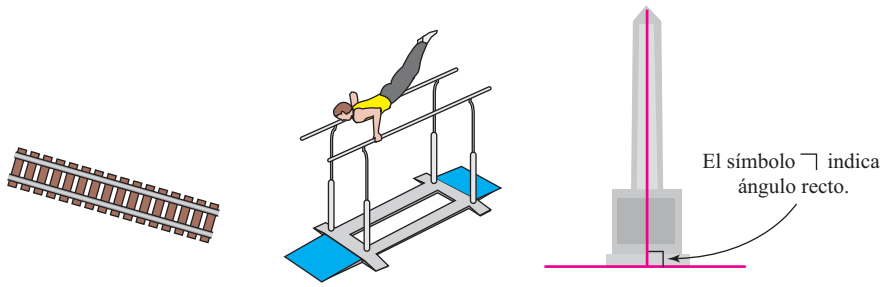
101. Resuelva la proporción: $\frac{x}{18} = \frac{12.5}{45}$.

102. Convierta 120 yardas a pies.

9.2 Rectas paralelas y perpendiculares

- Rectas paralelas y perpendiculares
- Transversales y ángulos
- Propiedades de las rectas paralelas

En esta sección consideramos las rectas *paralelas* y *perpendiculares*. Como las rectas paralelas siempre están a la misma distancia, las vías de ferrocarril que se muestran en la figura 9.15(a) ilustran una aplicación de las rectas paralelas. La figura 9.15(b) muestra uno de los eventos de gimnasia varonil, las barras paralelas. Como las rectas perpendiculares se cortan y forman ángulos rectos, el monumento y el suelo en la figura 9.15(c) ilustran una aplicación de las rectas perpendiculares.

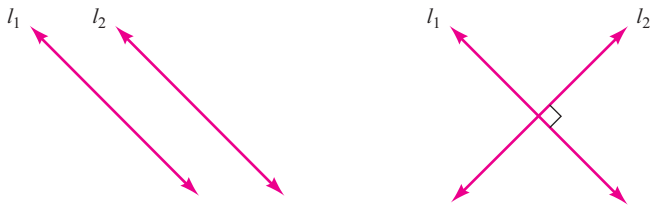


(a) (b) (c)

FIGURA 9.15

Rectas paralelas y perpendiculares

Si dos líneas están en el mismo plano se llaman **coplanarias**. Dos rectas coplanarias que no se intersectan se llaman **paralelas**. Vea la figura 9-16(a).



Rectas paralelas Rectas perpendiculares

(a) (b)

FIGURA 9.16

Rectas paralelas

Se llaman **rectas paralelas** a las rectas coplanarias que no se intersectan.

Si las rectas l_1 (léase como "l sub 1") y l_2 (léase como "l sub 2") son paralelas podemos escribir $l_1 \parallel l_2$, donde el símbolo $\parallel$ se lee como "es paralela a".

Rectas perpendiculares

Se llaman **rectas perpendiculares** a las rectas que se intersectan y forman ángulos rectos.

En la figura 9.16(b), $l_1 \perp l_2$, donde el símbolo $\perp$ se lee como "es perpendicular a".

Transversales y ángulos

Una recta que intersecte a dos o más rectas coplanarias se llama **transversal**. Por ejemplo, la recta l_1 en la figura 9.17 es una transversal que intersecta a las rectas l_2, l_3 e l_4.

Cuando a dos rectas las corta una transversal, se forman los siguientes tipos de ángulos.

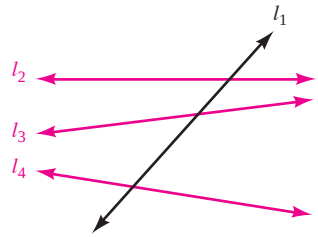
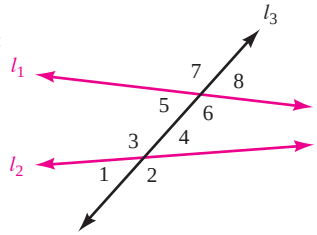


FIGURA 9.17

Ángulos alternos internos:

$\angle 4$ y $\angle 5$

$\angle 3$ y $\angle 6$



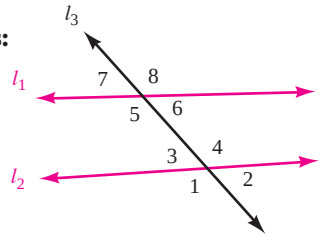
Ángulos correspondientes:

$\angle 1$ y $\angle 5$

$\angle 3$ y $\angle 7$

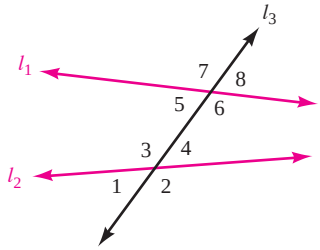
$\angle 2$ y $\angle 6$

$\angle 4$ y $\angle 8$



Ángulos interiores:

$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$



EJEMPLO 1 En la figura 9.18 identifique **a.** todos los pares de ángulos alternos internos, **b.** todos los pares de ángulos correspondientes y **c.** todos los ángulos interiores.

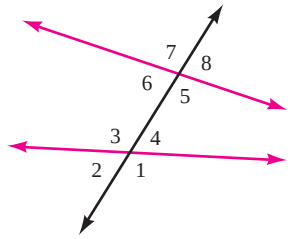


FIGURA 9.18

Solución

a. Los pares de ángulos alternos internos son:

$\angle 3$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 6$

b. Los pares de ángulos correspondientes son:

$\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 7$

c. Los ángulos interiores son:

$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$

Propiedades de las rectas paralelas

1. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes. (Vea la figura 9.19.) Si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\angle 2 \cong \angle 4$ y $\angle 1 \cong \angle 3$.
2. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes son congruentes. (Vea la figura 9.20.) Si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 3 \cong \angle 7$, $\angle 2 \cong \angle 6$ y $\angle 4 \cong \angle 8$.

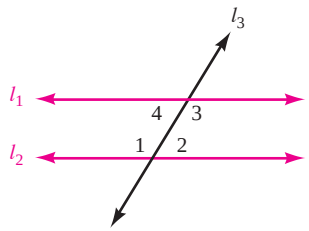


FIGURA 9.19

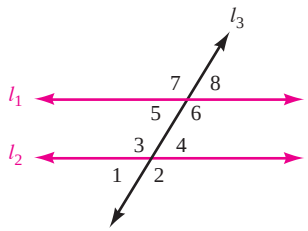


FIGURA 9.20

3. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios. (Vea la figura 9.21.) Si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\angle 1$ es suplementario a $\angle 2$ y $\angle 4$ es suplementario a $\angle 3$.
4. Si una transversal es perpendicular a una de dos rectas paralelas también es perpendicular a la otra recta. (Vea la figura 9.22.) Si $l_1 \parallel l_2$ y $l_3 \perp l_1$, entonces $l_3 \perp l_2$.

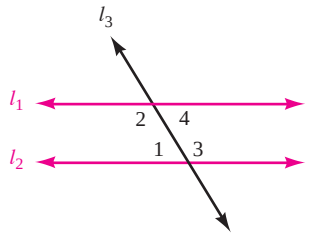


FIGURA 9.21

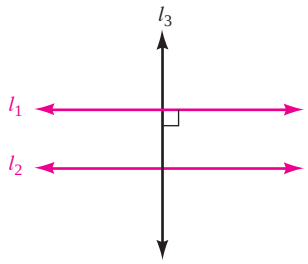


FIGURA 9.22

5. Si dos rectas son paralelas a una tercera, todas son paralelas entre sí. (Vea la figura 9.23) Si $l_1 \parallel l_2$ y $l_1 \parallel l_3$, entonces $l_2 \parallel l_3$.

FIGURA 9.23

EJEMPLO 2 Vea la figura 9.24. Si $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 3) = 120°$, encuentre las medidas de los otros ángulos.

Solución

$m(\angle 1) = 60°$ $\angle 3$ y $\angle 1$ son suplementarios.

$m(\angle 2) = 120°$ Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes: $m(\angle 2) = m(\angle 3)$.

$m(\angle 4) = 60°$ Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes: $m(\angle 4) = m(\angle 1)$.

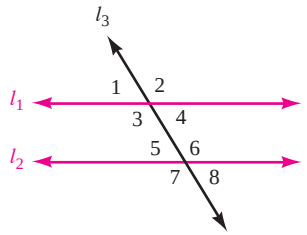


FIGURA 9.24

Autoevaluación 2
Si $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 8) = 50°$, encuentre las medidas de los otros ángulos. (Vea la figura 9.24.)

Respuestas $m(\angle 5) = 50°$, $m(\angle 7) = 130°$, $m(\angle 6) = 130°$, $m(\angle 3) = 130°$, $m(\angle 4) = 50°$, $m(\angle 1) = 50°$, $m(\angle 2) = 130°$

$m(\angle 5) = 60°$ Si a dos rectas paralelas las corta una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes $m(\angle 5) = m(\angle 4)$.

$m(\angle 6) = 120°$ Si a dos rectas paralelas las corta una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes: $m(\angle 6) = m(\angle 3)$.

$m(\angle 7) = 120°$ Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes: $m(\angle 7) = m(\angle 6)$.

$m(\angle 8) = 60°$ Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes: $m(\angle 8) = m(\angle 5)$.

EJEMPLO 3

Vea la figura 9.25. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, ¿qué pares de ángulos son congruentes?

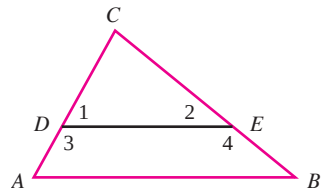


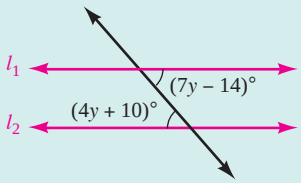
FIGURA 9.25

Solución Como $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, los ángulos correspondientes son congruentes. Así tenemos

$\angle A \cong \angle 1$ y $\angle B \cong \angle 2$

Autoevaluación 4

En la figura de abajo, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre y.



Respuesta 8

EJEMPLO 4

En la figura 9-26, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x.

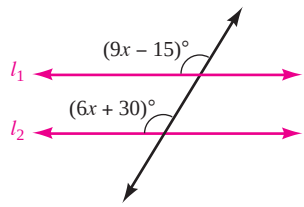


FIGURA 9.26

Solución Los ángulos que involucran a x son ángulos correspondientes. Como $l_1 \parallel l_2$, todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes.

$9x - 15 = 6x + 30$ Las medidas de los ángulos son iguales.

$3x - 15 = 30$ Reste $6x$ de ambos lados.

$3x = 45$ Para deshacer la resta de 15 sume 15 a ambos lados.

$x = 15$ Para deshacer la multiplicación por 3 divida ambos lados entre 3.

Por tanto, x es 15.

EJEMPLO 5

En la figura 9.27, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x.

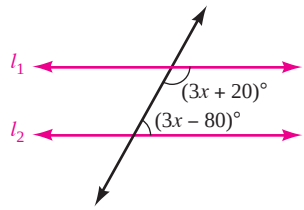


FIGURA 9.27

Solución Como los ángulos son internos en el mismo lado de la transversal, son suplementarios

$3x - 80 + 3x + 20 = 180$ La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es 180°.

$6x - 60 = 180$ Reduzca los términos semejantes.

$6x = 240$ Para deshacer la resta de 60 sume 60 a ambos lados.

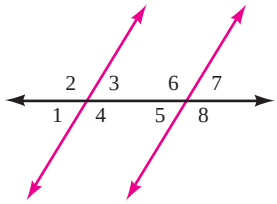
$x = 40$ Para deshacer la multiplicación por 6 divida ambos lados entre 6.

Por tanto, x es 40.

Sección 9.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

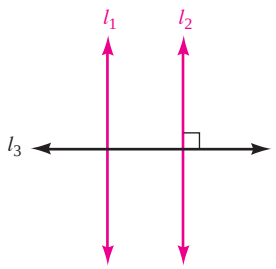
VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Dos rectas en el mismo plano son _____.
2. Las rectas _____ no se intersecan.
3. Si dos rectas se intersecan y forman ángulos rectos son _____.
4. Una _____ intersecta dos o más rectas coplanarias.
5. En la ilustración siguiente, $\angle 4$ y $\angle 6$ son ángulos _____.
6. En la ilustración siguiente, $\angle 2$ y $\angle 6$ son ángulos _____.

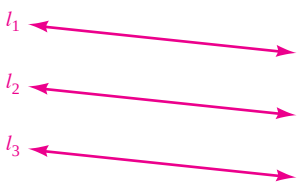


CONCEPTOS

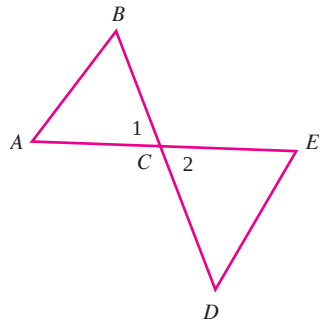
7. ¿Qué pares de la ilustración de arriba son ángulos alternos internos?
8. ¿Qué pares de la ilustración de arriba son ángulos correspondientes?
9. ¿Qué ángulos de los que se muestran en la ilustración de arriba son ángulos internos?
10. En la ilustración siguiente, $l_1 \parallel l_2$. qué puede concluir de l_1 y l_3?



11. En la ilustración, $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$. ¿Qué puede concluir de l_1 y l_3?



12. En la ilustración siguiente, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. ¿qué pares de ángulos son congruentes?

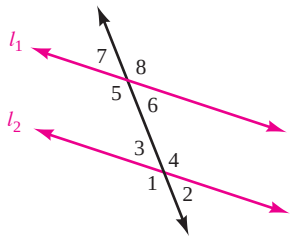


NOTACIÓN *Llene los espacios.*

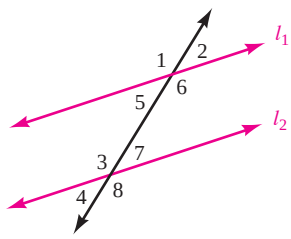
13. El símbolo ⌝ indica _____.
14. El símbolo $\parallel$ se lee como "_____."
15. El símbolo $\perp$ se lee como "_____."
16. El símbolo l_1 se lee como "_____."

PRÁCTICA

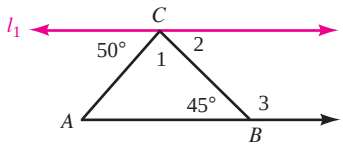
17. En la ilustración, $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 4) = 130°$. Encuentre las medidas de los otros ángulos.



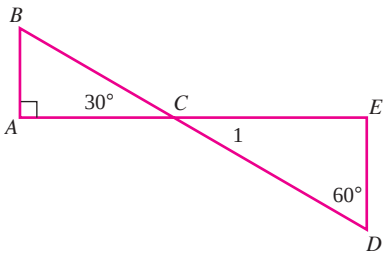
18. En la ilustración, $l_1 \parallel l_2$ y $m(\angle 2) = 40°$. Encuentre las medidas de los otros ángulos.



19. En la ilustración, $l_1 \parallel \overrightarrow{AB}$. Encuentre la medida de los ángulos.

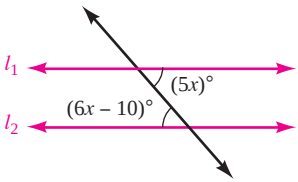


20. En la ilustración, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. Encuentre m($\angle B$), m($\angle E$) y m($\angle 1$).

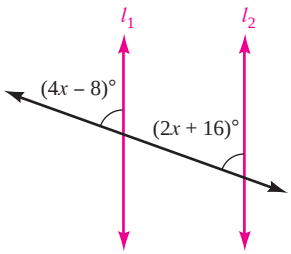


Encuentre x dado que $l_1 \parallel l_2$.

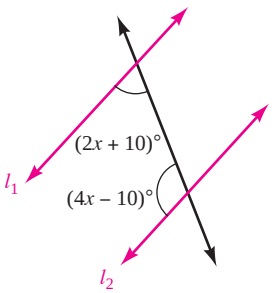
21.



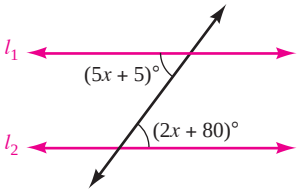
22.



23.

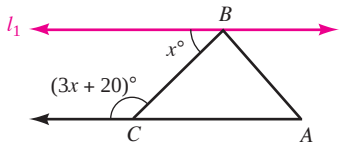


24.

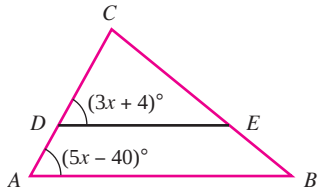


Encuentre x.

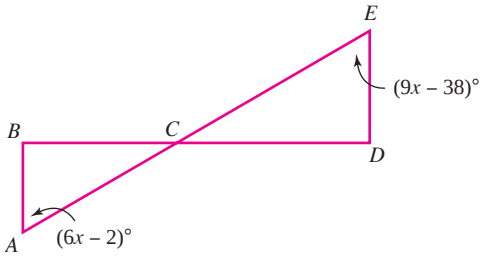
25. $l_1 \parallel \overrightarrow{AC}$



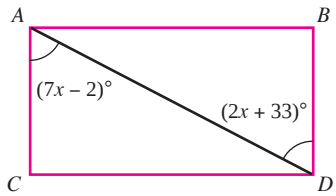
26. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



27. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

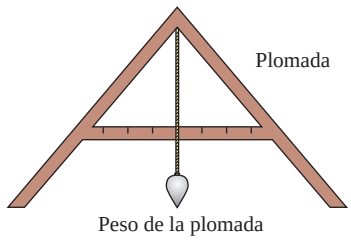


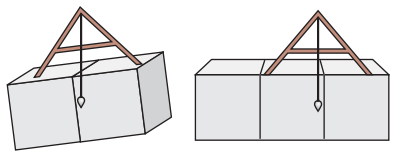
28. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$



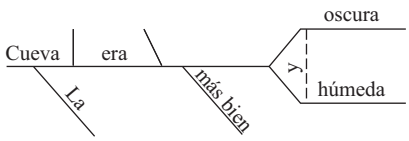
APLICACIONES

29. CONSTRUCCIÓN DE PIRÁMIDES Los egipcios usaban un aparato para determinar si las piedras estaban a nivel llamado **plomada**. Una plomada, que se muestra en la ilustración, está hecha de un marco en forma de A y un peso colgando del pico del marco. ¿Cómo podría un constructor usar una plomada para saber que la piedra a la izquierda no está a nivel y las de la derecha están niveladas?





30. DIAGRAMAS DE ORACIONES Los profesores de inglés hacen que sus estudiantes elaboren diagramas de oraciones para ayudarse a enseñarles la estructura apropiada de los enunciados. La ilustración es un diagrama de la oración *La cueva estaba más bien oscura y húmeda.* Destaque los pares de rectas paralelas y perpendiculares usadas en el diagrama.

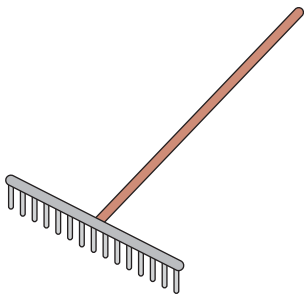


31. LOGO Señale todas las rectas perpendiculares que se puedan encontrar en el logo de la compañía BMW que se muestra abajo.

32. RÓTULOS Para muchos pintores de rótulos la letra más difícil de pintar es una E mayúscula por todos los ángulos rectos que tiene. ¿Cuántos ángulos rectos tiene?

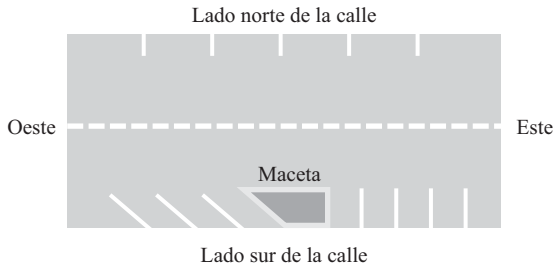
33. COLOCACIÓN DE PAPEL TAPIZ Explique por qué los conceptos de perpendicular y paralela son importantes cuando se coloca papel tapiz.

34. HERRAMIENTAS ¿Qué conceptos geométricos se pueden ver en el diseño de un rastrillo?



POR ESCRITO

35. DISEÑO DE ESTACIONAMIENTOS Usando términos de este capítulo escriba un párrafo que describa el diseño mostrado abajo.



36. Explique en sus propias palabras lo que significan las oraciones siguientes.

a. A los excursionistas se les dijo que la vereda iba *paralela* al río.

b. El rápido ascenso a la fama y la fortuna de John iba *paralelo* al de su hermano mayor.

c. El juez estableció que el caso en su corte no tenía *paralelo.*

37. ¿Por qué cree que $\angle 4$ y $\angle 6$ que se muestran en la ilustración del problema 5 se llaman ángulos alternos internos?

38. ¿Por qué cree que $\angle 4$ y $\angle 8$ que se muestran en la ilustración del problema 5 se llaman ángulos correspondientes?

39. ¿Son siempre congruentes los pares de ángulos alternos internos? Explique.

40. ¿Son siempre suplementarios los pares de ángulos internos? Explique.

REPASO

41. Encuentre el 60% de 120.

42. 400 es el 80% ¿de qué número?

43. ¿Qué porcentaje de 500 es 225?

44. Simplifique: $3.45 + 7.37 \cdot 2.98$.

45. ¿Es todo número natural también entero?

46. Multiplique: $2\frac{1}{5} \cdot 4\frac{3}{7}$.

47. Exprese la frase como una razón en su mínima expresión: 4 onzas a 12 onzas.

48. Convierta 5400 miligramos a kilogramos.

9.3 Polígonos

- Polígonos • Triángulos • Propiedades de los triángulos isósceles
- Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo • Cuadriláteros
- Propiedades de los rectángulos • Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

En esta sección discutimos las figuras llamadas *polígonos.* Vemos estas formas todos los días. Por ejemplo, las paredes en la mayoría de los edificios son rectangulares. También vemos formas rectangulares en puertas, ventanas y hojas de papel.

Los techos inclinados de muchas casas son triangulares como son los lados de la Gran Pirámide en Egipto. Las formas triangulares son especialmente importantes porque los triángulos son rígidos y contribuyen a darle fuerza y estabilidad a paredes y torres.

Los diseños de los mosaicos o de los pisos de linóleo a menudo usan las formas de un pentágono o un hexágono. Los letreros de alto siempre tienen forma de octágono.

Polígonos

Polígono

Un **polígono** es una figura geométrica cerrada con al menos tres segmentos de recta como lados.

Las figuras geométricas en la figura 9.28 son **polígonos**. Están clasificados de acuerdo al número de lados que tienen. Los puntos donde los lados intersecan se llaman **vértices**. Si un polígono tiene lados que son todos del mismo largo y ángulos que tienen la misma medida se llaman **polígonos regulares**.

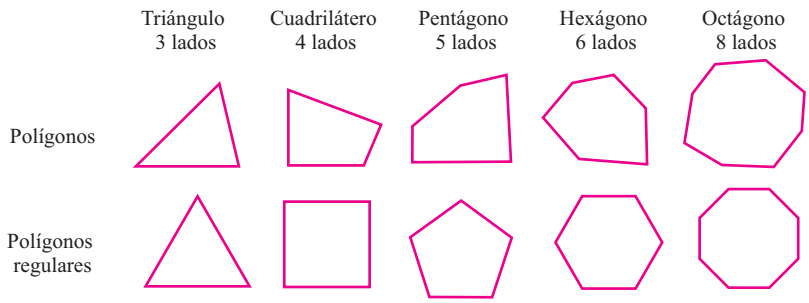


FIGURA 9.28

Autoevaluación 1
Diga el número de vértices de
a. un cuadrilátero
b. un pentágono

Respuestas **a.** 4, **b.** 5

EJEMPLO 1 Diga el número de vértices de **a.** un triángulo y **b.** un hexágono.

Solución

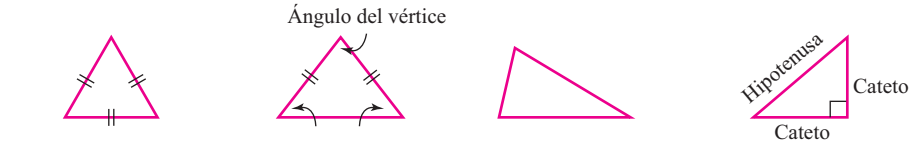
a. De la figura 9.28 vemos que el triángulo tiene tres ángulos y por tanto tres vértices.

b. De la figura 9.28 vemos que un hexágono tiene seis ángulos y por tanto seis vértices.

De los resultados del ejemplo 1 vemos que el número de vértices de un polígono es igual al número de lados.

Triángulos

Un **triángulo** es un polígono con tres lados. La figura 9.29 ilustra algunos triángulos comunes. Las líneas que cruzan los lados de un triángulo indican cuáles lados son de igual longitud.



Triángulo equilátero (todos los lados son de igual longitud)

Triángulo isósceles (al menos dos lados de igual longitud)

Triángulo escaleno (todos los lados de diferente longitud)

Triángulo rectángulo (tiene un ángulo recto)

FIGURA 9.29

COMENTARIO Como los triángulos equiláteros tienen al menos dos lados de igual longitud también son isósceles. Sin embargo, los triángulos isósceles no necesariamente son equiláteros.

Como todos los ángulos de un triángulo equilátero tienen la misma medida, un triángulo equilátero también es **equiángulo**.

En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados del mismo largo se llaman **ángulos de la base**, los lados con igual longitud forman el **ángulo del vértice** y el tercer lado se llama **base**.

El lado más largo de un triángulo rectángulo se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**. La hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es opuesta al ángulo de 90º.

Propiedades de los triángulos isósceles

1. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
2. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes los lados opuestos a esos ángulos tienen la misma longitud y el triángulo es isósceles.

EJEMPLO 2

¿Es isósceles el triángulo de la figura 9.30?

Solución $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos de un triángulo. Como $m(\angle A) = m(\angle B)$, sabemos que $m(\overline{AC}) = m(\overline{BC})$ y que $\triangle ABC$ (léase como "triángulo ABC") es isósceles.

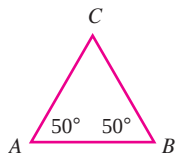
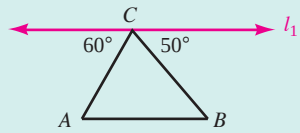


FIGURA 9.30

Autoevaluación 2

En la figura de abajo, $l_1 \parallel \overline{AB}$. ¿es isósceles el triángulo?



Respuesta no

Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

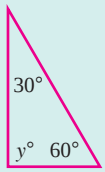
Si dibuja varios triángulos y mide cuidadosamente cada uno de ellos con un transportador encontrará que la suma de las medidas de los ángulos en cada triángulo es 180º.

Ángulos de un triángulo

La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180º.

Autoevaluación 3

En la figura de abajo encuentre y.



Respuesta 90

EJEMPLO 3

Vea la figura 9.31. Encuentre x.

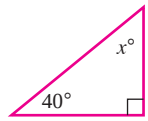


FIGURA 9.31

Solución Como la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180º, tenemos

$$x + 40 + 90 = 180$$
$$x + 130 = 180 \quad \text{Haga la suma: } 40 + 90 = 130.$$
$$x = 50 \quad \text{Para deshacer la suma de 130 reste 130 de ambos lados.}$$

Por tanto, $x = 50$.

EJEMPLO 4

Vea la figura 9.32. Si un ángulo de la base de un triángulo isósceles mide 70º, ¿Cuánto mide el ángulo del vértice?

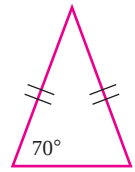


FIGURA 9.32

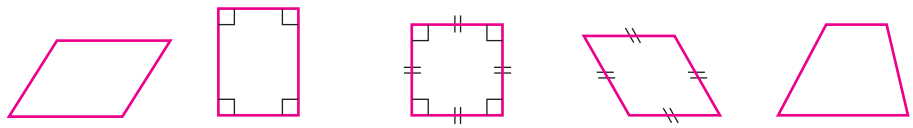
Solución Como uno de los ángulos de la base mide 70º, lo mismo mide el otro. Si hacemos que x represente la medida del ángulo del vértice, tenemos

$$x + 70 + 70 = 180 \quad \text{La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180º.}$$
$$x + 140 = 180 \quad \text{Haga la suma: } 70 + 70 = 140.$$
$$x = 40 \quad \text{Para deshacer la suma de 140 reste 140 de ambos lados.}$$

El ángulo del vértice mide 40º.

Cuadriláteros

Un **cuadrilátero** es un polígono con cuatro lados. Algunos cuadriláteros comunes se muestran en la figura 9.33.



Paralelogramo (lados opuestos paralelos) | Rectángulo (Paralelogramo con cuatro ángulos rectos) | Cuadrado (Rectángulo con lados de igual longitud) | Rombo (Paralelogramo con lados de igual longitud) | Trapecio (Sólo dos lados paralelos)

FIGURA 9.33

Propiedades de los rectángulos

1. Todos los ángulos de un rectángulo son rectos.
2. Los lados opuestos de un rectángulo son paralelos.
3. Los lados opuestos de un rectángulo son de igual longitud.
4. Las diagonales de un rectángulo son de igual longitud.
5. Si las diagonales de un paralelogramo son de igual longitud, entonces se tiene un rectángulo.

EJEMPLO 5

Escuadrado de una base. Un carpintero intenta construir un cobertizo con una base de 8 por 12 pies. ¿Cómo puede asegurarse de que la base está a escuadra?

Solución Vea la figura 9.34. El carpintero puede usar una cinta de medir para encontrar las longitudes de las diagonales AC y BD. Si estas diagonales son de igual longitud la figura será un rectángulo y tendrá cuatro ángulos rectos. Entonces la base estará a escuadra.

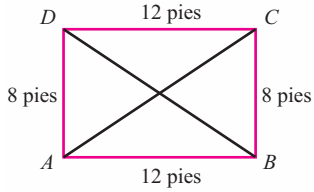


FIGURA 9.34

EJEMPLO 6

En un rectángulo $ABCD$ (figura 9.35) la longitud de $\overline{AC}$ es 20 centímetros. Encuentre las medidas: **a.** $m(\overline{BD})$, **b.** $m(\angle 1)$ y **c.** $m(\angle 2)$.

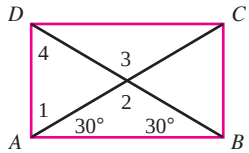


FIGURA 9.35

Solución

a. Como las diagonales de un rectángulo son de igual longitud, $m(\overline{BD})$ también mide 20 centímetros.

b. Sea $m(\angle 1) = x$. Entonces, como los ángulos de un rectángulo son ángulos rectos, tenemos

$$x + 30 = 90$$
$$x = 60 \quad \text{Para deshacer la suma de 30 reste 30 de ambos lados.}$$

Por tanto, $m(\angle 1) = 60°$.

c. Sea $m(\angle 2) = y$. Entonces, como la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180º, tenemos

$$30 + 30 + y = 180$$
$$60 + y = 180 \quad \text{Simplifique: } 30 + 30 = 60.$$
$$y = 120 \quad \text{Para deshacer la suma de 60 reste 60 de ambos lados.}$$

Por tanto, $m(\angle 2) = 120°$.

Autoevaluación 6
En el rectángulo $ABCD$ (figura 9.35) la longitud de $\overline{DC}$ es 16 centímetros. Encuentre las medidas:
a. $m(\overline{AB})$
b. $m(\angle 3)$
c. $m(\angle 4)$

Respuestas **a.** 16 cm, **b.** 120°, **c.** 60°

Los lados paralelos de un trapecio se llaman **bases**, los lados no paralelos se llaman **catetos** y los ángulos en ambos lados de la base se llaman **ángulos de la base**. Si los lados no paralelos son de la misma longitud, el trapecio es un **trapecio isósceles**. En un trapecio isósceles los ángulos de la base son congruentes.

EJEMPLO 7 Sección transversal de una zanja de drenaje.

La sección transversal de una zanja de drenaje (figura 9.36) es un trapecio isósceles con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Encuentre x y y.

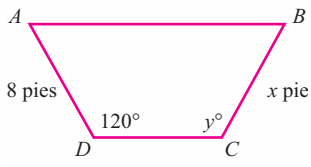


FIGURA 9.36

Solución Como la figura es un trapecio isósceles sus lados no paralelos tienen la misma longitud. Por eso $m(\overline{AD})$ y $m(\overline{BC})$ son iguales y $x = 8$.

Como los ángulos de la base de un trapecio isósceles son congruentes, $m(\angle D) = m(\angle C)$. Por tanto, y es 120.

Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Hemos visto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. Como un polígono con n lados se puede dividir en $n - 2$ triángulos, la suma de las medidas de los ángulos de un polígono es $(n - 2)180$.

Ángulos de un polígono

La suma S, en grados, de las medidas de los ángulos de un polígono con n lados está dada por la fórmula

$$S = (n - 2)180$$

Autoevaluación 8
Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero.

Respuesta 360°

EJEMPLO 8 Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de un pentágono.

Solución Como un pentágono tiene 5 lados sustituimos 5 en lugar de n en la fórmula y simplificamos.

$$\begin{aligned} S &= (\mathbf{n} - 2)180 \\ &= (\mathbf{5} - 2)180 && \text{Sustituya 5 en lugar de } n. \\ &= (3)180 && \text{Realice la resta dentro del paréntesis.} \\ &= 540 \end{aligned}$$

La suma de los ángulos de un pentágono es 540°.

Autoevaluación 9
La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es 720°. Encuentre el número de lados que tiene el polígono.

Respuesta 6

EJEMPLO 9 La suma de las medidas de los ángulos de un polígono es 1080°. Encuentre el número de lados que tiene el polígono.

Solución Para encontrar el número de lados que tiene un polígono sustituimos 1080 en lugar de S en la fórmula y despejamos n.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (n - 2)180 \\ \mathbf{1080} &= (n - 2)180 && \text{Sustituya 1080 en lugar de } S. \\ 1080 &= 180n - 360 && \text{Distribuya la multiplicación por 180.} \\ 1080 \mathbf{+ 360} &= 180n - 360 \mathbf{+ 360} && \text{Para deshacer la resta de 360 sume 360 a ambos lados.} \\ 1440 &= 180n && \text{Simplifique.} \\ \frac{1440}{\mathbf{180}} &= \frac{180n}{\mathbf{180}} && \text{Para deshacer la multiplicación por 180 divida ambos lados entre 180.} \\ 8 &= n && \text{Haga la división: } \tfrac{1440}{180} = 8. \end{aligned}$$

El polígono tiene 8 lados. Es un octágono.

Sección 9.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

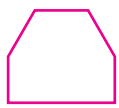
VOCABULARIO *Llene los espacios.*

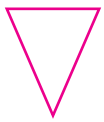
1. Un polígono _____ tiene lados que son todos de la misma longitud y ángulos que tienen la misma medida.
2. Un polígono con cuatro lados se llama _____. Un polígono con tres lados es un _____.
3. Un _____ es un polígono con seis lados.

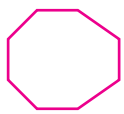
4. Un polígono con cinco lados se llama _____.
5. Un polígono con ocho lados es un _____.
6. Los puntos donde se intersecan los lados de un polígono se llaman _____.
7. Un triángulo con tres lados de igual longitud se llama triángulo _____.
8. Un triángulo _____ tiene dos lados de igual longitud.
9. El lado más largo de un triángulo rectángulo se llama _____.
10. Los ángulos de la _____ de un triángulo isósceles tienen la misma medida.
11. Un _____ con un ángulo recto es un rectángulo.
12. Un rectángulo con todos sus lados de igual longitud es un _____.
13. Un _____ es un paralelogramo con sus cuatro lados de igual longitud.
14. Un _____ tiene dos lados paralelos y dos lados que no son paralelos.
15. Los catetos de un trapecio _____ tienen la misma longitud.
16. El _____ de un polígono es la distancia alrededor de él.

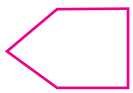
CONCEPTOS *Diga el número de lados que tiene cada polígono y clasifíquelo como triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono u octágono. Luego diga el número de vértices que tiene.*

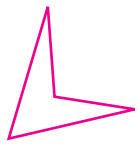
17.

18. 

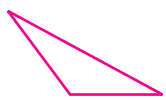
19. 

20. 

21. 

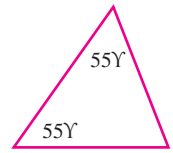
22. 

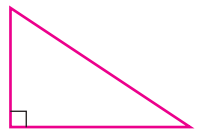
23.

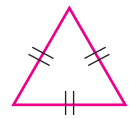
24. 

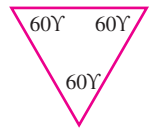
Clasifique los triángulos como equilátero, isósceles, escaleno o rectángulo.

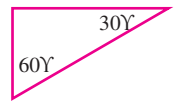
25.

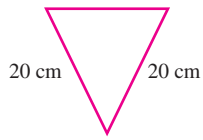
26. 

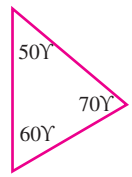
27. 

28. 

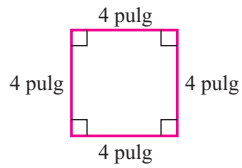
29. 

30. 

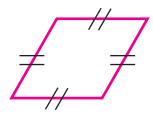
31. 

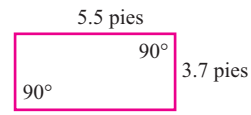
32. 

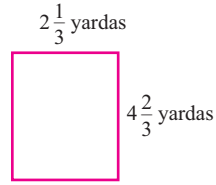
Clasifique los cuadriláteros como rectángulo, cuadrado, rombo o trapecio. Se puede usar más de un nombre para algunas figuras.

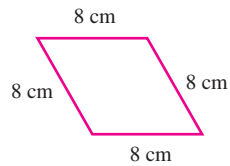
33. 

34.

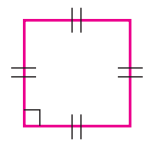
35. 

36. 

37. 

38. 

39.

40. 

NOTACIÓN *Llene los espacios.*

41. El símbolo △ significa _____.
42. El símbolo m(∠1) significa la _____ del ángulo 1.

PRÁCTICA

Vea la ilustración siguiente. Se dan las medidas de dos ángulos de $\triangle ABC$. Encuentre la medida del tercer ángulo.

43. $m(\angle A) = 30°$ y $m(\angle B) = 60°$
$m(\angle C) =$ _____.

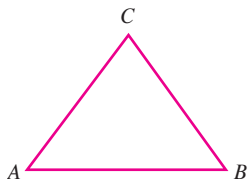
44. $m(\angle A) = 45°$ y $m(\angle C) = 105°$
$m(\angle B) =$ _____.

45. $m(\angle B) = 100°$ y $m(\angle A) = 35°$
$m(\angle C) =$ _____.

46. $m(\angle B) = 33°$ y $m(\angle C) = 77°$
$m(\angle A) =$ _____.

47. $m(\angle A) = 25.5°$ y $m(\angle B) = 63.8°$
$m(\angle C) =$ _____.

48. $m(\angle B) = 67.25°$ y
$m(\angle C) = 72.5°$
$m(\angle A) =$ _____.



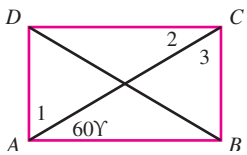
Refiérase al rectángulo ABCD, mostrado abajo.

49. $m(\angle 1) =$ _____.

50. $m(\angle 3) =$ _____.

51. $m(\angle 2) =$ _____.

52. Si $m(\overline{AC})$ es 8 cm, entonces $m(\overline{BD}) =$ _____.



Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de cada polígono.

53. Un hexágono

54. Un octágono

55. Un decágono (10 lados)

56. Un dodecágono (12 lados)

Encuentre el número de lados que tiene un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos es el número dado.

57. 900°

58. 1260°

59. 2160°

60. 3600°

APLICACIONES

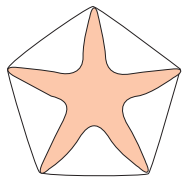
61. Diga tres usos de triángulos en la vida diaria.

62. Diga tres usos de rectángulos en la vida diaria.

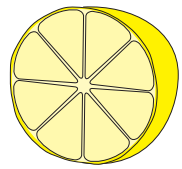
63. Diga tres usos de cuadrados en la vida diaria.

64. Diga un uso de un trapecio en la vida diaria.

65. POLÍGONOS EN LA NATURALEZA Como se ve en la ilustración (a) una estrella de mar tiene una forma aproximada de pentágono. ¿Qué forma aproximada de polígono ve en cada uno de los otros objetos?
b. Limón **c.** Chile **d.** Manzana

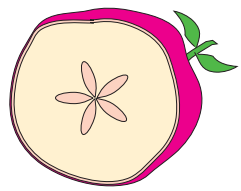


(a)



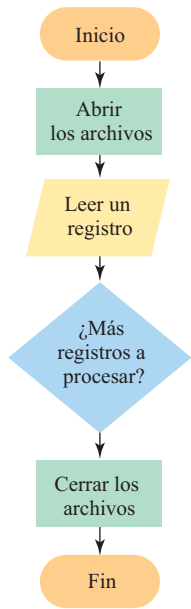
(b)

(c)



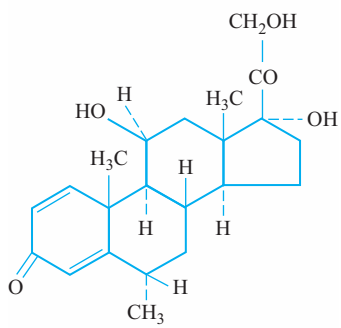
(d)

66. DIAGRAMAS DE FLUJO Un diagrama de flujo muestra una secuencia de pasos para que una computadora los haga para resolver cierto problema. Cuando se diseña un diagrama de flujo el programador usa un conjunto de símbolos estandarizados para representar varias operaciones a ser realizadas por la computadora. Localice un rectángulo, un rombo y un paralelogramo en el diagrama de flujo mostrado.



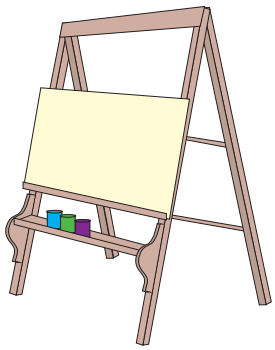
67. QUÍMICA Los polígonos se usan para representar gráficamente la estructura química de compuestos. En la ilustración ¿qué tipo de polígonos se usan para representar la metilprednisolona, ingrediente activo en un medicamento antiinflamatorio?

Metilprednisolona

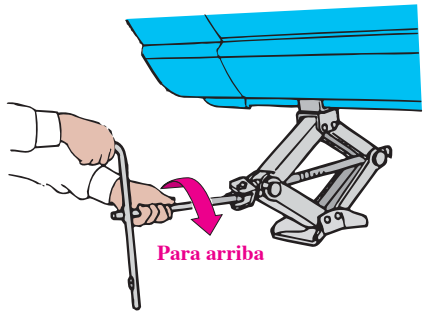


68. PODIOS ¿Qué polígono describe la forma de la porción superior del podio?

69. CABALLETES Muestre cómo dos de las patas del caballete forman los lados iguales de un triángulo isósceles.



70. GATO DE AUTOMÓVIL Refiérase a la ilustración. Muestre que no importa qué tan alto se levante el gato, siempre forma triángulos isósceles.



POR ESCRITO

71. Explique por qué un cuadrado es un rectángulo.

72. Explique por qué un trapecio no es un paralelogramo.

REPASO

73. Encuentre el 20% de 110.

74. Encuentre el 15% de 50.

75. ¿Qué porcentaje de 200 es 80?

76. 500 es 20% ¿de qué número?

77. Simplifique: $0.85 \div 2(0.25)$.

78. PRIMEROS AUXILIOS Al revisar el pulso de una víctima de un accidente un paramédico contó 13 latidos durante un intervalo de tiempo de 15 segundos. ¿Cuántos latidos esperaría en 60 segundos?

9.4 Propiedades de los triángulos

- Triángulos congruentes
- Triángulos semejantes
- El Teorema de Pitágoras

Las proporciones y los triángulos se usan a menudo para medir distancias indirectamente. Por ejemplo, usando una proporción, Eratóstenes (275-195 a.C.) pudo estimar la circunferencia de la Tierra con una exactitud notable. En un día soleado, podemos usar las propiedades de los triángulos semejantes para calcular la altura de un árbol quedándonos muy seguros en el suelo. Usando el teorema demostrado por el matemático griego Pitágoras (alrededor de 500 a.C.), podemos calcular la longitud del tercer lado de un triángulo recto siempre que conozcamos las longitudes de dos lados.

Triángulos congruentes

A los triángulos que tienen la misma área y la misma forma se les llama **triángulos congruentes**. Los triángulos de la figura ABC y DEF son congruentes.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ Léase como "el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF."

Los ángulos correspondientes y los lados correspondientes de triángulos congruentes se llaman **partes correspondientes**. La notación $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ muestra cuáles vértices son partes correspondientes.

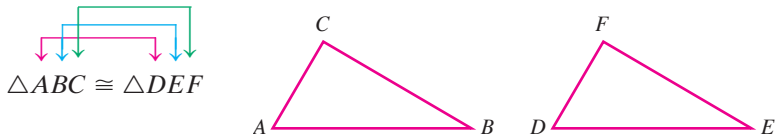


FIGURA 9.37

Las partes correspondientes de triángulos congruentes siempre tienen la misma medida. Para los triángulos congruentes mostrados en la figura 9.37

$$\text{m}(\angle A) = \text{m}(\angle D), \quad \text{m}(\angle B) = \text{m}(\angle E), \quad \text{m}(\angle C) = \text{m}(\angle F),$$
$$\text{m}(\overline{BC}) = \text{m}(\overline{EF}), \quad \text{m}(\overline{AC}) = \text{m}(\overline{DF}), \quad \text{m}(\overline{AB}) = \text{m}(\overline{DE})$$

EJEMPLO 1 Nombre las partes correspondientes de los triángulos congruentes en la figura 9.38.

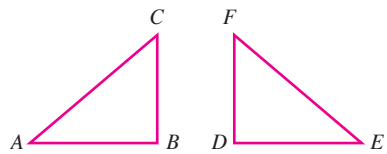


FIGURA 9.38

Solución Los ángulos correspondientes son

$$\angle A \text{ y } \angle E, \quad \angle B \text{ y } \angle D, \quad \angle C \text{ y } \angle F$$

Como los lados correspondientes son siempre opuestos a los ángulos correspondientes, los lados correspondientes son

$$\overline{BC} \text{ y } \overline{DF}, \quad \overline{AC} \text{ y } \overline{EF}, \quad \overline{AB} \text{ y } \overline{ED}$$

Discutiremos tres formas de mostrar que dos triángulos son congruentes.

Propiedad LLL

Si tres lados de un triángulo son congruentes con tres lados de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Los triángulos en la figura 9.39 son congruentes por la propiedad LLL.

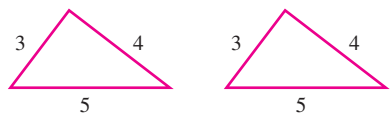


FIGURA 9.39

Propiedad LAL

Si dos lados y un ángulo entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y el ángulo entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Los triángulos en la figura 9.40 son congruentes porque tienen la propiedad LAL

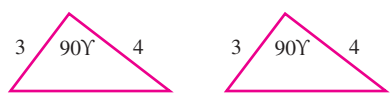


FIGURA 9.40

Propiedad ALA

Si dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con los dos ángulos y el lado entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Los triángulos en la figura 9.41 son congruentes por la propiedad ALA.

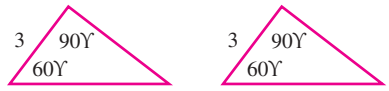
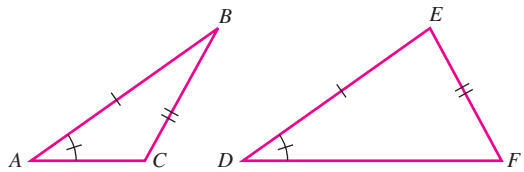


FIGURA 9.41

COMENTARIO No hay propiedad LLA. Para ilustrar esto considere los triángulos en la figura 9.42. Dos lados y un ángulo del $\triangle ABC$ son congruentes con dos lados y un ángulo de $\triangle DEF$. Pero el ángulo congruente no es entre lados conguentes.

Nos referimos a esta situación como LLA. Obviamente los triángulos no son congruentes porque tienen distintas áreas.



Las marcas que cruzan indican partes congruentes. Esto es, los lados con una marca son de la misma longitud, los lados con dos marcas son de la misma longitud y los ángulos con una marca tienen la misma medida.

FIGURA 9.42

EJEMPLO 2 Explique por qué los triángulos en la figura 9.43 son congruentes.

Solución Como los ángulos opuestos por el vértice son congruentes,

$$m(\angle 1) = m(\angle 2)$$

De la figura vemos que

$$m(\overline{AC}) = m(\overline{EC}) \quad \text{y} \quad m(\overline{BC}) = m(\overline{DC})$$

Como dos lados y el ángulo entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y el ángulo entre ellos en un segundo triángulo, $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ por la propiedad LAL.

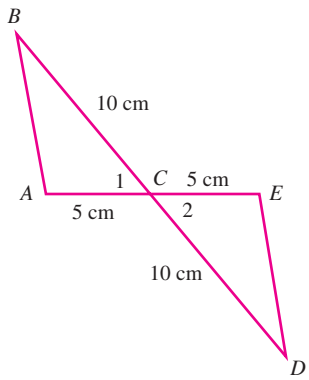


FIGURA 9.43

Triángulos semejantes

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de un segundo triángulo, los triángulos tienen la misma forma. A los triángulos con la misma forma se les llama **triángulos semejantes**. En la figura 9-44, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (léase el símbolo $\sim$ como "es semejante a").

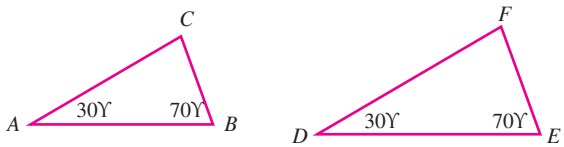


FIGURA 9.44

COMENTARIO Note que los triángulos congruentes siempre son semejantes, pero los triángulos semejantes no siempre son congruentes.

Propiedades de los triángulos semejantes

Si dos triángulos son semejantes todos los pares de lados correspondientes son proporcionales.

En los triángulos semejantes que se muestran en la figura 9.44 en la página previa son ciertas las siguientes proporciones.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}, \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$

EJEMPLO 3 **Altura de un triángulo.** Un árbol arroja una sombra de 18 pies de largo al mismo tiempo que una mujer de 5 pies de alto arroja una sombra que tiene 1.5 pies de largo (vea la figura 9.45). Encuentre la altura del árbol.

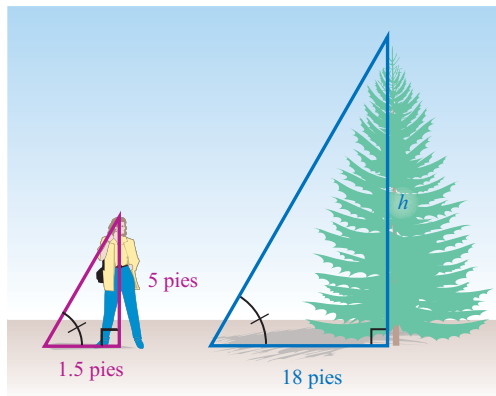


FIGURA 9.45

Solución La figura muestra los triángulos determinados por el árbol y su sombra y por la mujer y su sombra. Como los triángulos tienen la misma forma son semejantes y las longitudes de sus lados correspondientes están en proporción. Si h es la altura del árbol, podemos encontrar h resolviendo la proporción siguiente.

$$\frac{h}{5} = \frac{18}{1.5} \qquad \frac{\text{Altura del árbol}}{\text{Altura de la mujer}} = \frac{\text{sombra del árbol}}{\text{sombra de la mujer}}$$

$1.5h = 5(18)$ En una proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$1.5h = 90$ Haga la multiplicación: $5(18) = 90$.

$h = 60$ Para deshacer la multiplicación por 1.5 divida ambos lados entre 1.5.

El árbol tiene 60 pies de altura.

El Teorema de Pitágoras

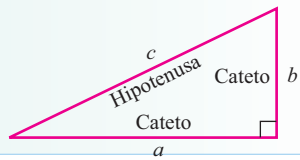
En la película *El Mago de Oz,* el cuervo anda en busca de un cerebro. Para demostrar que ya encontró uno, trata de recitar el Teorema de Pitágoras. En palabras, el Teorema de Pitágoras se puede enunciar como:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Teorema de Pitágoras

Si la longitud de la hipotenusa es c y las longitudes de sus catetos son a y b, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$



EJEMPLO 4 **Construcción de un recorrido de aventura de cuerdas elevadas.** Un constructor de un recorrido de aventura de cuerdas elevadas quiere asegurar el poste que se muestra en la figura 9.46 fijando un cable desde la estaca de anclaje a 8 pies de su base a un punto a 6 pies de altura en el poste. ¿De qué largo debe ser el cable?

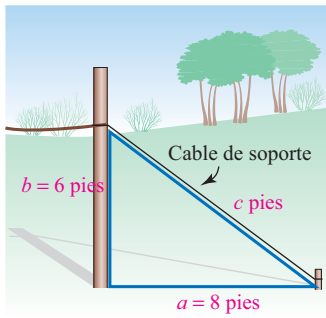


FIGURA 9.46

Solución El cable de soporte, el poste y el suelo forman un triángulo rectángulo. Si c representa la longitud del cable (la hipotenusa), entonces podemos usar el Teorema de Pitágoras con $a = 8$ y $b = 6$ para encontrar c.

$c^2 = a^2 + b^2$ Este es el Teorema de Pitágoras.

$c^2 = 8^2 + 6^2$ Sustituya 8 en lugar de a y 6 en lugar de b.

$c^2 = 64 + 36$ Evalúe las expresiones con exponentes.

$c^2 = 100$ Simplifique el lado derecho.

Para encontrar c debemos hallar un número que elevado al cuadrado sea 100. Hay dos números, uno positivo y otro negativo que son raíces cuadradas de 100. Como c representa la longitud del cable de soporte, c no puede ser negativo. Por esta razón necesitamos encontrar solamente la raíz positiva de 100 para obtener c.

$c^2 = 100$ Esta es la ecuación a resolver.

$c = \sqrt{100}$ El símbolo $\sqrt{\ }$ se usa para indicar la raíz cuadrada positiva de un número.

$c = 10$ $\sqrt{100} = 10$, porque $10^2 = 100$.

El cable de soporte debe tener una longitud de 10 pies.

Autoevaluación 4
Una escalera de mano de 26 pies se apoya contra el costado de un edificio. Si la base de la escalera es de 10 pies desde la pared, ¿qué tan alto en el costado del edificio llega la escalera?

Respuesta 24 pies

Cómo encontrar el ancho de una pantalla de televisión

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

El tamaño de una pantalla de televisión es la medida de la diagonal de su pantalla rectangular. (Vea la figura 9.47.) Para encontrar el ancho de una pantalla de 27 pulgadas que tiene 27 pulgadas de alto usamos el Teorema de Pitágoras con $c = 27$ y $b = 17$.

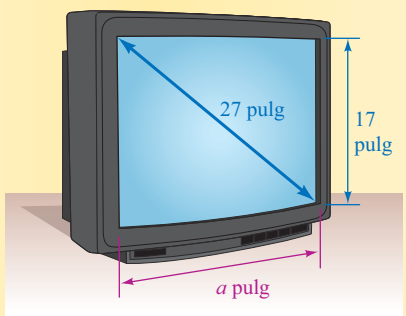


FIGURA 9-47

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$27^2 = a^2 + 17^2$$
$$27^2 - 17^2 = a^2$$

La variable a representa el ancho de una pantalla de televisión así es que tiene que ser positiva. Para encontrar a, encontramos la raíz positiva del resultado cuando 17^2 se resta de 27^2. Si usamos un símbolo de radical para indicar esto, tenemos

$$\sqrt{27^2 - 17^2} = a$$

Podemos evaluar la expresión en el lado izquierdo introduciendo estos números y apretando estas teclas.

[( ] [27] [x^2] [−] [17] [x^2] [ )] [$\sqrt{\ }$]

20.97617696

Hasta la pulgada más cercana el ancho de la pantalla de televisión es 21 pulgadas.

También es cierto que

Si el cuadrado de uno de los lados de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es un triángulo rectángulo.

Autoevaluación 5
Un triángulo con lados de 9, 40 y 41 metros, ¿es rectángulo?

Respuesta sí

EJEMPLO 5 Un triángulo con lados de 5, 12 y 13 metros, ¿es rectángulo?

Solución Podemos usar el Teorema de Pitágoras para responder esta pregunta. Como el lado más largo es 13 metros, podemos sustituir 13 en lugar de c. No importa cuál de los dos lados restantes sustituyamos en lugar de a y cuál en lugar de b.

$c^2 = a^2 + b^2$ Este es el Teorema de Pitágoras.

$13^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 12^2$ Sustituya 13 en lugar de c, 5 en lugar de a y 12 en lugar de b.

$169 \stackrel{?}{=} 25 + 144$ Evalúe las expresiones con exponentes.

$169 = 169$ Simplifique el lado derecho.

Como el cuadrado del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.

Autoevaluación 6
Un triángulo con lados de 4, 5 y 6 pulgadas, ¿es rectángulo?

Respuesta no

EJEMPLO 6 Un triángulo con lados de 2, 2 y 3 pies, ¿es rectángulo?

Solución Vemos si el cuadrado del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

$c^2 = a^2 + b^2$ Este es el Teorema de Pitágoras.

$3^2 \stackrel{?}{=} 2^2 + 2^2$ Sustituya 3 en lugar de c, 2 en lugar de a y 2 en lugar de b.

$9 \stackrel{?}{=} 4 + 4$ Evalúe las expresiones con exponentes.

$9 \neq 8$ Simplifique el lado derecho.

Como el cuadrado del lado más largo no es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo no es rectángulo.

Sección 9.4 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Los triángulos _____ son del mismo tamaño y de la misma forma.
2. Todas las partes _____ de triángulos congruentes tienen la misma medida.
3. Si dos triángulos son _____, tienen la misma forma.
4. La _____ es el lado más largo de un triángulo rectángulo.

CONCEPTOS *Determine si cada enunciado es verdadero. Si el enunciado es falso diga por qué.*

5. Si tres lados de un triángulo son de la misma longitud que los tres lados de un segundo triángulo, los triángulos con congruentes.

6. Si dos lados de un triángulo son de la misma longitud que dos lados de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes

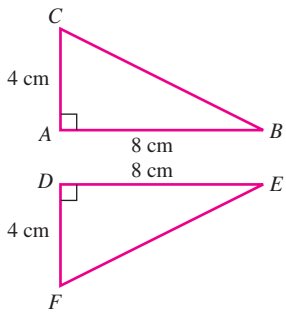
7. Si dos lados y un ángulo de un triángulo son congruentes, respectivamente, con los dos lados y un ángulo de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

8. Si dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

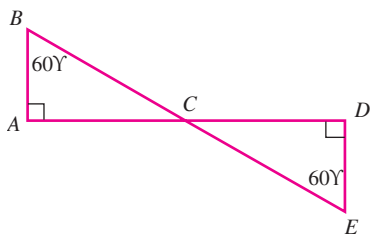
9. En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

10. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de un segundo triángulo, los triángulos son semejantes.

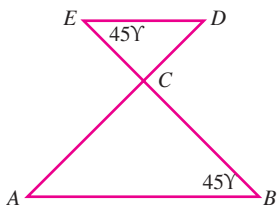
11. ¿Son congruentes los triángulos que se muestran abajo?



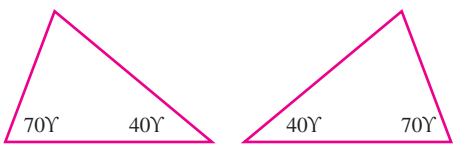
12. ¿Son congruentes los triángulos que se muestran abajo?



13. ¿Son semejantes los triángulos que se muestran abajo?



14. ¿Son semejantes los triángulos que se muestran abajo?



15. El Teorema de Pitágoras establece que para un triángulo rectángulo, $c^2 = a^2 + b^2$. ¿Qué representan las variables a, b y c?

16. Un triángulo tiene lados con longitudes de 3, 4 y 5 centímetros. Sustituya las longitudes en $c^2 = a^2 + b^2$ y muestre que resulta un enunciado verdadero. Del resultado, ¿qué podemos concluir del triángulo?

17. Suponga que c representa la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y $c^2 = 25$. Llene los espacios: Para encontrar c, debemos encontrar un número que cuando se elevе al cuadrado sea ____. Como c representa un número positivo, necesitamos encontrar sólo la _____ _____ positiva de 25 para obtener c.

$c^2 = 25$

$\square = \sqrt{25}$ Un símbolo de radical indica la raíz cuadrada positiva.

$c = \square$

18. Resuelva: $\frac{h}{2.6} = \frac{27}{13}$.

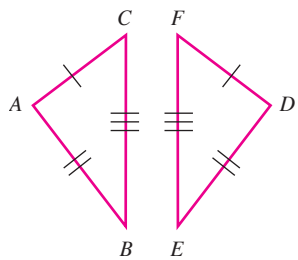
NOTACIÓN *Llene los espacios.*

19. El símbolo $\cong$ se lee como "_____."

20. El símbolo $\sim$ se lee como "_____."

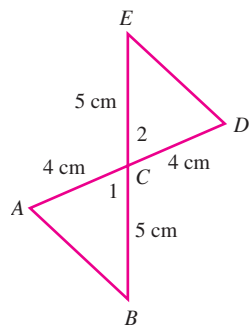
PRÁCTICA *Nombre las partes correspondientes de los triángulos congruentes.*

21. Refiérase a la ilustración.



$\overline{AC}$ corresponde a ____.
$\overline{DE}$ corresponde a ____.
$\overline{BC}$ corresponde a ____.
$\angle A$ corresponde a ____.
$\angle E$ corresponde a ____.
$\angle F$ corresponde a ____.

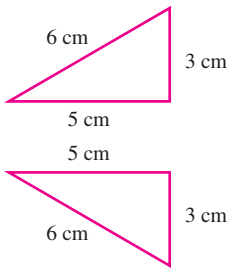
22. Refiérase a la ilustración.



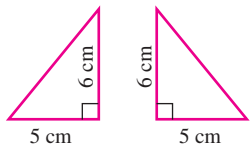
$\overline{AB}$ corresponde a ____.
$\overline{EC}$ corresponde a ____.
$\overline{AC}$ corresponde a ____.
$\angle D$ corresponde a ____.
$\angle B$ corresponde a ____.
$\angle 1$ corresponde a ____.

Determine si cada par de triángulos es congruente. Si lo son explique por qué.

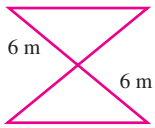
23.



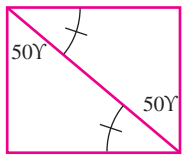
24.



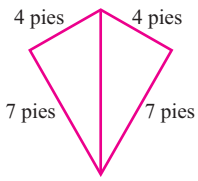
25.



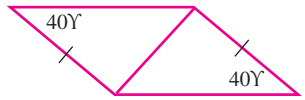
26.



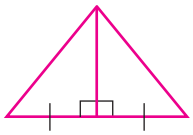
27.



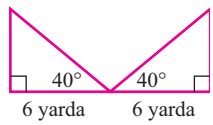
28.



29.

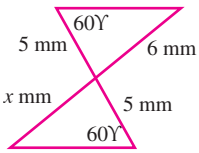


30.

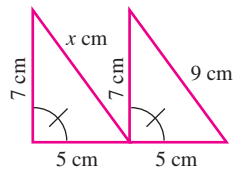


Encuentre x.

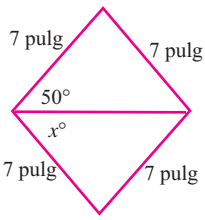
31.



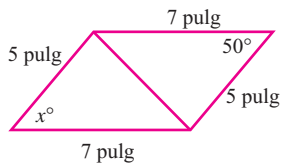
32.



33.

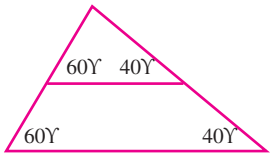


34.

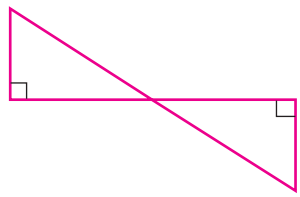


Determine si los triángulos son semejantes.

35.



36.



Refiérase a la ilustración de abajo para encontrar la longitud del lado desconocido.

37. $a = 3$ y $b = 4$. Encuentre c.

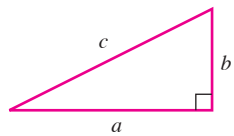
38. $a = 12$ y $b = 5$. Encuentre c.

39. $a = 15$ y $c = 17$. Encuentre b.

40. $b = 45$ y $c = 53$. Encuentre a.

41. $a = 5$ y $c = 9$. Encuentre b.

42. $a = 1$ y $b = 7$. Encuentre c.



Se dan las longitudes de los tres lados de un triángulo. Determine si el triángulo es rectángulo

43. 8, 15, 17

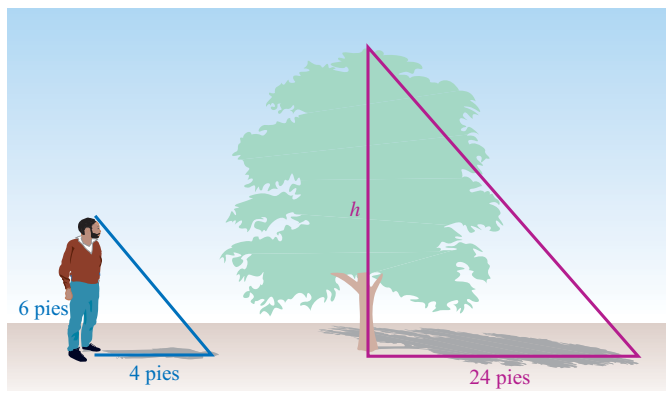
44. 6, 8, 10

45. 7, 24, 26

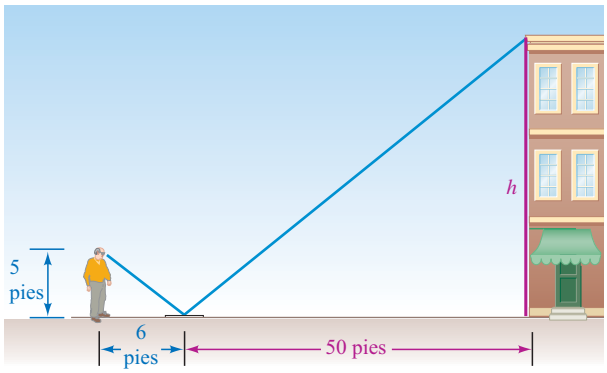
46. 9, 39, 40

APLICACIONES *Resuelva cada problema. Si la respuesta no es exacta, redondéela hasta la décima más cercana.*

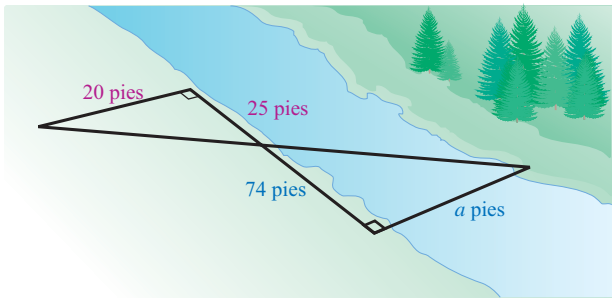
47. ALTURA DE UN ÁRBOL El árbol en la ilustración arroja una sombra de 24 pies de largo cuando un hombre de 6 pies de alto arroja una sombra de 4 pies de largo. Encuentre la altura de un árbol.



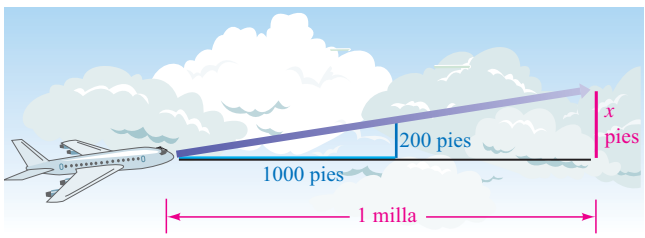
48. ALTURA DE UN EDIFICIO Un hombre coloca un espejo en el suelo y ve el reflejo de lo alto del edificio como se muestra en la página siguiente. Encuentre la altura del edificio.



49. ANCHURA DE UN RÍO Use las dimensiones en la ilustración para encontrar a, el ancho del río.

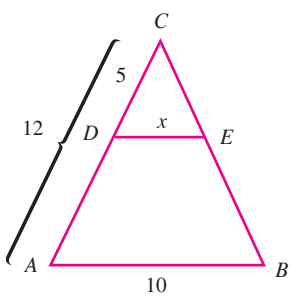


50. TRAYECTORIAS DE VUELO Un aeroplano asciende 200 pies conforme vuela una distancia de 1000 pies. ¿Qué altitud gana cuando vuela una distancia horizontal de 1 milla? (*Sugerencia:* 1 milla = 5280 pies.)



51. TRAYECTORIAS DE VUELO Un aeroplano desciende 1200 pies conforme vuela una distancia de 1.5 millas. ¿Qué altitud pierde cuando vuela una distancia horizontal de 5 millas?

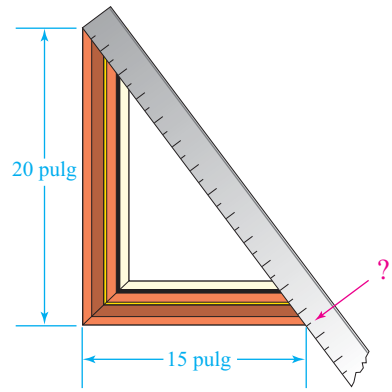
52. GEOMETRÍA Si el segmento DE en la ilustración siguiente es paralelo al segmento AB, $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEC$. Encuentre x.



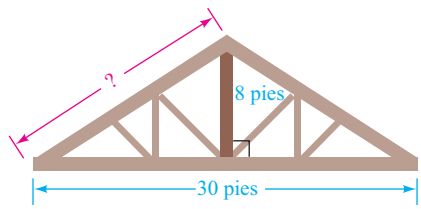
53. AJUSTE DE ESCALERAS Una escalera de 20 pies llega hasta una ventana a 16 pies arriba del suelo. ¿Qué tan alejada está la base de la escalera de la pared?

54. LONGITUD DE ALAMBRES Una torre de 30 pies se va a fijar con tres alambres fijos en la parte alta de la torre y al piso a 20 pies de su base. ¿Cuánto alambre se necesita?

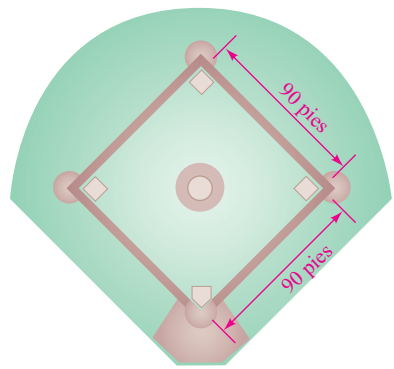
55. MARCOS DE PINTURAS Después de pegar y clavar dos piezas de una marco de una pintura, una mujer que hace marcos comprueba su trabajo haciendo una medición de una diagonal. Si los lados del marco forman un ángulo recto, ¿qué medida debiera leer la mujer en su regla?



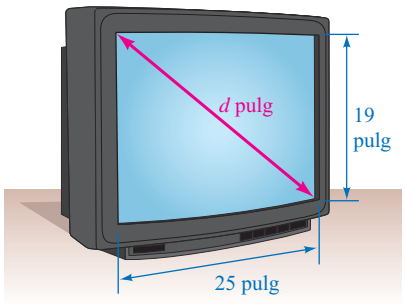
56. CARPINTERÍA La parte inclinada del techo que se muestra se divide a la mitad con un tirante vertical de 8 pies de alto. Encuentre la longitud de la línea inclinada del techo.



57. BÉISBOL Un diamante de béisbol es un cuadrado con lados de 90 pies de largo. ¿A qué distancia del home está la segunda base?



58. TELEVISIÓN ¿De qué tamaño es la pantalla de televisión que se muestra?



POR ESCRITO

59. Explique el Teorema de Pitágoras.

60. Explique el procedimiento usado para resolver la ecuación $c^2 = 64$. (Suponga que c es positivo.)

REPASO *Estime la respuesta a cada problema.*

61. $\dfrac{0.95 \cdot 3.89}{2.997}$

62. 21% de 42

63. 32% de 60

64. $\dfrac{4.966 + 5.001}{2.994}$

65. 49.5% de 18.1

66. 98.7% de 0.03

9.5 Perímetros y áreas de polígonos

- Perímetros de polígonos
- Perímetros de figuras que son combinaciones de polígonos
- Áreas de polígonos
- Áreas de figuras que son combinaciones de polígonos

En esta sección discutimos cómo encontrar perímetros y áreas de polígonos. Encontrar perímetros es importante al estimar el costo de cercar o el costo de carpintería en la casa. Encontrar áreas es importante cuando se calcula el costo de alfombrar, el costo de pintar una casa y el costo de fertilización de un patio.

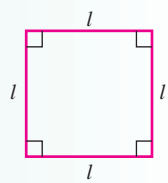
Perímetros de polígonos

Recuerde que el **perímetro** de un polígono es la distancia a su alrededor. Como un cuadrado tiene cuatro lados de longitudes iguales l, su perímetro es P es $l + l + l + l$, o $4l$.

Perímetro de un cuadrado

Si un cuadrado tiene un lado de longitud l, su perímetro P está dado por la fórmula

$$P = 4l$$



Autoevaluación 1
Encuentre el perímetro de un cuadrado cuyos lados son de 23.75 centímetros de largo.

Respuesta 95 cm

EJEMPLO 1 Encuentre el perímetro de un cuadrado cuyos lados son de 7.5 metros de largo

Solución El perímetro de un cuadrado está dado por la fórmula $P = 4l$. Sustituya 7.5 en lugar de l y simplifique.

$$\begin{aligned} P &= 4\boldsymbol{l} \\ &= 4(\boldsymbol{7.5}) \\ &= 30 \end{aligned}$$

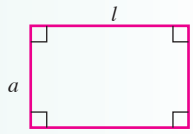
El perímetro es 30 metros.

Como un rectángulo tiene dos longitudes l y dos anchos a, su perímetro P es $l + l + a + a$, o $2l + 2a$.

Perímetro de un rectángulo

Si un rectángulo tiene longitud l y ancho a, su perímetro está dado por la fórmula P

$$P = 2l + 2a$$



EJEMPLO 2

Encuentra el perímetro del rectángulo en la figura 9.48.

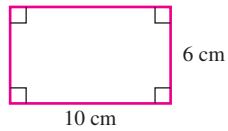


FIGURA 9.48

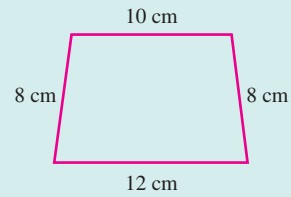
Solución El perímetro está dado por la fórmula $P = 2l + 2a$. Sustituimos 10 en lugar de l y 6 en lugar de a y simplifique.

$$\begin{aligned} P &= 2\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{a} \\ &= 2(\mathbf{10}) + 2(\mathbf{6}) \\ &= 20 + 12 \\ &= 32 \end{aligned}$$

El perímetro es 32 centímetros.

Autoevaluación 2

Encuentre el perímetro del trapecio isósceles abajo.



Respuesta 38 cm

EJEMPLO 3

Encuentre el perímetro del rectángulo de la figura 9.49 en metros.

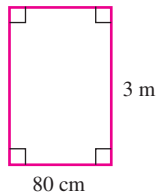


FIGURA 9.49

Solución Como 1 metro = 100 centímetros podemos convertir 80 centímetros a metros multiplicando 80 centímetros por el factor de conversión de unidades $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$.

$$80\text{ cm} = 80\text{ cm} \cdot \frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}$$ Multiplique por 1: $\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = 1$.

$$= \frac{80}{100}\text{ m}$$ Las unidades de centímetros se cancelan.

$$= 0.8\text{ m}$$ Divida entre 100 moviendo el punto decimal 2 lugares a la izquierda.

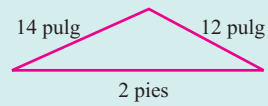
Podemos sustituir 3 en lugar de l y 0.8 en lugar de a para obtener

$$\begin{aligned} P &= 2\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{a} \\ &= 2(\mathbf{3}) + 2(\mathbf{0.8}) \\ &= 6 + 1.6 \\ &= 7.6 \end{aligned}$$

El perímetro es 7.6 metros.

Autoevaluación 3

Encuentre el perímetro del triángulo de abajo en pulgadas.



Respuesta 50 pulg

EJEMPLO 4

El perímetro del triángulo isósceles de la figura 9.50 es 45 metros. Encuentre la longitud de su base.

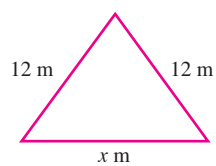


FIGURA 9.50

Autoevaluación 4

El perímetro de un triángulo isósceles es 58 metros. Si uno de sus lados de igual longitud mide 15 metros, ¿cuánto mide su base?

Solución Dos lados son de 12 metros de largo y el perímetro es 45 metros. Si x representa la longitud de la base, tenemos

$$\begin{aligned} 12 + 12 + x &= 45 \\ 24 + x &= 45 && \text{Simplifique: } 12 + 12 = 24. \\ 24 + x - \mathbf{24} &= 45 - \mathbf{24} && \text{Para deshacer la suma de 24 reste 24 de ambos lados.} \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Respuesta 28 m

La longitud de la base es 21 metros.

Perímetros de figuras que son combinaciones de polígonos

INSTANTÁNEA DE USO DE LA CALCULADORA Perímetro de una figura

Vea la figura 9.51. Para encontrar el perímetro necesitamos conocer los valores de x y y. como la figura es una combinación de dos rectángulos podemos usar una calculadora para ver que

$$x = 20.25 - 10.17 = 10.08 \quad \text{y} \quad y = 12.5 - 4.75 = 7.75$$

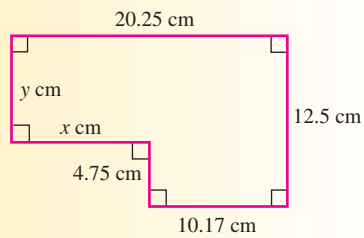


FIGURA 9.51

El perímetro P de la figura es

$$\begin{aligned} P &= 20.25 + 12.5 + 10.17 + 4.75 + \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ &= 20.25 + 12.5 + 10.17 + 4.75 + \mathbf{10.08} + \mathbf{7.75} \end{aligned}$$

Podemos usar una calculadora para evaluar la expresión en el lado derecho introduciendo estos números y oprimiendo estas teclas.

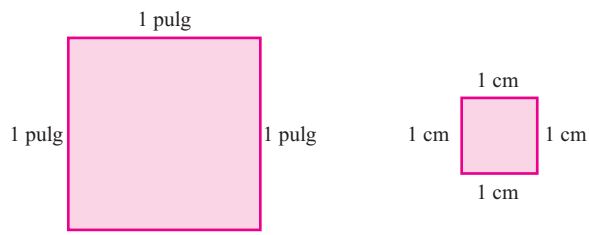
20.25 [+] 12.5 [+] 10.17 [+] 4.75 [+] 10.08 [+] 7.75 [=]

65.5

El perímetro es 65.5 centímetros.

Áreas de polígonos

Recuerde que el **área** de un polígono es la medida de la cantidad de superficie que encierra. El área se mide en unidades cuadradas, como pulgadas cuadradas o centímetros cuadrados. Vea la figura 9.52.



Una pulgada cuadrada (1 pulg^2) Un centímetro cuadrado (1 cm^2)

FIGURA 9.52

En la vida diaria a menudo usamos áreas. Por ejemplo,

- Para alfombrar un cuarto compramos yardas cuadradas.
- Una lata de pintura cubrirá cierta cantidad de pies cuadrados.
- Para medir cantidades grandes de tierra a menudo usamos millas cuadradas.
- Compramos techado para una casa por "cuadrados". Un cuadrado son 100 pies cuadrados.

El rectángulo que se muestra en la figura 9.53 tiene una longitud de 10 cm y un ancho de 3 centímetros. Si dividimos el rectángulo en cuadrados como se muestra en la figura cada cuadrado representa un área de 1 centímetro cuadrado, superficie encerrada por un cuadrado que mide 1 centímetro de lado. Como hay 3 filas con 10 cuadrados en cada fila, hay 30 cuadrados. Como el rectángulo encierra un área de 30 cuadrados su área es 30 centímetros cuadrados que a menudo se escribe como 30 cm^2.

Este ejemplo ilustra que para encontrar el área de un rectángulo multiplicamos su largo por su ancho.

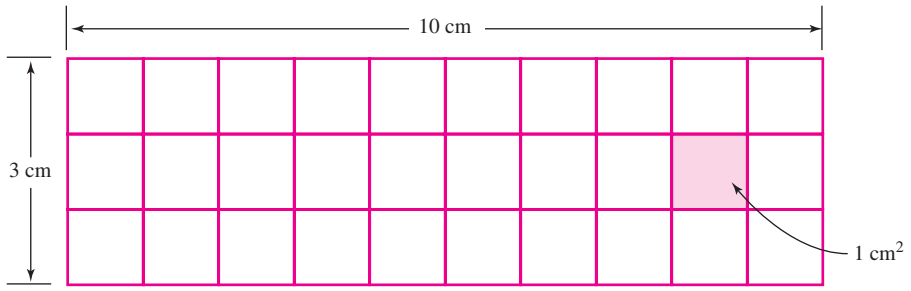
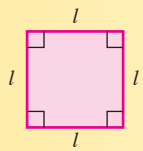
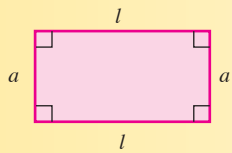
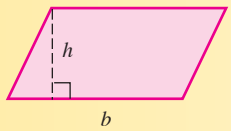


FIGURA 9.53

COMENTARIO No confunda los conceptos de perímetro y área. Perímetro es la distancia alrededor de un polígono. Se mide en unidades lineales como centímetros, pies o millas. Área es una medida de la superficie encerrada por un polígono. Se mide en unidades cuadradas como centímetros cuadrados, pies cuadrados o millas cuadradas.

En la práctica no encontramos áreas contando cuadrados en una figura. En su lugar usamos fórmulas para encontrar áreas de figuras geométricas como se muestra en la tabla 9.1.

Figura	Nombre	Fórmula para el área
	Cuadrado	$A = l^2$, donde l es la longitud de un lado.
	Rectángulo	$A = la$, donde l es el largo y a el ancho
	Paralelogramo	$A = bh$, donde b es la longitud de la base y h es la altura. (Una altura es siempre perpendicular a la base.)

(continúa)

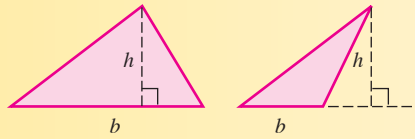
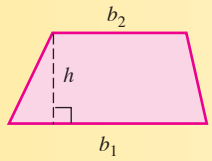
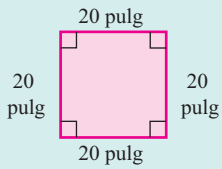
Figura	Nombre	Fórmula para el área
	Triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$, donde b es la longitud de la base y h es la altura. El segmento perpendicular a la base se llama **altura**.
	Trapecio	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, Donde h es la altura del trapecio y b_1 y b_2 representan las longitudes de las bases.

TABLA 9.1

Autoevaluación 5
Encuentre el área del cuadrado mostrado abajo.



Respuesta 400 pulg^2

EJEMPLO 5

Encuentre el área del cuadrado de la figura 9.54.

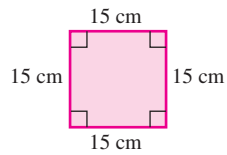


FIGURA 9.54

Solución Podemos ver que la longitud de un lado del cuadrado es 15 centímetros. Podemos encontrar su área usando la fórmula $A = l^2$ y sustituyendo 15 en lugar de l.

$$A = l^2$$
$$= (\mathbf{15})^2 \quad \text{Sustituya 15 en lugar de } l.$$
$$= 225 \quad \text{Evalúe la expresión con exponentes: } 15 \cdot 15 = 225.$$

El área del cuadrado es 225 cm^2.

Autoevaluación 6
Encuentre el número de centímetros cuadrados en 1 metro cuadrado.

Respuesta 10 000 cm^2

EJEMPLO 6

Encuentre el número de pies cuadrados en 1 yarda cuadrada. (Vea la figura 9.55.)

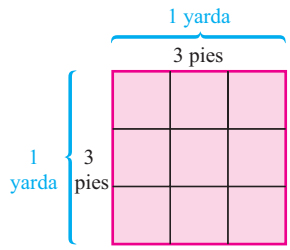


FIGURA 9.55

Solución Como 3 pies = 1 yarda cada lado de 1 yarda cuadrada tiene 3 pies de largo.

$$1 \text{ yarda}^2 = (\mathbf{1} \text{ yarda})^2$$
$$= (\mathbf{3} \text{ pies})^2 \quad \text{Sustituya 3 pies para 1 yarda.}$$
$$= 9 \text{ pies}^2 \quad (3 \text{ pies})^2 = (3 \text{ pies})(3 \text{ pies}) = 9 \text{ pies}^2.$$

Hay 9 pies cuadrados en 1 yarda cuadrada.

Autoevaluación 7
Encuentre el área en pulgadas cuadradas de un rectángulo con dimensiones de 6 pulgadas por 2 pies.

EJEMPLO 7 Deportes femeninos.

El jockey de campo es un deporte de equipo en el que los jugadores usan palos para tratar de meter una bola en la meta del oponente. Encuentre el área del campo rectangular que se muestra en la figura 9.56. Dé la respuesta en pies cuadrados.

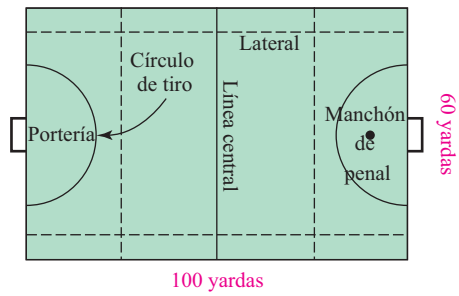


FIGURA 9.56

Solución Para encontrar el área en yardas cuadradas sustituimos 100 en lugar de l y 60 en lugar de a en la fórmula para el área de un rectángulo y simplificamos.

$$\begin{aligned} A &= la \\ &= 100(60) \\ &= 6000 \end{aligned}$$

El área es 6000 yardas cuadradas. Como hay 9 pies cuadrados por yarda podemos convertir este número a pies cuadrados multiplicando 6000 yardas cuadradas por $\frac{9 \text{ pies}^2}{1 \text{ yarda}^2}$.

$$6000 \text{ yardas}^2 = 6000 \text{ yardas}^2 \cdot \frac{9 \text{ pies}^2}{1 \text{ yarda}^2}$$ Multiplique por el factor de conversión de unidades: $\frac{9 \text{ pies}^2}{1 \text{ yarda}^2}$.

$$= 6000 \cdot 9 \text{ pies}^2$$ Las unidades de yardas cuadradas se cancelan.

$$= 54\,000 \text{ pies}^2$$ Multiplique: $6000 \cdot 9 = 54000$.

El área del campo es 54 000 pies^2.

Respuesta 144 pulg^2

Dormitorios

PARA PENSAR A DETALLE

"Los Estados Unidos tienen más de 4000 universidades con 2 millones de estudiantes que viven en dormitorios universitarios." Washingtonpost.com, 2004

El tamaño promedio de un dormitorio en una residencia tiene cerca de 180 pies cuadrados de superficie. Los dormitorios usualmente están amueblados con los artículos siguientes que tienen las dimensiones dadas:

- 2 camas gemelas extralargas (39 pulg de ancho × 80 pulg de largo y 24 pulg de alto)
- 2 gaveteros (18 pulg de ancho × 36 pulg de largo × 48 pulg de ancho)
- 2 libreros (12 pulg de ancho × 24 pulg de largo × 40 pulg de alto)
- 2 escritorios (24 pulg de ancho × 48 pulg de largo × 28 pulg de alto)

¿Cuántos pies cuadrados de superficie quedan?

EJEMPLO 8

Encuentre el área del paralelogramo de la figura 9.57.

FIGURA 9.57

Solución La longitud de la base del paralelogramo es

$$5 \text{ pies} + 25 \text{ pies} = 30 \text{ pies}$$

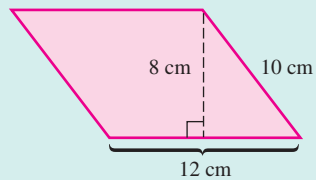
La altura es 12 pies. Para encontrar el área sustituimos 30 en lugar de b y 12 en lugar de h en la fórmula para el área de un paralelogramo y simplificamos.

$$\begin{aligned} A &= bh \\ &= 30(12) \\ &= 360 \end{aligned}$$

El área del paralelogramo es 360 pies^2.

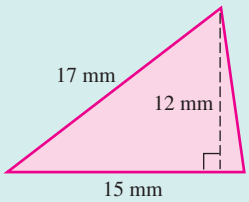
Autoevaluación 8

Encuentre el área del paralelogramo de abajo.



Respuesta 96 cm^2

Autoevaluación 9
Encuentre el área del triángulo de abajo.



Respuesta 90 mm²

EJEMPLO 9

Encuentre el área del triángulo de la figura 9.58.

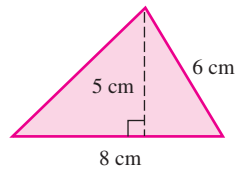


FIGURA 9.58

Solución Sustituimos 8 en lugar de b y 5 en lugar de h en la fórmula para el área de un triángulo y simplificamos. (El lado que mide 6 cm es información adicional que no se usa para calcular el área.)

$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$= \frac{1}{2}(8)(5) \quad \text{La longitud de la base es 8 cm. La altura es 5 cm.}$$
$$= 4(5) \quad \text{Haga la multiplicación: } \frac{1}{2}(8) = 4.$$
$$= 20$$

El área del triángulo es 20 cm².

EJEMPLO 10

Encuentre el área del triángulo de la figura 9.59.

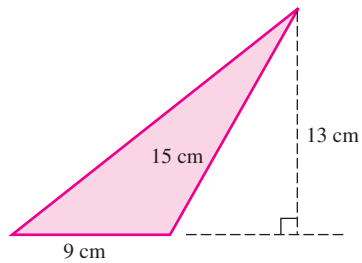


FIGURA 9.59

Solución En este caso la altura cae fuera del triángulo.

$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$= \frac{1}{2}(9)(13) \quad \text{Sustituya 9 en lugar de } b \text{ y 13 en lugar de } h.$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{1}\right)\left(\frac{13}{1}\right) \quad \text{Escriba 9 como } \frac{9}{1} \text{ y 13 como } \frac{13}{1}.$$
$$= \frac{117}{2} \quad \text{Multiplique las fracciones}$$
$$= 58.5 \quad \text{Haga la división.}$$

El área del triángulo es 58.5 cm².

EJEMPLO 11

Encuentre el área del trapecio de la figura 9.60.

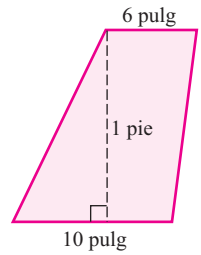


FIGURA 9.60

Solución En este ejemplo, $b_1 = 10$ y $b_2 = 6$. Es incorrecto decir que $h = 1$, porque la altura de 1 pie se tiene que expresar como 12 pulgadas para ser consistente con las unidades de las bases. Por tanto, podemos sustituir 10 en lugar de b_1, y 6 en lugar de b_2, y 12 en lugar de h en la fórmula para encontrar el área de un trapecio y simplificamos.

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

$$= \frac{1}{2}(12)(10 + 6)$$ La longitud de la base inferior es 10 pulg. La longitud de la base superior es 6 pulg. La altura es 12 pulg.

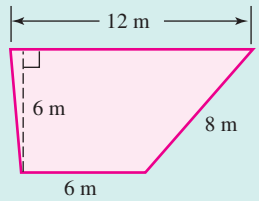
$$= \frac{1}{2}(12)(16)$$ Haga la suma dentro de paréntesis.

$$= 6(16)$$ Haga la multiplicación: $\frac{1}{2}(12) = 6$.

$$= 96$$

El área del trapecio es 96 pulg^2.

Autoevaluación 11
Encuentre el área del trapecio de abajo.



Respuesta 54 m^2

Áreas de figuras que son combinaciones de polígonos

EJEMPLO 12 Alfombrado de una habitación. Un área de sala/comedor tiene un plano como el de la figura 9.61. Si la alfombra cuesta \$29 por yarda cuadrada, incluyendo bajo alfombra e instalación, ¿cuánto costará alfombrar el lugar?

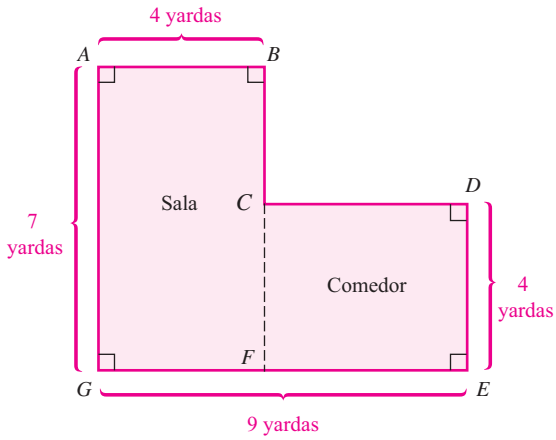


FIGURA 9.61

Solución Primero debemos hallar el área total de la sala y del comedor:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{sala}} + A_{\text{comedor}}$$

Como $\overline{CF}$ divide el espacio en dos rectángulos las áreas de la sala y del comedor se encuentran multiplicando sus longitudes y anchos respectivos.

$$\text{Área de la sala} = la$$
$$= 7(4)$$
$$= 28$$

El área de la sala es 28 yardas^2.

Para encontrar el área del comedor encontramos su longitud restando 4 yardas de 9 yardas para obtener 5 yardas. Notamos que su ancho es 4 yardas.

$$\text{Área del comedor} = la$$
$$= 5(4)$$
$$= 20$$

El área del comedor es 20 yardas^2.

El área total a alfombrarse es la suma de estos dos áreas.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{sala}} + A_{\text{comedor}}$$
$$= 28 \text{ yardas}^2 + 20 \text{ yardas}^2$$
$$= 48 \text{ yardas}^2$$

A \$29 por yarda cuadrada, el costo de alfombrar el lugar será 48 · \$29, o \$1392.

EJEMPLO 13 Área de un lado de una tienda. Encuentre el área de un lado de la tienda de la figura 9.62.

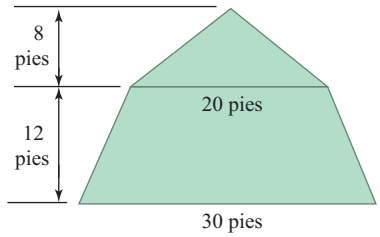


FIGURA 9.62

Solución Cada lado es una combinación de un trapecio y un triángulo. Como las bases de cada trapecio miden 30 pies y 20 pies y la altura es 12 pies, sustituimos 30 pies con b_1, 20 pies con b_2, y 12 pies con h en la fórmula del área de un trapecio.

$$\begin{aligned} A_{\text{trap.}} &= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \\ &= \frac{1}{2}(12)(30 + 20) \\ &= 6(50) \\ &= 300 \end{aligned}$$

El área del trapecio es 300 pies^2.

Como el triángulo tiene una base de 20 pies y una altura de 8 pies sustituimos b con 20 y h con 8 en la fórmula del área de un triángulo.

$$\begin{aligned} A_{\text{triángulo}} &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}(20)(8) \\ &= 80 \end{aligned}$$

El área del triángulo es 80 pies^2.

El área total de un lado de la tienda es

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= A_{\text{trap.}} + A_{\text{triángulo}} \\ &= 300 \text{ pies}^2 + 80 \text{ pies}^2 \\ &= 380 \text{ pies}^2 \end{aligned}$$

El área total es 380 pies^2.

Sección 9.5 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. La distancia alrededor de un polígono se llama _____.
2. El perímetro de un polígono se mide en unidades _____ .
3. La medida de la superficie encerrada por un polígono se llama _____.
4. Si cada lado de un cuadrado mide 1 pie el área encerrada por el cuadrado es 1 pie _____ .
5. El área de un polígono se mide en unidades _____.
6. El segmento que representa lo alto de un triángulo se llama _____.

CONCEPTOS *Trace y rotule las figuras descritas.*

7. Dos rectángulos distintos pero que cada uno tenga un perímetro de 40 pulg.
8. Dos rectángulos distintos pero que cada uno tenga un área de 40 pulg.^{2}

9. Un cuadrado con un área de 25 m^2

10. Un cuadrado con perímetro de 20 m

11. Un paralelogramo con área de 15 $yardas^2$

12. Un triángulo con área de 20 $pies^2$

13. Una figura que consiste de la combinación de dos rectángulos cuyo área total es 80 $pies^2$

14. Una figura que consiste de una combinación de un rectángulo y un cuadrado cuyo área total es 164 $pies^2$

NOTACIÓN *Llene los espacios*

15. La fórmula para el perímetro de un cuadrado es $P =$ ____.

16. La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P =$ ____.

17. El símbolo 1 $pulg^2$ significa una _____.

18. Un metro cuadrado se expresa como 1 m ____.

19. La fórmula para el área de un cuadrado es $A =$ ____.

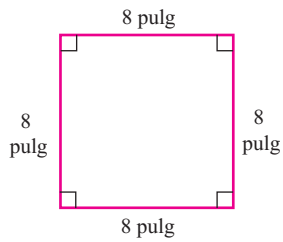
20. La fórmula para el área de un rectángulo es $A =$ ____.

21. La fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ da el área de un _____.

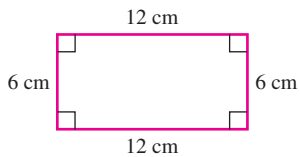
22. La fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ da el área de un _____.

PRÁCTICA *Encuentre el perímetro de cada figura.*

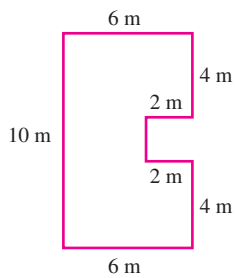
23.



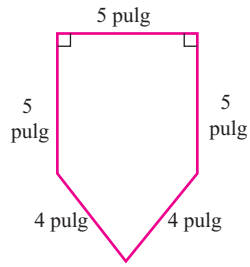
24.



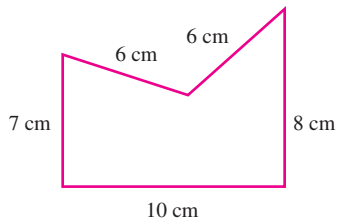
25.



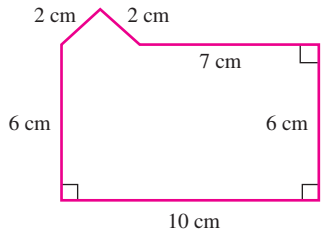
26.



27.



28.



Resuelva los problemas.

29. Encuentre el perímetro de un triángulo isósceles con una base de longitud 21 centímetros y lados de longitud 32 centímetros.

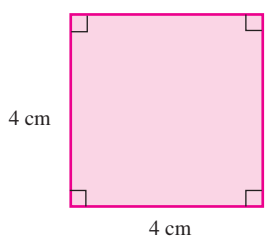
30. El perímetro de un triángulo isósceles es 80 metros. Si la longitud de un lado es 22 metros, ¿cuánto mide la base?

31. El perímetro de un triángulo equilátero es 85 pies. Encuentre la longitud de los lados.

32. Un triángulo isósceles con lados de 49.3 pulg. tiene un perímetro de 121.7 pulgadas. Encuentre la longitud de la base.

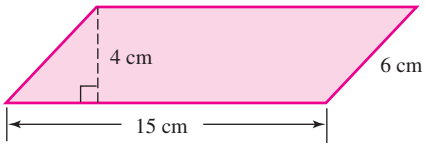
Encuentre el área de la parte sombreada de cada figura.

33.

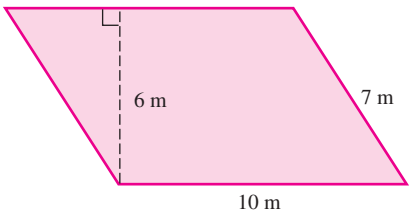


34.

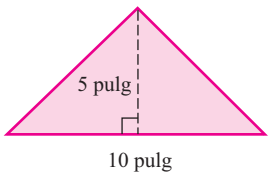
35.



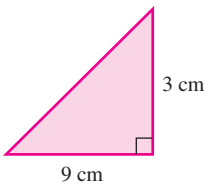
36.



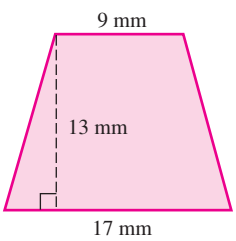
37.



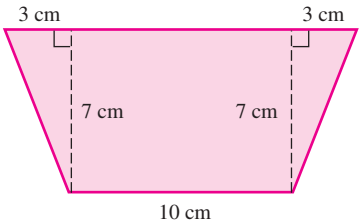
38.



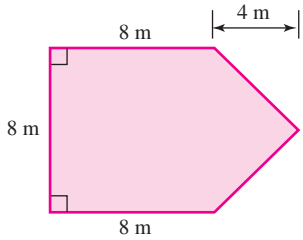
39.



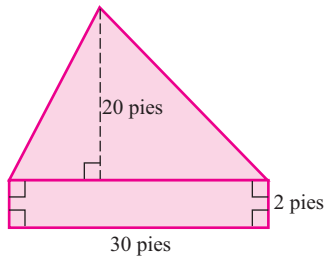
40.



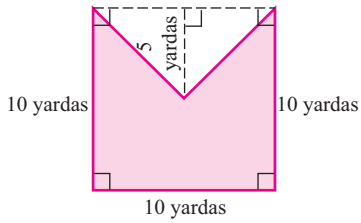
41.



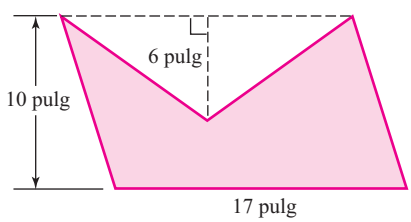
42.



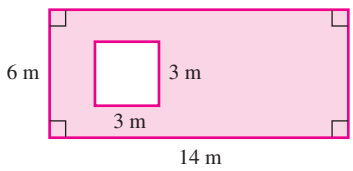
43.



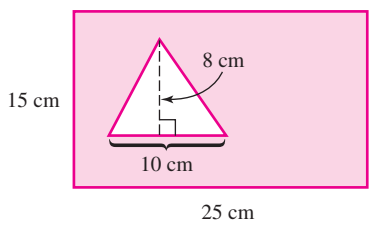
44.



45.



46.



47. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 pie cuadrado?

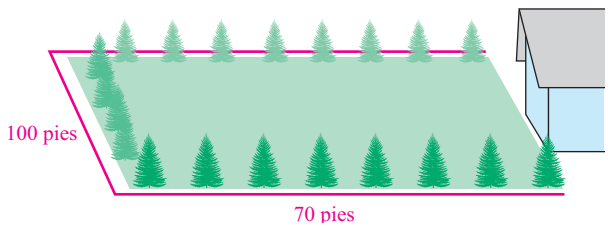
48. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en 1 yarda cuadrada?

APLICACIONES

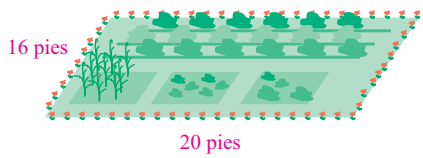
49. CERCADO DE PATIOS Un hombre quiere encerrar un patio rectangular con cerca que cuesta $12.50 por pie, incluyendo la instalación. Encuentre el costo de cercar el patio si sus dimensiones son 110 pies por 85 pies.

50. ENMARCADO DE RETRATOS Encuentre el costo de enmarcar un retrato rectangular con dimensiones de 24 pulgadas por 30 pulgadas si el costo del material para enmarcar es $8.46 por pie, incluyendo el barnizado.

51. SIEMBRA DE CORTINAS DE ÁRBOLES Una mujer quiere plantar una cortina de pinos alrededor de tres lados de su patio trasero. Si planta los árboles a 3 pies de distancia ¿cuántos árboles necesitará?



52. PLANTACIÓN DE FLORES Una jardinera quiere plantar un seto de flores alrededor del jardín para alejar a los conejos. ¿Cuántas plantas necesitará si deja 6 pulgadas entre plantas?



53. COMPRA DE UN PISO ¿Qué es más caro: un piso de mosaicos cerámicos que cuesta $3.75 por pie cuadrado o linóleo que cuesta $34.95 por yarda cuadrada?

54. COMPRA DE UN PISO ¿Qué es más barato: un piso de madera que cuesta $5.95 por pie cuadrado o un piso alfombrado que cuesta $37.50 por yarda cuadrada?

55. ALFOMBRADO DE UN CUARTO Un cuarto rectangular tiene 24 pies de largo y 15 pies de ancho. A $30 por yarda cuadrada, ¿cuánto costará alfombrar el cuarto? (Suponga que no hay desperdicio.)

56. ALFOMBRADO DE UN CUARTO Una sala rectangular mide 30 por 18 pies. A $32 por yarda cuadrada, ¿cuánto costará alfombrar el cuarto? (Suponga que no hay desperdicio.)

57. COBERTURA DE UN PISO Un sótano rectangular mide 14 por 20 pies. Las losetas de vinyl de 1 pie^2 cuestan $1.29 cada una. ¿Cuánto costarán las losetas para cubrir todo el piso?

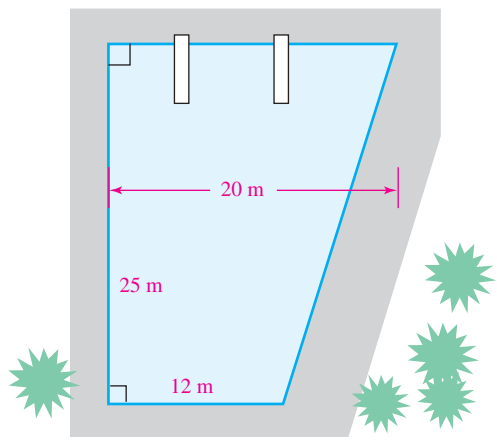
58. PINTADO DE UN GRANERO La pared norte de un granero es un rectángulo de 23 pies de alto y 72 pies de largo. Hay cinco ventanas en la pared cada una de 4 por 6 pies. Si un galón de pintura cubre 300 pies^2, ¿cuántos galones de pintura debe comprar el pintor para pintar la pared?

59. CONFECCIÓN DE UNA VELA Si el nylon cuesta $12 por yarda cuadrada, ¿cuánto costaría la tela para hacer una vela triangular con base de 12 pies y altura de 24 pies?

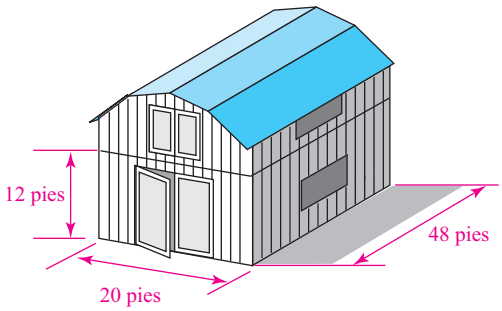
60. PINTURA DE UN ALERO El alero de una bodega es un triángulo isósceles con una altura de 4 yardas y una base de 23 yardas. Requerirá una mano de imprimación y una de acabado para pintar el triángulo. El imprimador cuesta $17 por galón y la pintura de acabado cuesta $23 por galón. Si un galón cubre 300 pies cuadrados, ¿cuánto costará pintar el alero sin incluir la mano de obra?

61. GEOGRAFÍA Use las dimensiones del trapecio superpuesto al estado de Nevada para estimar el área del "Estado de Plata".

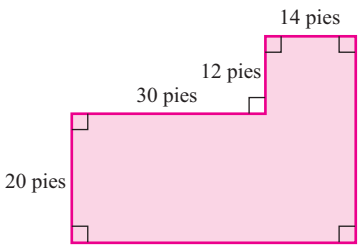
62. PISCINAS Una piscina tiene la forma que se muestra. ¿Cuántos metros cuadrados de cubierta de plástico se necesitarán para cubrir la piscina? ¿Cuánto costará la cubierta si es a $2.95 por metro cuadrado? (Suponga que no hay desperdicio.)



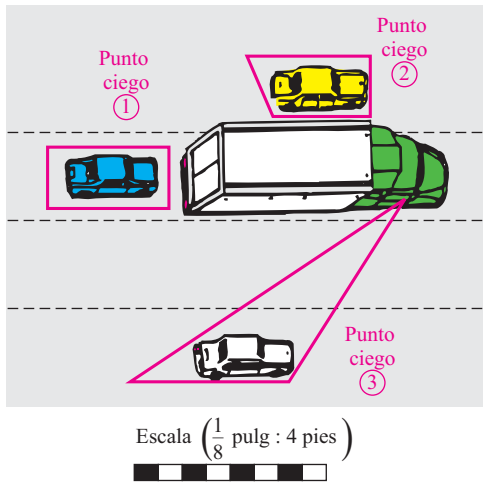
63. CARPINTERÍA ¿Cuántas hojas de tablarroca se necesitan para cubrir las paredes en el primer piso del granero que se muestra? (Suponga que los carpinteros cubrirán las paredes por completo y luego recortarán las puertas y paredes.)



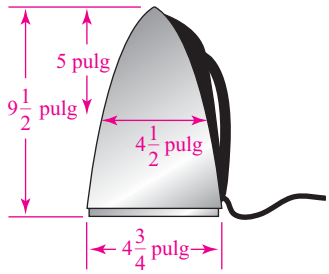
64. CARPINTERÍA Si cuesta $90 por pie cuadrado construir una casa de un piso en el norte de Wisconsin, estime el costo de construir la casa cuyo plano se muestra.



65. SEGURIDAD AL CONDUCIR La ilustración muestra las áreas en una carretera en las que el conductor de un camión no puede ver usando los espejos retrovisores. Use la escala para determinar las dimensiones aproximadas de cada punto ciego. Después estime el área de cada una.



66. ESTIMACIÓN DEL ÁREA Estime el área de la base de la plancha pensando en que es una combinación de un trapecio y un triángulo.



POR ESCRITO

67. Explique la diferencia entre perímetro y área.

68. ¿Por qué es necesario que el área se mida en unidades cuadradas?

REPASO *Haga los cálculos. Escriba todas las fracciones impropias como números mixtos.*

69. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

70. $\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

71. $3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3}$

72. $7\frac{5}{8} - 2\frac{5}{6}$

73. $7\frac{1}{2} \div 5\frac{2}{5}$

74. $5\frac{3}{4} \cdot 2\frac{5}{6}$

9.6 Círculos

• Círculos • Circunferencia de un círculo • Área de un círculo

En esta sección discutimos los círculos, una de las figuras geométricas más útiles. De hecho, el descubrimiento del fuego y de las ruedas circulares son dos de los eventos más importantes en la historia de la raza humana.

Círculos

Círculos

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos de un plano que están equidistantes de un punto dado llamado **centro**.

Un segmento dibujado desde el centro de un círculo a un punto en el círculo se llama **radio**. De la definición se sigue que todos los radios del mismo círculo son de la misma longitud.

Una **cuerda** de un círculo es un segmento de recta que conecta dos puntos en un círculo. Un **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro del círculo. Como un diámetro D de un círculo mide dos veces el largo un radio r, tenemos

$$D = 2r$$

Cada una de las definiciones previas se ilustra en la figura 9.63 en la cual O es el centro del círculo.

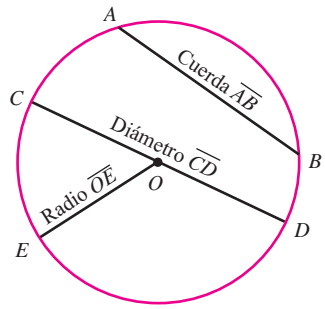


FIGURA 9.63

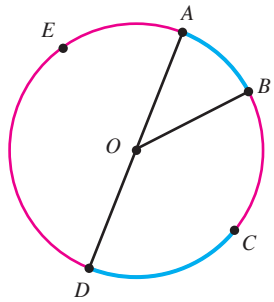


FIGURA 9.64

Cualquier parte de un círculo se llama **arco**. En la figura 9.64 la parte del círculo del punto A al punto B es $\overset{\frown}{AB}$, se lee como "arco AB". $\overset{\frown}{CD}$ es la parte del círculo del punto C al punto D. Un arco que sea la mitad del círculo se llama **semicírculo**.

Semicírculo

Un **semicírculo** es un arco de círculo cuyos puntos extremos son los puntos extremos de un diámetro.

Si el punto O es el centro del círculo de la figura 9.64, $\overline{AD}$ es un diámetro y $\overset{\frown}{AED}$ es un semicírculo. La letra E intermedia se usa para distinguir al semicírculo $\overset{\frown}{AED}$ del semicírculo $\overset{\frown}{ABCD}$.

Un arco que es más corto que un semicírculo se llama **arco menor**. Un arco que es más largo que un semicírculo es un **arco mayor**. En la figura 9.64

$\overset{\frown}{AB}$ es un arco menor y $\overset{\frown}{ABCDE}$ es un arco mayor

Circunferencia de un círculo

Desde la historia antigua los matemáticos han conocido que la razón de la distancia alrededor de un círculo (circunferencia) dividida entre la longitud de su diámetro es aproximadamente 3. Los primeros reyes, capítulo 7, de la Biblia describe un tanque redondo de bronce que tenía 15 pies de orilla a orilla y 45 pies de circunferencia, $\frac{45}{15} = 3$. Hoy tenemos un mejor valor para esta razón conocida como π (pi). Si C es la circunferencia de un círculo y D es la longitud de su diámetro, entonces

$$\pi = \frac{C}{D}, \quad \text{donde } \pi = 3.141592653589\ldots$$

$\frac{22}{7}$ y 3.14 se usan a menudo como estimaciones de π.

Si multiplicamos ambos lados por $\pi = \frac{C}{D}$ por D, tenemos la formula siguiente.

Circunferencia de un círculo

La circunferencia de un círculo está dada por la fórmula

$C = \pi D$ donde C es la circunferencia y D es la longitud del diámetro

Como el diámetro de un círculo mide el doble que un radio se puede sustituir D con $2r$ en la fórmula $C = \pi D$ para obtener otra fórmula para la circunferencia C.

$C = 2\pi r$

Autoevaluación 1

Encuentre la circunferencia de un círculo, hasta la décima más cercana, que tiene un radio de 12 metros.

Respuesta 75.4 metros

EJEMPLO 1 Encuentre la circunferencia de un círculo que tiene un diámetro de 10 centímetros. (Vea la figura 9.65.)

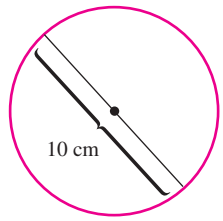


FIGURA 9.65

Solución Sustituimos D con 10 en la fórmula para la circunferencia de un círculo.

$$\begin{aligned} C &= \pi \boldsymbol{D} \\ &= \pi(\boldsymbol{10}) \\ &\approx 3.14(10) \quad \text{Reemplace } \pi \text{ con una aproximación: } \pi \approx 3.14. \\ &\approx 31.4 \end{aligned}$$

La circunferencia es aproximadamente 31.4 centímetros.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Cálculo de las vueltas de una llanta

Cuando se oprime la tecla $\boxed{\pi}$ de una calculadora científica (en algunos modelos la tecla $\boxed{2nd}$ se tiene que oprimir primero) se muestra una aproximación a π. Para ilustrar cómo usar esta tecla considere el problema siguiente. ¿Cuántas veces girará una llanta de 15 pulgadas cuando un automóvil hace un recorrido de 25 millas?

Primero encontramos la circunferencia de la llanta.

$$\begin{aligned} C &= \pi \boldsymbol{D} \\ &= \pi(\boldsymbol{15}) \quad \text{Sustituya } D \text{ con 15, el diámetro de la llanta.} \\ &= 15\pi \quad \text{Normalmente escribimos un producto como } \pi(15) \text{ de tal forma que } \pi \text{ sea el segundo factor.} \end{aligned}$$

La circunferencia de la llanta es 15π pulgadas.

Cuando convertimos 25 millas a pulgadas usamos dos factores de conversión de unidades.

$$\frac{25}{1}\text{ millas} \cdot \frac{5280\text{ pies}}{1\text{ millas}} \cdot \frac{12\text{ pulgadas}}{1\text{ pie}} = 25(5280)(12)\text{ pulgadas.}$$

La distancia total del recorrido es 25(5280)(12) pulgadas.

Finalmente dividimos la distancia total del recorrido entre la circunferencia de la llanta para obtener

$$\text{Número total de vueltas de la llanta} = \frac{25(5280)(12)}{15\pi}$$

Para aproximar el valor de $\frac{25(5280)(12)}{15\pi}$ usando una calculadora científica introducimos

$\boxed{(}$ 25 $\boxed{\times}$ 5280 $\boxed{\times}$ 12 $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 15 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 33613.52398

La llanta da alrededor de 33 614 vueltas.

EJEMPLO 2 **Arquitectura.** Una ventana Norman se construye añadiendo una ventana semicircular sobre una ventana rectangular. Encuentre el perímetro de la ventana Norman que se muestra en la figura 9.66.

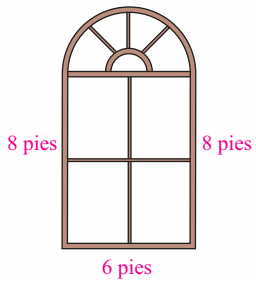


FIGURA 9.66

Solución La ventana es una combinación de un rectángulo y un semicírculo. El perímetro de la parte rectangular es

$$P_{\text{parte rectangular}} = 8 + 6 + 8 = 22 \quad \text{Sume sólo 3 lados.}$$

El perímetro del semicírculo es la mitad de la circunferencia de un círculo que tiene un diámetro de 6 pies.

$$P_{\text{semicírculo}} = \frac{1}{2}\pi \boldsymbol{D}$$

$$= \frac{1}{2}\pi(\boldsymbol{6}) \quad \text{Sustituya } D \text{ con 6.}$$

$$\approx 9.424777961 \quad \text{Use una calculadora.}$$

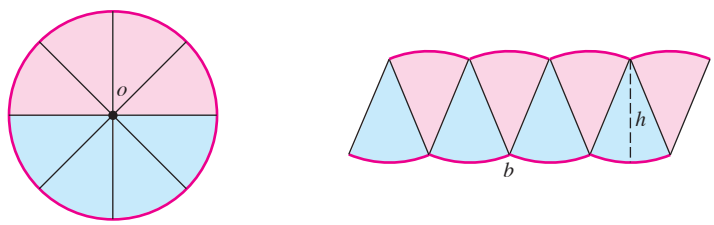
El perímetro total es la suma de las dos partes.

$$P_{\text{total}} \approx 22 + 9.424777961$$
$$\approx 31.424777961$$

El perímetro de la ventana es 31.42 pies hasta la centésima más cercana.

Área de un círculo

Si dividimos el círculo que se muestra en la figura 9.67(a) en un número par de piezas con forma de rebanada de pastel y las reacomodamos como se muestra en la figura 9.67(b) tenemos una figura con apariencia de paralelogramo. La figura tiene una base que es sólo la mitad de una circunferencia de un círculo y su altura es cerca de la misma longitud de un radio del círculo.



(a) **(b)**

FIGURA 9.67

Si dividimos el círculo en más y más piezas con forma de rebanada de pastel la figura se parecerá más y más a un paralelogramo. Podemos encontrar su área usando la fórmula del área de un paralelogramo.

$$A = bh$$
$$= \frac{1}{2}Cr \quad \text{Sustituimos } \frac{1}{2} \text{ de la circunferencia en lugar de } b, \text{ y } r \text{ con la altura.}$$
$$= \frac{1}{2}(2\pi r)r \quad \text{Haga la sustitución: } C = 2\pi r.$$
$$= \pi r^2 \quad \text{Simplifique: } \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ y } r \cdot r = r^2.$$

Área de un círculo

El **área de un círculo** de radio r está dada por

$$A = \pi r^2$$

Autoevaluación 3

Encuentre el área de un círculo con diámetro de 12 pies hasta la décima más cercana.

Respuesta 113.1 pies^2.

EJEMPLO 3 Encuentre el área del círculo de la figura 9.68 hasta la décima más cercana.

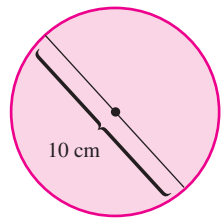


FIGURA 9.68

Solución Como la longitud del diámetro es 10 centímetros y la longitud del diámetro es el doble de la longitud de un radio, la longitud del radio es 5 centímetros. Para encontrar el área del círculo sustituimos r con 5 en la fórmula del área de un círculo.

$$A = \pi r^2$$
$$= \pi(5)^2$$
$$= 25\pi$$
$$\approx 78.53981634 \quad \text{Use una calculadora.}$$

El área es 78.5 cm^2 hasta la décima más cercana.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Pintura de plataforma para helicóptero

La pintura anaranjada está disponible en recipientes de un galón que cuestan \$19 cada uno y cada galón cubrirá 375 pies^2. Para calcular cuánto costará la pintura para cubrir una plataforma circular para helicóptero de 60 pies de diámetro, calculamos primero el área de la plataforma del helicóptero.

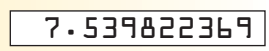
$$A = \pi r^2$$
$$= \pi(30)^2 \quad \text{Sustituimos } r \text{ con la mitad de 60.}$$
$$= 30^2\pi$$

El área de la plataforma es $30^2\pi$ pies^2. Como cada galón de pintura cubre 375 pies^2, podemos encontrar el número de galones de pintura necesarios dividiendo $30^2\pi$ entre 375.

$$\text{Número de galones necesarios} = \frac{30^2\pi}{375}$$

Para aproximar el valor de $\dfrac{30^2\pi}{375}$ usando una calculadora científica, introducimos

30 $[x^2]$ $[\times]$ $[\pi]$ $[=]$ $[\div]$ 375 $[=]$



El resultado es aproximadamente 7.54. Como la pintura viene sólo en galones completos el pintor necesitará 8 galones. El costo de la pintura será 8(\$19) o \$152.

EJEMPLO 4 Encuentre el área sombreada en la figura 9.69.

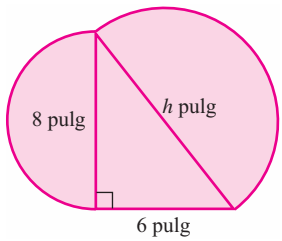


FIGURA 9.69

Solución La figura es una combinación de un triángulo y dos semicírculos. Por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa h del triángulo rectángulo es

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

El área del triángulo es

$$A_{\text{triángulo rectángulo}} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(6)(8) = 3(8) = 24$$

El área encerrada por el semicírculo menor es

$$A_{\text{semicírculo menor}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(4)^2 = \frac{1}{2}\pi(16) = 8\pi$$

El área encerrada por el semicírculo mayor es

$$A_{\text{semicírculo mayor}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(5)^2 = \frac{1}{2}\pi(25) = 12.5\pi$$

El área total es

$$A_{\text{total}} = 24 + 8\pi + 12.5\pi \approx 88.4026494$$ Use una calculadora.

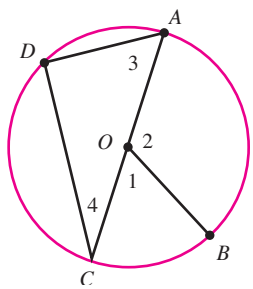
El área es 88.40 pulg^2 hasta la centésima más cercana.

Sección 9.6 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. Un segmento dibujado del centro de un círculo a un punto del círculo se llama _____.
2. Un segmento que une dos puntos de un círculo se llama _____.
3. Un _____ es una cuerda que pasa por el centro de un círculo.
4. Un arco que es la mitad de un círculo completo es un _____.
5. Un arco que es más corto que un semicírculo se llama arco _____ .
6. Un arco que es más largo que un semicírculo se llama arco _____ .
7. La distancia alrededor de un círculo se llama _____.
8. La superficie que encierra un círculo es su _____.

CONCEPTOS *Refiérase a la ilustración.*

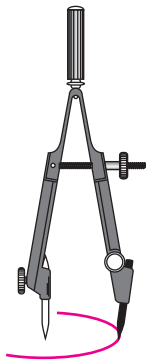


9. Nombre los radios.
10. Nombre un diámetro.
11. Nombre las cuerdas.
12. Nombre los arcos menores.
13. Nombre los semicírculos.
14. Nombre los arcos mayores.

15. Si conoce el radio de un círculo, ¿cómo puede encontrar su diámetro?

16. Si conoce el diámetro de un círculo, ¿cómo puede encontrar su radio?

17. Suponga que los dos brazos del compás que se muestra a la derecha se ajustan de forma tal que la distancia entre los extremos con punta sea de 1 pulgada. Luego se traza el círculo.



a. ¿Cuál será el radio del círculo?

b. ¿Cuál será el diámetro del círculo?

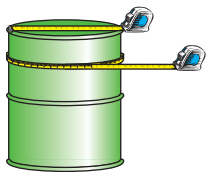
c. ¿Cuál será la circunferencia del círculo?

d. ¿Cuál será el área del círculo?

18. Suponga que encontramos la distancia alrededor de una lata y la distancia a través de la lata usando una cinta de medir como se muestra. Después podemos hacer una comparación en forma de la razón:

$$\frac{\text{distancia alrededor de la lata}}{\text{distancia a tráves de la lata}}$$

después de que hagamos la división indicada el resultado ¿a qué número será cercano?



19. Cuando se evalúa $\pi(6)^2$, ¿qué operación se debe hacer primero?

20. Redondee $\pi = 3.141592653589\ldots$ hasta la centésima más cercana.

NOTACIÓN *Llene los espacios.*

21. El símbolo $\overset{\frown}{AB}$ se lee como _____ _____.

22. El valor de π hasta la centésima más cercana es _____.

23. La fórmula para la circunferencia de un círculo es $C =$ _____ o $C = 2\pi$ _____.

24. La fórmula $A = \pi r^2$ da el área de un _____.

25. Si C es la circunferencia de un círculo y D es su diámetro entonces $\frac{C}{D} =$ _____.

26. Si D es el diámetro de un círculo y r su radio entonces $D =$ _____ r.

27. Escriba $\pi(8)$ de una forma mejor.

28. ¿Qué significa $2\pi r$?

PRÁCTICA *Resuelva los problemas. Las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo de la aproximación de π que se utilice.*

29. Encuentre la circunferencia de un círculo que tiene diámetro de 12 pulgadas hasta la centésima más cercana.

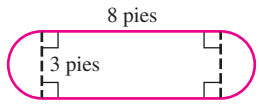
30. Encuentre la circunferencia de un círculo que tiene diámetro de 20 pies hasta la centésima más cercana.

31. Encuentre el diámetro de un círculo que tiene una circunferencia de 36π metros.

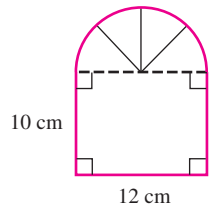
32. Encuentre el radio de un círculo que tiene una circunferencia de 50π metros.

Encuentre el perímetro de cada figura hasta la centésima más cercana.

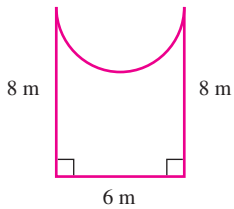
33.



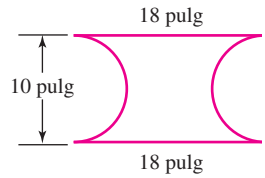
34.



35.

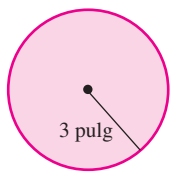


36.

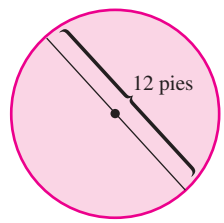


Encuentre el área de cada círculo hasta la décima más cercana.

37.

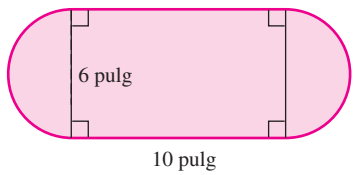


38.

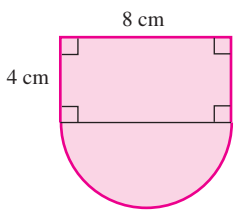


Encuentre el área de cada círculo hasta la décima más cercana.

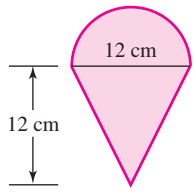
39.



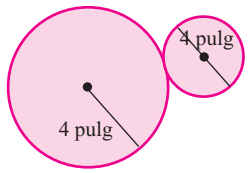
40.



41.

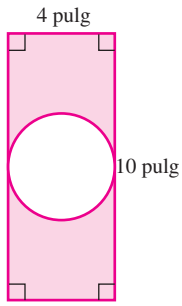


42.

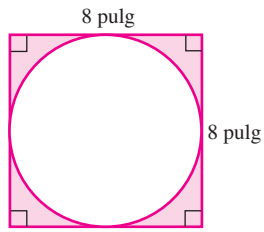


Encuentre el área de las regiones sombreadas hasta la décima más cercana.

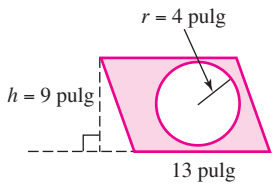
43.



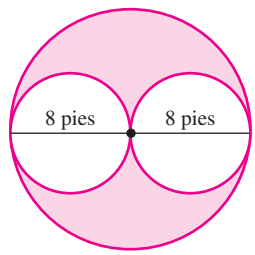
44.



45.



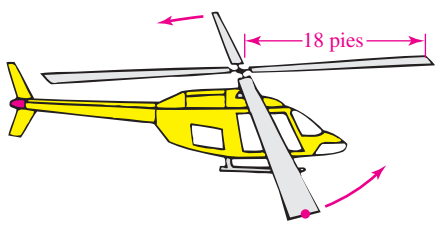
46.



APLICACIONES *Dé las respuestas hasta la centésima más cercana. Las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo de la aproximación de π que se utilice.*

47. ÁREA DE UN LAGO REDONDO El Lago Redondo tiene una orilla circular que es de 2 millas de diámetro. Encuentre el área del lago.

48. HELICÓPTEROS ¿Qué distancia recorre la punta de una hélice cuando da una vuelta completa?



49. SEQUOIAS GIGANTES El árbol sequoia más grande es el Árbol General Sherman en el Parque Nacional Sequoia en California. De hecho es considerado la cosa viviente más grande en el mundo. De acuerdo con el Libro de *Récords Mundiales Guinness* tiene una circunferencia de 102.6 pies medida $4\frac{1}{2}$ pies arriba del suelo. ¿Qué diámetro tiene a esa altura?

50. TRAMPOLINES La distancia desde el centro de un trampolín a la orilla de su marco de acero es 7 pies. La almohadilla protectora que cubre los resortes tiene 15 pulgadas de ancho. Encuentre el área de la superficie circular de salto en el trampolín en pies cuadrados.

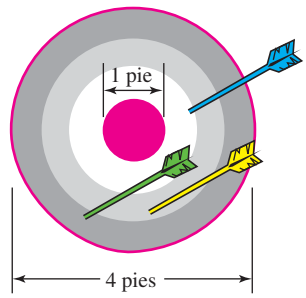
51. TROTE Joan quiere trotar 10 millas en una pista circular de $\frac{1}{4}$ de diámetro. ¿Cuántas vueltas debe dar?

52. ARREGLOS DE LA ROTONDA La rotonda en un capitolio estatal es un área circular de 100 pies de diámetro. La legislatura desea destinar dinero para cubrir con mosaico el piso de la rotonda. La oferta más baja es \$83 por yarda cuadrada, incluyendo la instalación. ¿Cuánto debe gastar la legislatura?

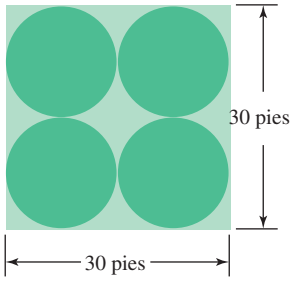
53. VUELTA A LA TIERRA Una banda de acero se tiende ajustadamente alrededor del ecuador de la Tierra. La banda se afloja después aumentando su longitud en 10 pies y la parte floja se distribuye parejo a lo largo de la banda completa. ¿Qué tan levantada queda la banda? (*Sugerencia*: No necesita conocer la circunferencia de la Tierra.)

54. CÍRCULOS CONCÉNTRICOS Dos círculos se llaman **círculos concéntricos** si tienen el mismo centro. Encuentre el área de la banda entre dos círculos concéntricos si sus diámetros son 10 centímetros y 6 centímetros.

55. ARQUERÍA Vea la ilustración. Encuentre el área del blanco completo y del ojo de buey. ¿Qué porcentaje del área del blanco es el ojo de buey?



56. DISEÑO DE PAISAJES Vea la ilustración. ¿Qué tanto del césped no se riega por los rociadores colocados en el centro de cada círculo?



POR ESCRITO

57. Explique qué significa circunferencia de un círculo.

58. Explique qué significa área de un círculo.

59. Explique el significado de π.

60. Distinga entre arco mayor y arco menor.

61. Explique qué significa que un automóvil tenga un radio de giro pequeño.

62. La palabra *circunferencia* significa distancia alrededor de un círculo. En sus propias palabras explique qué significan las oraciones siguientes:

a. El sueño del dueño de un barco era circunnavegar el globo.

b. Los padres de los adolescentes piensan que sus hijos siempre tratan de brincarse las reglas.

c. A un grupo de alumnos se les mostró un dibujo de un círculo *circunscrito* alrededor de un triángulo equilátero.

REPASO

63. Cambie $\frac{9}{10}$ a un porcentaje.

64. Cambie $\frac{7}{8}$ a un porcentaje.

65. COSTOS UNITARIOS Un paquete de 24 onzas de frijoles verdes se vende a $1.29. Dé el costo unitario en centavos por onza.

66. MILLAJE Un carro recorrió 1235 millas con 51.3 galones de gasolina y otro recorrió 1456 con 55.78 galones. ¿Qué auto tuvo el mejor millaje de gasolina?

67. ¿Cuántos lados tiene un pentágono?

68. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo?

9.7 Área superficial y volumen

- Volúmenes de sólidos
- Áreas superficiales de sólidos rectangulares
- Volúmenes y áreas superficiales de esferas
- Volúmenes de cilindros
- Volúmenes de conos
- Volúmenes de pirámides

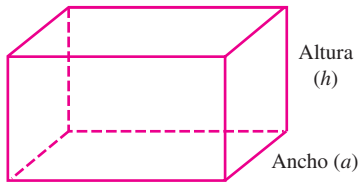
En esta sección discutimos una medida de la capacidad llamada **volumen**. Los volúmenes son medidos en unidades cúbicas, como pulgadas cúbicas, yardas cúbicas o centímetros cúbicos. Por ejemplo,

- Compramos fragmentos por yardas cúbicas.
- Medimos la capacidad de un refrigerador en pies cúbicos.
- A menudo se miden cantidades de medicamentos en centímetros cúbicos.

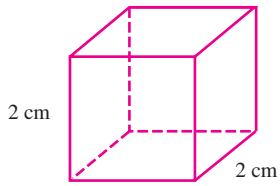
También discutimos área superficial. Se necesita poder calcular áreas de superficies para resolver problemas como calcular la cantidad de material necesaria para hacer una caja de cartón o una pelota de playa de plástico.

Volúmenes de sólidos

Un **sólido rectangular** y un **cubo** son dos sólidos geométricos comunes. (Vea la figura 9.70 en la página siguiente.)



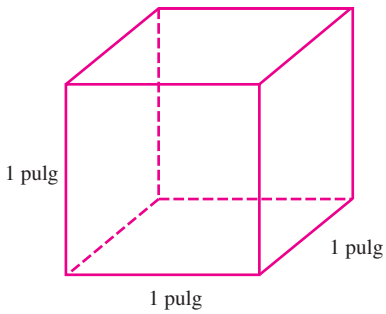
Sólido rectangular



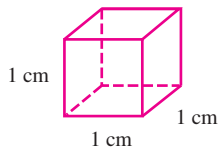
Cubo

FIGURA 9.70

El **volumen** de un sólido rectangular es una medida del espacio que encierra. Dos unidades comunes de volumen son las pulgadas cúbicas (pulg^3) y los centímetros cúbicos (cm^3). (Vea la figura 9.71.)



1 pulgada cúbica (1 pulg^3)



1 centímetro cúbico (1 cm^3)

FIGURA 9.71

Si dividimos el sólido rectangular mostrado en la figura 9.72 en cubos, cada uno representa un volumen de 1 cm^3. Como hay 2 niveles con 12 cubos en cada nivel el volumen del sólido rectangular es 24 cm^3.

En la práctica no encontramos volúmenes contando cubos. En vez de eso, usamos las fórmulas que se muestran en la tabla 9.2.

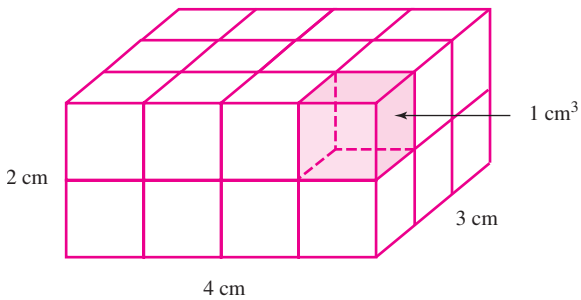
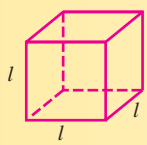
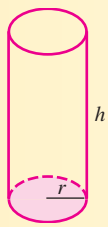
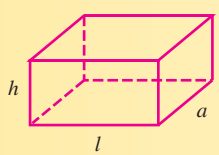
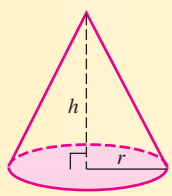
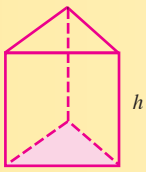
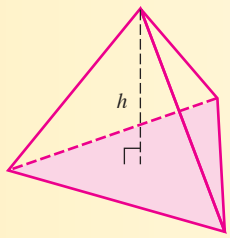
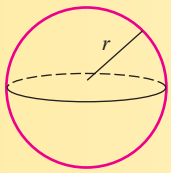


FIGURA 9.72

Figura	Nombre	Volumen	Figura	Nombre	Volumen
	Cubo	$V = l^3$		Cilindro	$V = \pi r^2 h$ o $V = Bh$*
	Sólido rectangular	$V = lah$		Cono	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ o $V = \frac{1}{3}Bh$*

*B representa el área de la base que está sombreada en la figura.

(continúa)

Figura	Nombre	Volumen	Figura	Nombre	Volumen
	Prisma	$V = Bh^*$		Pirámide	$V = \frac{1}{3}Bh^*$
	Esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$			

*B representa el área de la base que está sombreada en la figura

TABLA.9-2

COMENTARIO La altura de un sólido geométrico siempre se mide a lo largo de una línea perpendicular a su base. En cada uno de los sólidos de la figura 9.73, h es la altura.

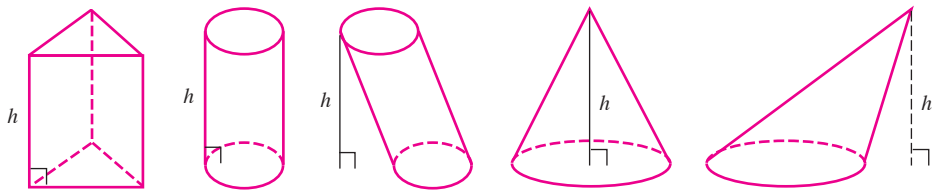


FIGURA 9.73

Autoevaluación 1
¿Cuántos centímetros cúbicos hay en un metro cúbico?

EJEMPLO 1

¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en un pie cúbico? (Vea la figura 9.74.)

Solución Como un pie cúbico es un cubo con lados que miden 1 pie cada lado mide 12 pulgadas. Por tanto, el volumen en pulgadas cúbicas es

$$V = l^3 \quad \text{Esta es la fórmula del volumen de un cubo}$$
$$= (\mathbf{12})^3 \quad \text{Sustituya } l \text{ con 12.}$$
$$= 1728$$

Hay 1728 pulgadas cúbicas en 1 pie cúbico.

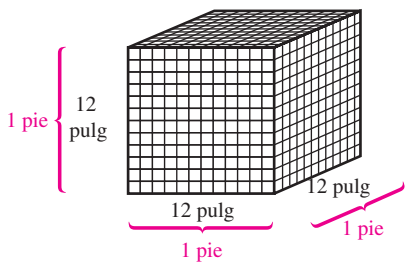


FIGURA 9.74

Respuesta $1\,000\,000\ \text{cm}^3$

Autoevaluación 2
Encuentre el volumen de un sólido rectangular con dimensiones de 8 por 12 por 20 metros.

EJEMPLO 2 Volumen de un depósito de aceite.

Un tanque de almacenamiento de aceite tiene la forma de un sólido rectangular con dimensiones de 17 por 10 por 8 pies. (Vea la figura 9.75.) Encuentre su volumen.

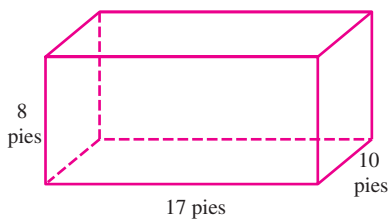


FIGURA 9.75

Solución Para encontrar el volumen sustituimos l con 17, a con 10 y h con 8 en la fórmula $V = lah$ y simplificamos.

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{lah} \\ &= \mathbf{17}(\mathbf{10})(\mathbf{8}) \\ &= 1360 \end{aligned}$$

El volumen es 1360 pies^3.

Respuesta 1920 m^3

EJEMPLO 3 Volumen de un prisma triangular. Encuentre el volumen del prisma triangular de la figura 9.76.

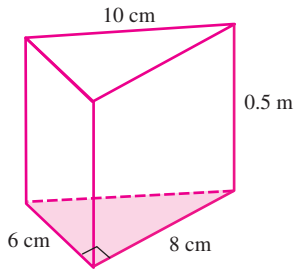


FIGURA 9.76

Solución El volumen del prisma es el área de su base multiplicada por su altura. Como hay 100 centímetros en un metro, la altura en centímetros es

$$\begin{aligned} 0.5 \text{ m} &= 0.5(\mathbf{1 \text{ m}}) \\ &= 0.5(\mathbf{100 \text{ cm}}) \quad \text{Sustituya 1 metro con 100 centímetros.} \\ &= 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

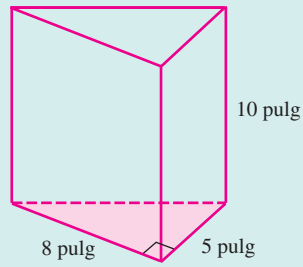
El área de la base triangular es $\frac{1}{2}(6)(8) = 24$ centímetros cuadrados. La altura del prisma es 50 centímetros. Sustituyendo en la fórmula del volumen de un prisma tenemos

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{Bh} \\ &= \mathbf{24}(\mathbf{50}) \\ &= 1200 \end{aligned}$$

El volumen del prisma es 1200 cm^3.

Autoevaluación 3

Encuentre el volumen del prisma triangular de abajo.



Respuesta 200 pulg^3

Áreas superficiales de sólidos rectangulares

El **área superficial** de un sólido rectangular es la suma de las áreas de sus seis lados. La figura 9.77 muestra que podemos desdoblar las caras de una caja de cartón para encontrar una fórmula de su área superficial (AS).

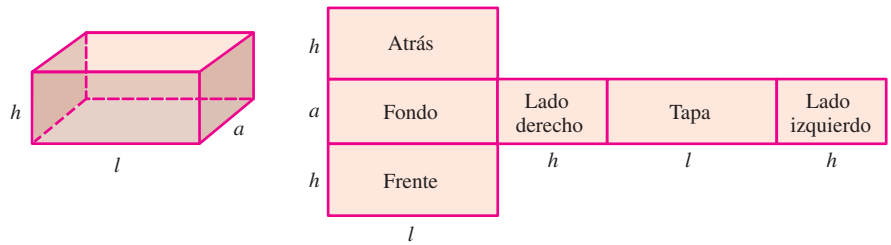


FIGURA 9.77

$$\begin{aligned} AS &= A_{\text{fondo}} + A_{\text{atrás}} + A_{\text{frente}} + A_{\text{lado derecho}} + A_{\text{tapa}} + A_{\text{lado izquierdo}} \\ &= \quad la \quad + \quad lh \quad + \quad lh \quad + \quad ha \quad + \quad la \quad + \quad ha \\ &= 2la + 2lh + 2ha \quad \text{Reduzca términos semejantes.} \end{aligned}$$

Área superficial de un sólido rectangular

El área superficial de un sólido rectangular está dada por la fórmula

$$AS = 2la + 2lh + 2ha$$

donde l es el largo, a es el ancho y h es la altura.

Autoevaluación 4
Encuentre el área superficial de un sólido rectangular con dimensiones de 8 por 12 por 20 metros.

Respuesta 992 m^2

EJEMPLO 4 Área superficial de un tanque de aceite. Un tanque de almacenamiento de aceite tiene la forma de un sólido rectangular con dimensiones de 17 por 10 por 8 pies. (Vea la figura 9.78.) Encuentre el área superficial del tanque.

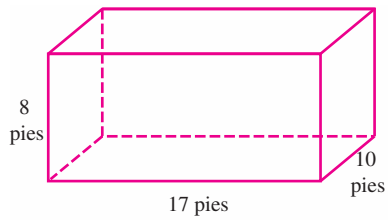


FIGURA 9.78

Solución Para encontrar el área superficial sustituimos l con 17, a con 10 y h con 8 en la fórmula del área superficial y simplificamos.

$$\begin{aligned} AS &= 2la + 2lh + 2ha \\ &= 2(17)(10) + 2(17)(8) + 2(8)(10) \\ &= 340 + 272 + 160 \\ &= 772 \end{aligned}$$

El área superficial es 772 $pies^2$.

Volúmenes y áreas superficiales de esferas

Una **esfera** es una bola hueca redonda. (Vea la figura 9.79.) Los puntos en la esfera están todos a una distancia fija de un punto llamado *centro*. Un segmento trazado del centro de una esfera a un punto sobre la esfera se llama *radio*.

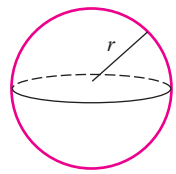


FIGURA 9.79

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Llenado de un tanque de agua

Vea la figura 9.80. Para calcular cuántos pies cúbicos de agua se necesitan para llenar un tanque esférico de agua con un radio de 15 pies sustituimos r con 15 en la fórmula del volumen de una esfera.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(15)^3 \end{aligned}$$

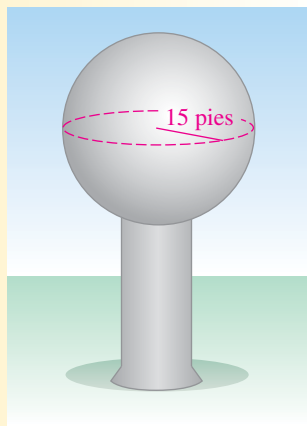


FIGURA 9.80

Para aproximar el valor de $\frac{4}{3}\pi(15)^3$ usando una calculadora científica introducimos

15 $[y^x]$ 3 $[=]$ $[\times]$ 4 $[\div]$ 3 $[=]$ $[\times]$ $[\pi]$ $[=]$

14137.16694

Se necesitan 14 137.2 $pies^3$ de agua para llenar el tanque, calculados hasta la décima más cercana.

Existe una fórmula para calcular el área de una esfera, la cual se muestra a continuación.

Área superficial de una esfera

El área superficial de una esfera con radio r está dada por la fórmula

$$AS = 4\pi r^2$$

EJEMPLO 5 **Manufactura de pelotas de playa.** Una pelota de playa debe tener un diámetro de 16 pulgadas. (Vea la figura 9.81.) ¿Cuántas pulgadas cuadradas de material se necesitarán para hacer la pelota? (No tome en cuenta ningún desperdicio.)

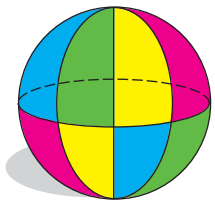


FIGURA 9-81

Solución Como el radio de la pelota es la mitad del diámetro, $r = 8$ pulgadas. Podemos ahora sustituir r con 8 en la fórmula del área superficial de una esfera.

$$\begin{aligned} AS &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi(8)^2 \\ &= 4\pi(64) \\ &= 256\pi && \text{Simplifique: } 4 \cdot 64 = 256. \\ &\approx 804.2477193 && \text{Use una calculadora.} \end{aligned}$$

Se necesita un poco más de 804 pulg^2 de material para hacer la pelota.

Volúmenes de cilindros

Un **cilindro** es una figura hueca como un pedazo de tubo. (Vea la figura 9.82.)

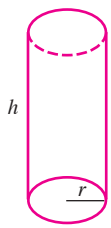


FIGURA 9.82

EJEMPLO 6 Encuentre el volumen del cilindro de la figura 9.83.

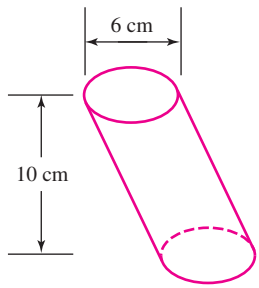


FIGURA 9.83

Solución Como el radio es la mitad del diámetro de la base circular, $r = 3$ cm. De la figura vemos que la altura del cilindro es 10 cm. Así es que podemos sustituir r con 3 y h con 10 en la fórmula del volumen de un cilindro.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi(3)^2(10) \\ &= 90\pi && \text{Simplifique: } (3)^2(10) = 9(10) = 90. \\ &\approx 282.7433388 && \text{Use una calculadora.} \end{aligned}$$

El volumen del cilindro es 282.74 cm^3 calculados hasta la centésima más cercana.

INSTANTÁNEA DEL USO DE LA CALCULADORA

Volumen de un silo

Un silo es una estructura que se usa para almacenar granos. El silo de la figura 9.84 es un cilindro de 50 pies de alto cubierto con una **semiesfera** (media esfera). Para encontrar el volumen del silo sumamos el volumen del cilindro al volumen del domo.

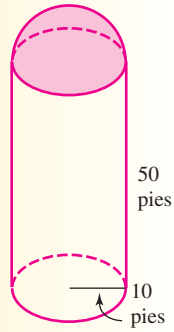


FIGURA 9.84

$$\text{Volumen}_{\text{cilindro}} + \text{volumen}_{\text{domo}} = (\text{Área}_{\text{base del cilindro}})(\text{altura}_{\text{cilindro}}) + \frac{1}{2}(\text{volumen}_{\text{esfera}})$$

$$= \pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \pi r^2 h + \frac{2\pi r^3}{3} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{6}\pi r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$= \pi(10)^2(50) + \frac{2\pi(10)^3}{3} \qquad \text{Sustituya } r \text{ con 10 y 50 con } h.$$

Para aproximar el valor de $\pi(10)^2(50) + \dfrac{2\pi(10)^3}{3}$ usando una calculadora científica introducimos

$\boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ 10\ \boxed{x^2}\ \boxed{\times}\ 50\ \boxed{=}\ \boxed{+}\ \boxed{(}\ 2\ \boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ 10\ \boxed{y^x}\ 3$
$\boxed{\div}\ 3\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

17802.35837

El volumen del silo es aproximadamente 17 802 pies^3.

EJEMPLO 7 Maquinado de un bloque de metal. Vea la figura 9.85. Encuentre el volumen que queda cuando se perfora un orificio a través del bloque de metal.

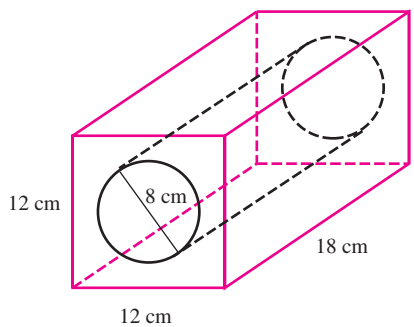


FIGURA 9.85

Solución Debemos encontrar el volumen de un sólido rectangular y luego restar el volumen de un cilindro. Pensaremos que el sólido rectangular y el cilindro yacen sobre sus lados. Por tanto, la altura es 18 cm cuando encontramos los volúmenes.

$$V_{\text{sol. rect.}} = lah$$
$$= 12(12)(18)$$
$$= 2592$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$$
$$= \pi(4)^2(18)$$
$$= 288\pi \qquad \text{Simplifique: } (4)^2(18) = 16(18) = 288.$$
$$\approx 904.7786842 \qquad \text{Use una calculadora.}$$

$$V_{\text{bloque perforado}} = V_{\text{sol. rect}} - V_{\text{cilindro}}$$
$$\approx 2592 - 904.7786842$$
$$\approx 1687.221316 \qquad \text{Use una calculadora.}$$

El volumen es 1687.22 cm^3 hasta la centésima más cercana.

Volúmenes de conos

Se muestran dos **conos** en la figura 9.86. Cada cono tiene altura h y radio r, que es el radio de la base circular.

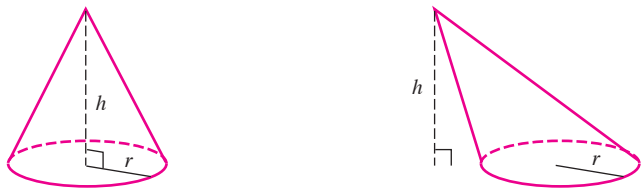


FIGURA 9.86

EJEMPLO 8 Encuentre el volumen del cono de la figura 9.87 hasta la décima más cercana.

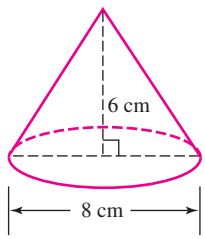


FIGURA 9.87

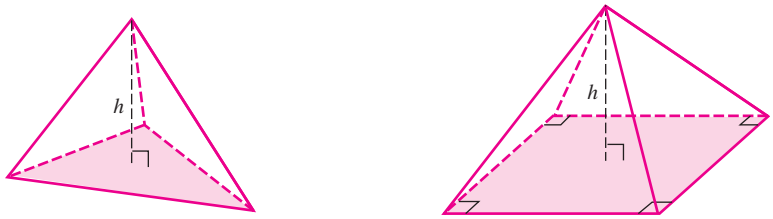
Solución Como el radio es la mitad del diámetro, $r = 4$ cm. Después sustituimos r con 4 y h con 6 en la fórmula del volumen de un cono.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$= \frac{1}{3}\pi(4)^2(6)$$
$$= \frac{1}{3}\pi(96) \qquad \text{Simplifique: } (4)^2(6) = 16(6) = 96.$$
$$= 32\pi \qquad \text{Multiplique: } \tfrac{1}{3}(96) = 32.$$
$$\approx 100.5309649$$

El volumen es 100.5 centímetros cúbicos hasta la décima más cercana.

Volúmenes de pirámides

Dos **pirámides** con altura h se muestran en la figura 9.88.

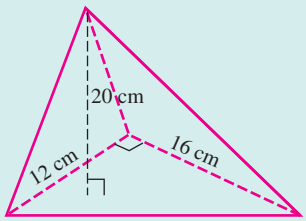


La base es un triángulo. La base es un cuadrado.

(a) **(b)**

FIGURA 9.88

Autoevaluación 9
Encuentre el volumen de la pirámide mostrada abajo.



Respuesta 640 cm^3

EJEMPLO 9 Encuentre el volumen de una pirámide que tiene una base cuadrada con cada lado de 6 metros de largo y altura de 9 metros.

Solución Como la base es un cuadrado con lados de 6 metros de largo el área de la base es 6^2 m^2, o 36 m^2. Podemos sustituir el área de la base con 36 y la altura con 9 en la fórmula del volumen de una pirámide.

$$V = \frac{1}{3}Bh$$
$$= \frac{1}{3}(36)(9)$$
$$= 12(9) \qquad \text{Multiplique: } \tfrac{1}{3}(36) = 12.$$
$$= 108$$

El volumen de la pirámide es 108 m^3.

Sección 9.7 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios.*

1. El espacio contenido dentro de un sólido geométrico se llama su _____.
2. Un sólido _____ es como una caja de zapatos hueca.
3. Un _____ es un sólido rectangular con todos sus lados de igual longitud.
4. El volumen de un cubo con cada lado de 1 pulgada de largo es 1 pulgada _____ .
5. El área _____ de un sólido rectangular es la suma de las áreas de sus caras.
6. El punto que equidista de todo punto en una esfera es su _____.
7. Un _____ es una figura hueca como un pedazo de tubo.
8. Una _____ es la mitad de una esfera.
9. Un _____ es como sombrero de bruja puntiagudo.
10. Una figura que tiene un polígono por base y que se levanta hasta un punto se llama _____.

CONCEPTOS *Escriba la fórmula que se usa para encontrar el volumen de cada sólido.*

11. Un sólido rectangular
12. Un prisma
13. Una esfera
14. Un cilindro
15. Un cono
16. Una pirámide
17. Escriba la fórmula para encontrar el área superficial de un sólido rectangular.
18. Escriba la fórmula para encontrar el área superficial de una esfera.
19. ¿Cuántos pies cúbicos hay en 1 yarda cúbica?
20. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 yarda cúbica?
21. ¿Cuántos decímetros cúbicos hay en 1 metro cúbico?
22. ¿Cuántos milímetros cúbicos hay en 1 centímetro cúbico?

¿Cuáles conceptos geométricos (perímetro, circunferencia, área, volumen o área superficial) debieran aplicarse para encontrar lo siguiente?

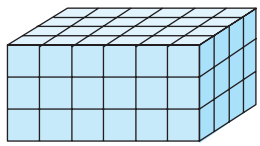
23. **a.** El tamaño de una habitación para instalar aire acondicionado
    b. La cantidad de terreno en un parque nacional
    c. La cantidad de espacio en el congelador de un refrigerador
    d. La cantidad de cartón que hay en una caja para zapatos
    e. La distancia alrededor de un tablero de damas
    f. La cantidad de material usado para hacer un balón de baloncesto
24. **a.** La cantidad de tela en una cubierta para automóvil
    b. El tamaño de la cajuela de un automóvil
    c. La cantidad de papel usada por una estampilla postal
    d. La cantidad de almacenamiento en un cofre de cedro
    e. La cantidad de playa disponible para broncearse
    f. La distancia que recorre la punta de una hélice

25. En la ilustración siguiente la unidad de medida de longitud que se usó para dibujar la figura fue la pulgada.

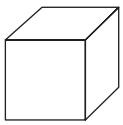
a. ¿Cuál es el volumen de la figura?

b. ¿Cuál es el área del frente de la figura?

c. ¿Cuál es el área de la base de la figura?



26. La caja de cartón que se muestra es un cubo. Suponga que las seis caras fueran desdobladas para dejarlas planas sobre una mesa. Haga un dibujo de cómo se vería.



NOTACIÓN *Llene los espacios.*

27. La notación 1 pulg^3 se lee como una _____ _____.

28. Un centímetro cúbico se representa como 1 cm$^{\square}$.

PRÁCTICA *Encuentre el volumen de cada sólido. Si una respuesta no es exacta redondéela hasta la centésima más cercana. (Las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo de la aproximación de π que se utilice.)*

29. Un sólido rectangular con dimensiones de 3 por 4 por 5 centímetros.

30. Un sólido rectangular con dimensiones de 5 por 8 por 10 metros.

31. Un prisma cuya base es un triángulo rectángulo con catetos de 3 y 4 metros de largo y cuya altura es 8 metros.

32. Un prisma cuya base es un triángulo rectángulo con catetos de 5 y 12 pies y cuya altura es 10 pies.

33. Una esfera con radio de 9 pulgadas.

34. Una esfera con diámetro de 10 pies.

35. Un cilindro con una altura de 12 metros y una base circular con un radio de 6 metros.

36. Un cilindro con una altura de 4 metros y una base circular con un diámetro de 18 metros.

37. Un cono con una altura de 3 pulgadas y una base circular con un diámetro de 10 centímetros.

38. Un cono con una altura de 3 pulgadas y una base circular con un radio de 4 pulgadas.

39. Una pirámide con una base cuadrada de 10 metros por lado y una altura de 12 metros.

40. Una pirámide con una base cuadrada de 6 pulgadas por lado y una altura de 4 pulgadas.

Encuentre el área superficial de cada sólido. Si una respuesta no es exacta redondéela hasta la centésima más cercana.

41. Un sólido rectangular con dimensiones de 3 por 4 por 5 centímetros.

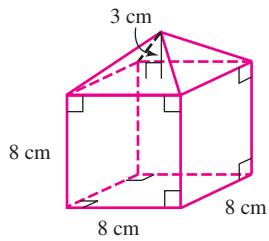
42. Un cubo con lado de 5 centímetros.

43. Una esfera con un radio de 10 pulgadas.

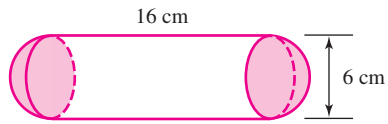
44. Una esfera con un diámetro de 12 metros.

Encuentre el volumen de cada figura. Si una respuesta no es exacta redondéela hasta la centésima más cercana. (Las respuestas pueden variar ligeramente dependiendo de qué aproximación se use para π.)

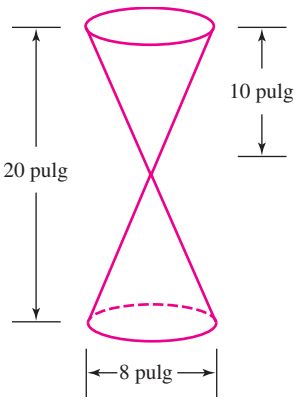
45.



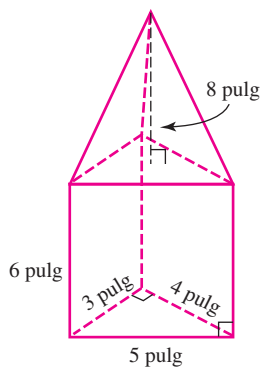
46.



47.



48.

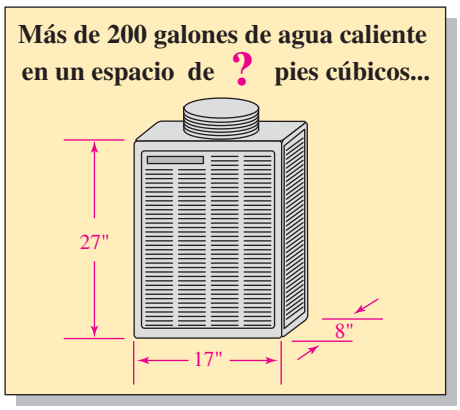


APLICACIONES *Resuelva los problemas. Si una respuesta no es exacta redondéela hasta la centésima más cercana.*

49. VOLUMEN DE UN CUBO DE AZÚCAR Un cubo de azúcar tiene $\frac{1}{2}$ pulgada por lado. ¿Qué volumen ocupa?

50. VOLUMEN DE UN SALÓN DE CLASE Un salón de clase mide 40 pies de largo, 30 pies de ancho y 9 pies de alto. Encuentre el número de pies cúbicos de aire en el salón.

51. CALENTADORES DE AGUA Complete el anuncio del calentador de agua de alta eficiencia mostrado.



52. CAPACIDAD DE UN REFRIGERADOR El refrigerador más grande anunciado en un catálogo de J.C. Penney tiene una capacidad de 25.2 pies cúbicos. ¿Cuántas pulgadas cúbicas son?

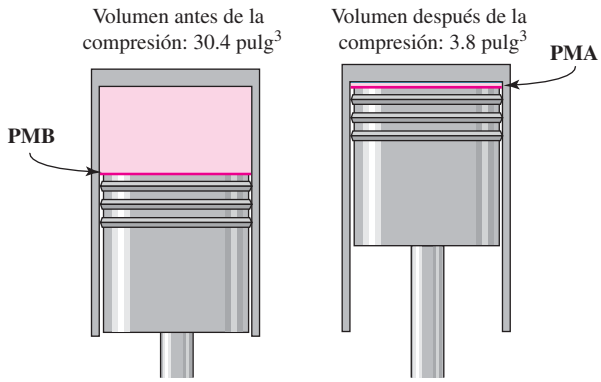
53. VOLUMEN DE UN TANQUE DE PETRÓLEO Un tanque cilíndrico de petróleo tiene un diámetro de 6 pies y un largo de 7 pies. Encuentre el volumen del tanque.

54. VOLUMEN DE UN POSTRE Un restaurante sirve un pudín en un plato cónico que tiene un diámetro de 3 pulgadas. Si el plato tiene 4 pulgadas de profundidad, ¿cuántas pulgadas cúbicas de pudín hay en cada plato?

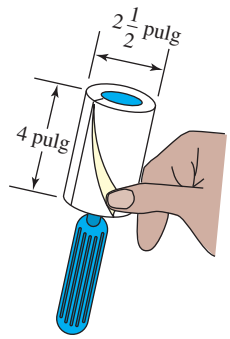
55. GLOBOS DE AIRE CALIENTE La fuerza de ascenso de un globo esférico depende de su volumen. ¿Cuántos pies cúbicos de aire le cabrán a un globo si tiene un diámetro de 40 pies?

56. VOLUMEN DE UNA CAJA DE CEREAL Una caja de cereal mide 3 por 8 por 10 pulgadas. El fabricante piensa hacer una caja más pequeña que mida $2\frac{1}{2}$ por 7 por 8 pulgadas. ¿En cuánto se reduciría el volumen?

57. MOTORES La *razón de compresión* de un motor es el volumen de un cilindro cuando el pistón está en el punto muerto bajo (PMB) dividido entre el volumen cuando el pistón está en el punto muerto alto (PMA). De los datos que se dan en la ilustración en la columna siguiente, ¿cuál es la razón de compresión del motor? Use dos puntos para expresar su respuesta como una razón.



58. REMOVEDORES DE PELUSA La ilustración muestra un útil dispositivo; usa un cilindro de hojas de papel adhesivo que se puede hacer girar sobre la ropa y los muebles para levantar la pelusa y pelo de las mascotas. Una vez que el papel está lleno esa hoja se levanta y aparece otra hoja de papel adhesivo. Encuentre el área del papel adhesivo de la primera hoja usando la fórmula $ASL = 2\pi rh$, donde ASL representa el área superficial lateral del cilindro.



POR ESCRITO

59. ¿Qué quiere decir *volumen* de un cubo?

60. ¿Qué quiere decir *área superficial* de un cubo?

61. ¿Son distintas las unidades para medir área de las unidades para medir volumen? Explique.

62. Las dimensiones (largo, ancho y altura) de un sólido rectangular son números totalmente distintos de las dimensiones de otro sólido rectangular. ¿Sería posible que los sólidos tuviesen el mismo volumen? Explique.

REPASO

63. Evalúe: $-5(5-2)^2+3$.

64. COMPRA DE LÁPICES Carlos compró 6 lápices a \$0.60 cada uno y un cuaderno a \$1.25. Dio al empleado un billete de \$5. ¿Cuánto le dieron de cambio?

65. Resuelva: $\frac{x}{-4} = \frac{1}{4}$.

66. ¿Qué porcentaje de 40 es 38?

67. Exprese la frase "3 pulgadas a 5 pulgadas" como una razón en su mínima expresión.

68. Convierta 40 onzas a libras.

69. Convierta 2.4 metros a milímetros.

70. Enuncie el Teorema de Pitágoras.

CONCEPTO CLAVE

Fórmulas

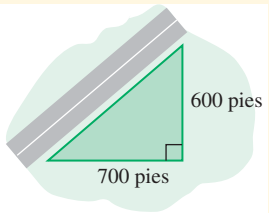
Una **fórmula** es una expresión matemática que se usa para expresar una relación entre cantidades. Hemos estudiado fórmulas usadas en matemáticas, negocios, geometría y ciencia.

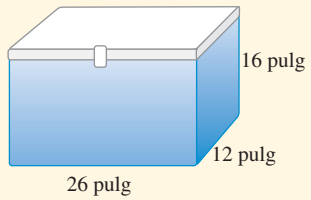
Escriba una fórmula que describa la relación matemática entre las cantidades dadas.

1. Distancia recorrida (d), velocidad del recorrido (r), tiempo del recorrido a esa velocidad. (t)
2. Precio de venta (s), precio original (p), descuento (d)
3. Perímetro de un rectángulop (P), largo del rectángulo (l), ancho del rectángulo (a)
4. Cantidad de interés simple ganada (I), principal (P), tasa de interés (r), tiempo que el dinero está invertido (t)

Use una fórmula para resolver los problemas.

5. Encuentre el área (A) del lote triangular.
6. Encuentre el volumen (V) de la hielera.





7. Encuentre el precio de al por menor (retail) (p) de una batería de cocina que le cuesta al dueño de la tienda $45.50 y le gana $35.
8. Encuentre la ganancia (p) de una venta de camisetas en una escuela si la venta fue de $14 500 y los costos fueron $10 200.
9. Encuentre la distancia (d) que cae una roca en 3 segundos después de haberse soltado desde la orilla de un risco.
10. Encuentre la temperatura en grados Celsius (C) si la temperatura en grados Fahrenheit es 59.

Algunas veces usamos la misma fórmula para responder varias cuestiones relacionadas. Los resultados se pueden exhibir en una tabla.

11. Encuentre el interés ganado por cada cuenta.

Tipo de cuenta	Capital	Tasa anual	Tiempo de inversión	Interés ganado
Ahorros	$5000	5%	3 yardas	
Cheques	$2250	2%	1 yardas	
Fondo de inversión	$10 000	6.25%	10 yardas	

12. Complete la tabla.

Tipo de moneda	Número	Valor (¢)	Valor total (¢)
Penny	15		
Nickel	n		
Dime	d		
Quarter	q		

ÉNFASIS EN EL TRABAJO EN EQUIPO

SECCIÓN 9.1

ESCRITURA DE DÍGITOS En la ilustración el dígito 1 se dibuja usando un ángulo y el dígito 2 se dibuja usando dos ángulos. Dibuje el dígito 3 usando tres ángulos, el dígito 4 usando cuatro ángulos y así sucesivamente para todos los dígitos hasta el 9 incluyéndolo.

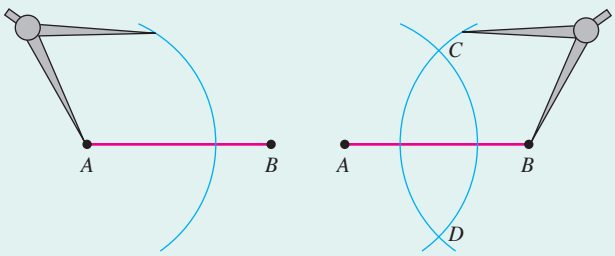
SECCIÓN 9.2

CONSTRUCCIONES

Paso 1: Vea la ilustración (a). Usando una regla dibuje $\overline{AB}$. Luego coloque la punta de un compás en A y dibuje un arc

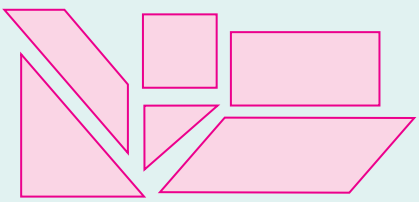
Paso 2: Con la misma abertura del compás coloque la punta en B. Como se muestra en la ilustración (b) dibuje otro arco que intersecte el arco del paso 1 en dos puntos. Nombre estos puntos como C y D.

Paso 3: Usando una regla dibuje una recta que pase por C y D. Nombre el punto donde la recta CD intersecta $\overline{AB}$ como el punto E. ¿$m(\overline{AE}) = m(\overline{EB})$?



SECCIÓN 9.3

TANGRAM Un tangrama es un rompecabezas en el cual se acomodan figuras geométricas para producir otras formas. Recorte las piezas de la ilustración. Acomódelas de manera que formen un cuadrado. No debe haber huecos ni se deben de encimar.

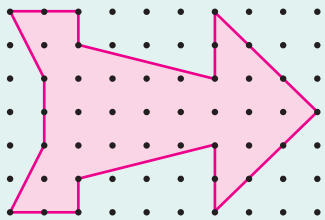


SECCIÓN 9.4

TRIÁNGULOS CONGRUENTES Dibuje un triángulo en un pedazo de papel. Luego mida la longitud de sus lados (con una regla) y las medidas de los ángulos (con un transportador). Escoja una combinación de cualesquiera tres medidas y dígaselas a su compañero. ¿Se dan suficientes datos para que su compañero pueda construir un triángulo congruente al suyo?

SECCIÓN 9.5

ÁREA Encuentre el área de la figura sombreada en la cuadrícula.



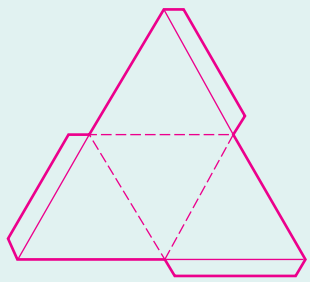
SECCIÓN 9.6

PI Mida cuidadosamente la circunferencia y el diámetro de círculos de distintos tamaños. Registre las medidas en una tabla como la de abajo. Luego use una calculadora para encontrar $\frac{C}{D}$. El resultado debe ser un número cercano a π.

Objeto	Circunferencia	Diámetro	$\frac{C}{D}$
Jar	$3\frac{1}{2}$ in.	$1\frac{1}{8}$ in.	3.11

SECCIÓN 9.7

PIRÁMIDES Corte doble y pegue el patrón que se muestra. Estime el volumen y área superficial de la pirámide.



REPASO DEL CAPÍTULO

SECCIÓN 9.1 *Definiciones básicas*

CONCEPTOS

En la geometría estudiamos *puntos*, *rectas* y *planos*.

Un *segmento de recta* es una parte de una recta con dos puntos extremos. Un *rayo* es una parte de una recta con un punto extremo.

Un *ángulo* es una figura formada por dos rayos con un punto extremo común. El punto extremo común se llama *vértice* del ángulo.

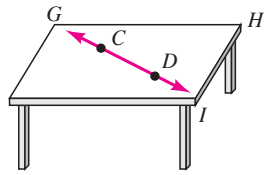
Para encontrar la medida de un ángulo se usa un *transportador*.

Un *ángulo agudo* es mayor que 0° pero menor que 90°. *Un ángulo recto* mide 90°. Un *ángulo obtuso* es mayor que 90° pero menor que 180°. Un *ángulo llano* mide 180°.

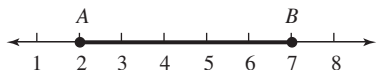
Dos ángulos que tienen el mismo vértice y están lado a lado se llaman *ángulos adyacentes*.

EJERCICIOS DE REPASO

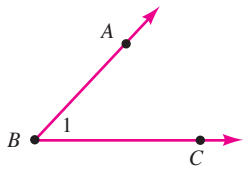
1. En la ilustración identifique un punto, una recta y un plano.



2. En la ilustración encuentre $m(\overline{AB})$.

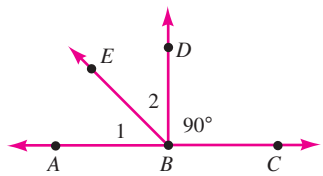


3. En la ilustración de abajo diga cuatro formas de llamarle al ángulo.



4. En la ilustración de arriba use un transportador para encontrar la medida del ángulo.

5. En la ilustración de abajo identifique los ángulos agudos, rectos, obtusos y llanos.



Se dan las medidas de varios ángulos. Identifique cada ángulo como un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso o un ángulo llano.

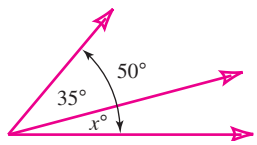
6. $m(\angle A) = 150°$

7. $m(\angle B) = 90°$

8. $m(\angle C) = 180°$

9. $m(\angle D) = 25°$

10. Los dos ángulos que se muestran son adyacentes. Encuentre x.

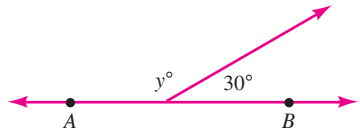


Cuando dos rectas se intersectan a los pares de ángulos no adyacentes se le llama *opuestos por el vértice*.

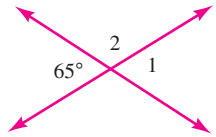
Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Si la suma de dos ángulos es 90º, los ángulos son *complementarios*. Si la suma de dos ángulos es 180º los ángulos son *suplementarios*.

11. Se muestra la recta AB. Encuentre y.



12. Encuentre **a.** m(∠1) y **b.** m(∠2).



13. Encuentre el complemento de un ángulo que mide 50º.

14. Encuentre el suplemento de un ángulo que mide 140º.

15. ¿Son suplementarios ángulos que miden 30º, 60º y 90º?

SECCIÓN 9.2 *Rectas paralelas y perpendiculares*

Las *rectas paralelas* no se intersectan. Las rectas *perpendiculares* se intersectan y forman ángulos rectos.

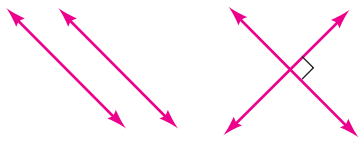
Una recta que se intersecta con otras dos o más rectas *coplanarias* se llama *transversal*.

Cuando una transversal intersecta a dos rectas coplanarias se forman *ángulos alternos internos* y *ángulos correspondientes*.

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

1. Los ángulos alternos internos son congruentes (tienen medidas iguales).
2. Los ángulos correspondientes son iguales.
3. Los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

16. ¿Qué parte de la ilustración representa rectas paralelas?

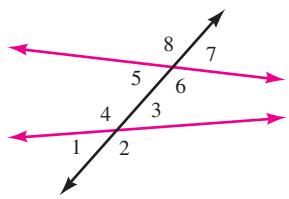


(a) **(b)**

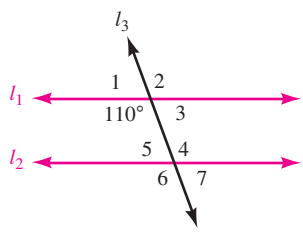
17. Identifique todos los pares de ángulos alternos internos mostrados en la ilustración abajo.

18. Identifique todos los pares de ángulos correspondientes mostrados en la ilustración abajo.

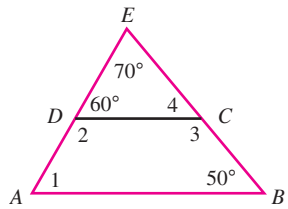
19. Identifique todos los pares de ángulos opuestos por el vértice mostrados en la ilustración abajo.



20. En la ilustración abajo, $l_1 \parallel l_2$. Encuentre la medida de los ángulos.

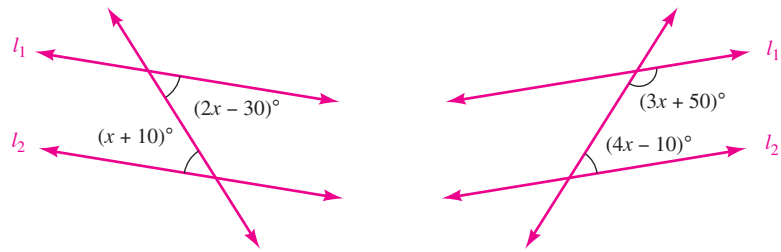


21. En la ilustración abajo $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. Encuentre la medida de los ángulos.



22. En la ilustración (a), $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x.

23. En la ilustración (b), $l_1 \parallel l_2$. Encuentre x.



SECCIÓN 9.3 Polígonos

Un *polígono* es una figura geométrica cerrada. Los puntos en los que se intersectan los lados se llaman *vértices*. Un *polígono regular* tiene lados que son todos del mismo largo y ángulos que son todos de la misma medida.

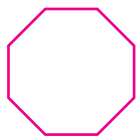
Los polígonos se clasifican como sigue:

Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
8	Octágono

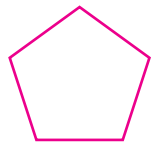
Un *triángulo equilátero* tiene tres lados de igual longitud.
Un *triángulo isósceles* tiene al menos dos lados de igual longitud.
Un *triángulo escaleno* no tiene lados de igual longitud.
Un *triángulo rectángulo* tiene un ángulo recto.

Identifique cada polígono como triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono u octágono.

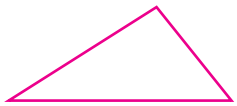
24.



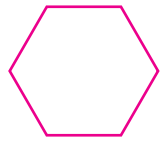
25.



26.



27.



28.

Dé el número de vértices en cada polígono.

29. Triángulo

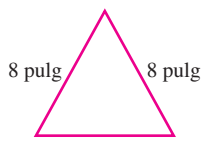
30. Cuadrilátero

31. Octágono

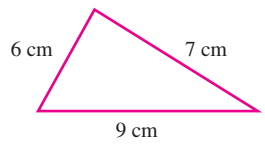
32. Hexágono

Clasifique cada uno de los triángulos como triángulo equilátero, triángulo isósceles, triángulo escaleno o triángulo rectángulo.

33.



34.



En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados de igual longitud se llaman *ángulos* de la *base*. El tercer ángulo se llama *ángulo del vértice*. El tercer lado se llama *base*.

Propiedades de los triángulos isósceles:

1. Los ángulos de la base son congruentes.
2. Si dos ángulos en un triángulo son congruentes, los lados opuestos a los ángulos son congruentes y el triángulo es isósceles.

La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180º.

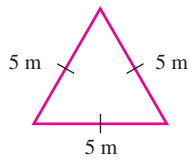
Los cuadriláteros se clasifican como sigue:

Propiedad	Nombre
Lados opuestos paralelos	paralelo-gramo
Paralelogramo con cuatro ángulos rectos	rectángulo
Rectángulo con 4 lados iguales	cuadrado
Paralelogramo con lados de igual longitud	rombo
Sólo dos lados paralelos	trapecio

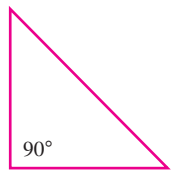
Propiedades de los rectángulos:

1. Todos los ángulos son ángulos rectos.
2. Los lados opuestos son paralelos.
3. Los hechos opuestos tienen la misma longitud.
4. Las diagonales son de igual longitud.
5. Si las diagonales de un paralelogramo son de igual longitud, el paralelogramo es un rectángulo.

35.

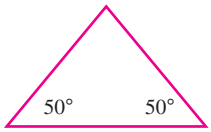


36.

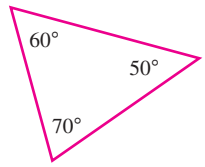


Determine si los triángulos son isósceles.

37.



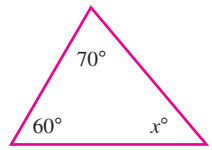
38.



En cada triángulo encuentre x.

39.

40.



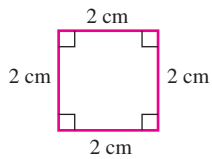
41. Si un ángulo de la base de un triángulo isósceles mide 65º, ¿cuánto mide el ángulo del vértice?

42. Si un ángulo de la base de un triángulo isósceles mide 60º, ¿qué puede concluir sobre el triángulo?

Clasifique los cuadriláteros como paralelogramo, rectángulo, cuadrado, rombo o trapecio.

43.

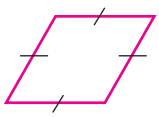
44.



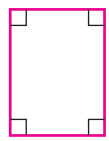
45.

46.

47.



48.

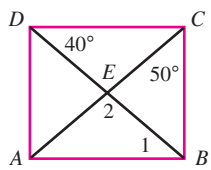


En la ilustración de abajo, la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD es 15 centímetros. Encuentre las medidas.

49. m($\overline{BD}$)

50. m($\angle 1$)

51. m($\angle 2$)



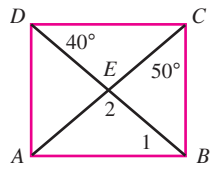
En la ilustración de abajo, ABCD es un rectángulo. Clasifique los enunciados como verdaderos o falsos.

52. $m(\overline{AB}) = m(\overline{DC})$

53. $m(\overline{AD}) = m(\overline{DC})$

54. El triángulo ABE es isósceles.

55. $m(\overline{AC}) = m(\overline{BD})$

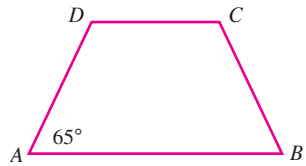


Los lados paralelos de un trapecio se llaman *bases*. Los lados no paralelos se llaman *catetos*. Si los catetos de un trapecio son de igual longitud, es *isósceles*. En un trapecio isósceles los ángulos opuestos a los lados de igual longitud se llaman *ángulos de la base* y son congruentes.

En la ilustración ABCD es un trapecio isósceles. Encuentre las medidas.

56. $m(\angle B)$

57. $m(\angle C)$



La suma de las medidas de los ángulos de un polígono (en grados) está dada por la fórmula

$$S = (n - 2)180$$

Encuentre la suma de las medidas de los ángulos de cada polígono.

58. Cuadrilátero

59. Hexágono

SECCIÓN 9.4 Propiedades de los triángulos

Si dos triángulos tienen el mismo tamaño y la misma forma son *triángulos congruentes*.

Las *partes correspondientes* de los triángulos congruentes tienen la misma medida.

Vea la ilustración. Complete las partes correspondientes.

60. $\angle A$ corresponde a _____.

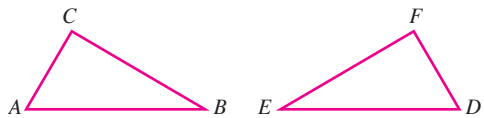
61. $\angle B$ corresponde a _____.

62. $\angle C$ corresponde a _____.

63. $\overline{AC}$ corresponde a _____.

64. $\overline{AB}$ corresponde a _____.

65. $\overline{BC}$ corresponde a _____.

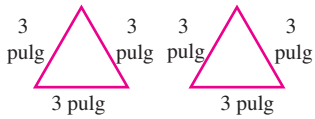


Determine si los triángulos en cada par son congruentes. Si lo son diga por qué.

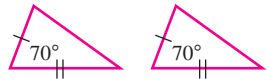
Tres formas de mostrar que dos triángulos son congruentes son

1. la propiedad LLL
2. la propiedad LAL
3. la propiedad ALA

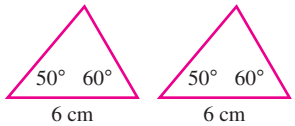
66.



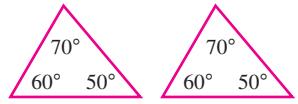
67.



68.



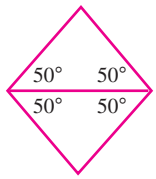
69.



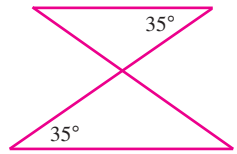
Si dos triángulos tienen la misma forma se dice que son *semejantes*. Si dos ángulos de un triángulo tienen la misma medida que dos ángulos de un segundo triángulo, los triángulos son semejantes.

Determine si los triángulos en cada par son semejantes

70.



71.



72. Si un árbol arroja una sombra de 7 pies al mismo tiempo que un hombre de 6 pies de alto arroja una sombra de 2 pies, ¿qué altura tiene el árbol?

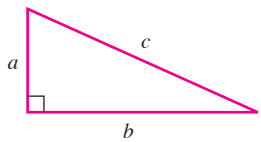
Teorema de Pitágoras: Si la longitud de la *hipotenusa* de un triángulo rectángulo es c y las longitudes de los catetos son a y b, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

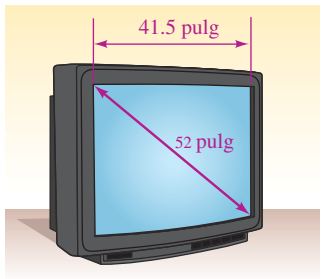
Refiérase a la ilustración y encuentre la longitud del lado desconocido.

73. Si $a = 5$ y $b = 12$, encuentre c.

74. Si $a = 8$ y $c = 17$, encuentre b.



75. Encuentre la altura de la pantalla de televisión que se muestra hasta la décima más cercana.



SECCIÓN 9.5 *Perímetros y áreas de polígonos*

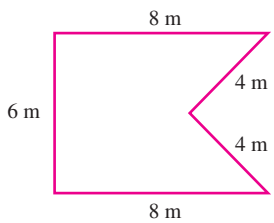
El *perímetro* de un polígono es la distancia alrededor de él.

76. Encuentre el perímetro de un cuadrado con lados de 18 pulgadas de largo.

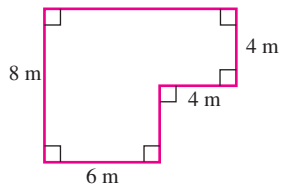
77. Encuentre el perímetro de un rectángulo que tiene 3 metros de largo y 1.5 metros de ancho.

Encuentre el perímetro de los polígonos.

78.



79.



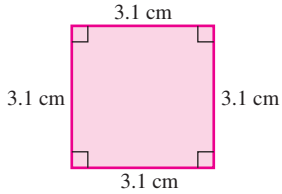
El *área* de un polígono es la medida de la superficie que encierra.

Fórmulas para áreas:

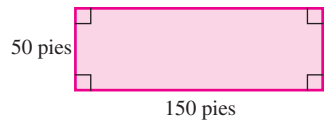
Figura	Área
Cuadrado	$A = l^2$
Rectángulo	$A = la$
Paralelo-gramo	$A = bh$
Triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$
Trapecio	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

Encuentre el área de los polígonos

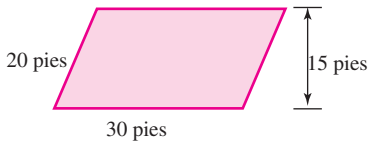
80.



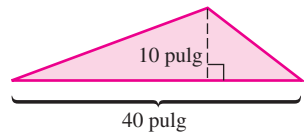
81.



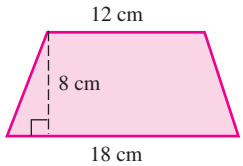
82.



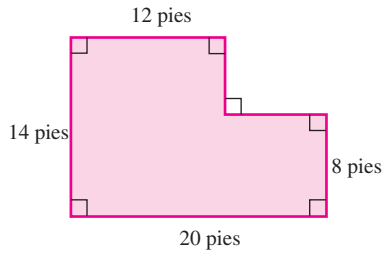
83.



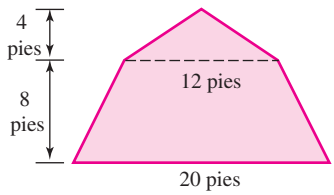
84.



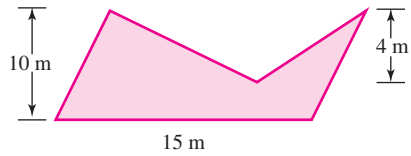
85.



86.



87.



88. ¿Cuántos pies cuadrados tiene 1 yarda cuadrada?

89. ¿Cuántas pulgadas cuadradas tiene 1 pie cuadrado?

SECCIÓN 9.6 *Círculos*

Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto llamado *centro*. La distancia fija es el *radio* del círculo.

Una *cuerda* de un círculo es un segmento de recta que conecta dos puntos en un círculo.

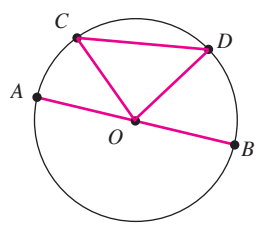
Refiérase a la ilustración.

90. Nombre las cuerdas

91. Nombre los diámetros

92. Nombre los radios

93. Nombre el centro



Un *diámetro* es una cuerda que pasa por el centro del círculo.

La *circunferencia* (perímetro) de un círculo está dada por las fórmulas

$C = \pi D$ o $C = 2\pi r$

donde $\pi = 3.14159\ldots$.

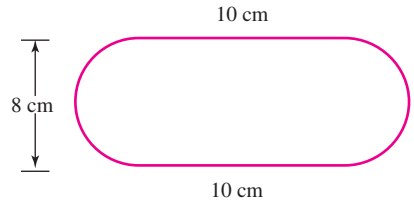
El *área* de un círculo está dada por la fórmula

$A = \pi r^2$

Encuentre cada respuesta hasta la décima más cercana.

94. Encuentre la circunferencia de un círculo con un diámetro de 21 centímetros.

95. Encuentre el perímetro de la figura mostrada.



96. Encuentre el área de un círculo con un diámetro de 18 pulgadas.

97. Encuentre el área de la figura mostrada arriba.

SECCIÓN 9.7 *Área superficial y volumen*

El *volumen* de un sólido es una medida del espacio que ocupa.

Figura	Volumen
Cubo	$V = s^3$
Sólido rectangular	$V = lah$
Prisma	$V = Bh$*
Esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cilindro	$V = \pi r^2 h$
Cono	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Pirámide	$V = \frac{1}{3}Bh$*

*B representa el área de la base.

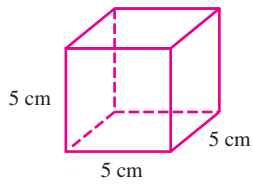
El *área superficial* de un sólido rectangular es la suma de las áreas de sus seis caras.

El área superficial de un esfera está dada por la fórmula

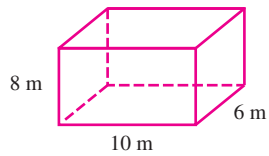
$AS = 4\pi r^2$

Encuentre el volumen de cada sólido hasta la unidad más cercana.

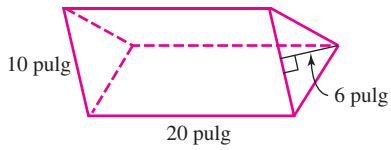
98.



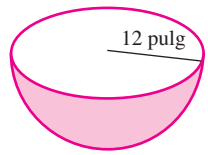
99.



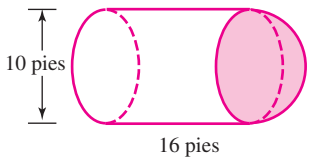
100.



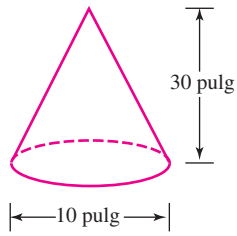
101.



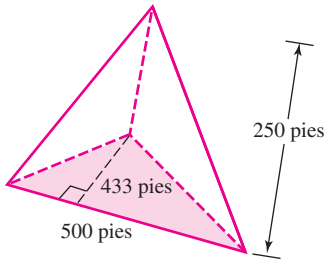
102.



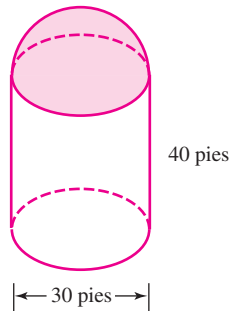
103.



104.



105.

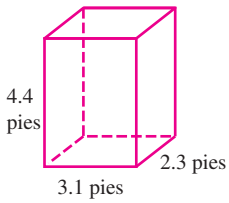


106. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1 pie cúbico?

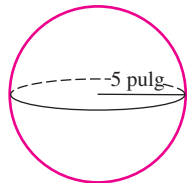
107. ¿Cuántos pies cúbicos hay en 2 yardas cúbicas?

Calcule el área superficial de cada sólido y redondéela a la décima más cercana.

108.



109.



EXAMEN DEL CAPÍTULO 9

1. Encuentre m($\overline{AB}$),

2. ¿Qué punto es el vértice de $\angle ABC$?

Determine si los enunciados son ciertos o falsos.

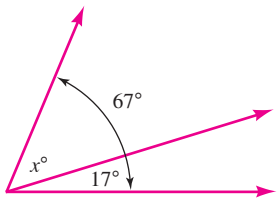
3. Un ángulo de 47º es un ángulo agudo.

4. Un ángulo de 90º es un ángulo recto.

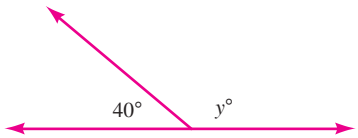
5. Un ángulo de 180º es un ángulo recto.

6. Un ángulo de 132º es un ángulo obtuso.

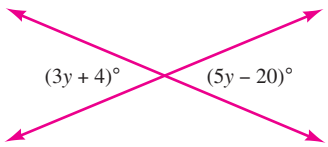
7. Encuentre x.



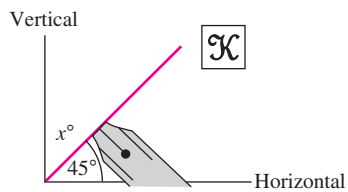
8. Encuentre y.



9. Encuentre y.



10. CALIGRAFÍA La ilustración muestra cómo debe sostenerse la punta de una pluma a 45º respecto a la horizontal. ¿Cuánto es x?



11. Encuentre el complemento de un ángulo que mide 67°.

12. Encuentre el suplemento de un ángulo que mide 117º.

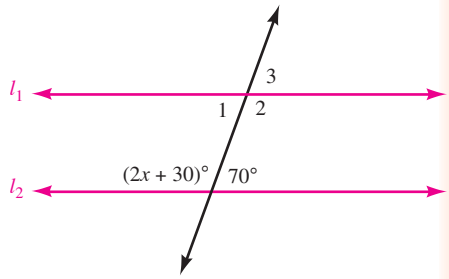
Refiérase a la ilustración de abajo en la que $l_1 \parallel l_2$.

13. m($\angle 1$) = _____.

14. m($\angle 2$) = _____.

15. m($\angle 3$) = _____.

16. Encuentre x.



17. Complete la tabla.

Polígono	Número de lados
Triángulo	
Cuadrilátero	
Hexágono	
Pentágono	
Octágono	

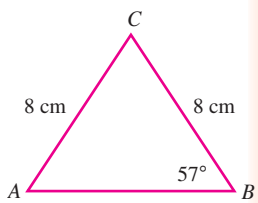
18. Complete la tabla sobre triángulos.

Propiedad	Tipo de triángulo
Todos los lados son de la misma longitud	
No tiene lados de la misma longitud	
Dos lados de igual longitud	

Refiérase a la ilustración abajo.

19. Encuentre m($\angle A$).

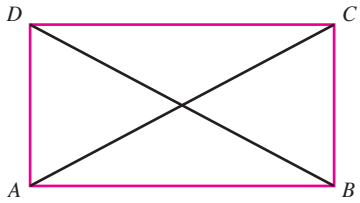
20. Encuentre m($\angle C$).



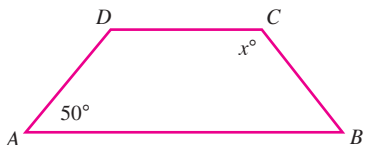
21. Si las medidas de dos ángulos en un triángulo son 65° y 85° encuentre la medida del tercer ángulo.

22. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos en un decágono (polígono de diez lados).

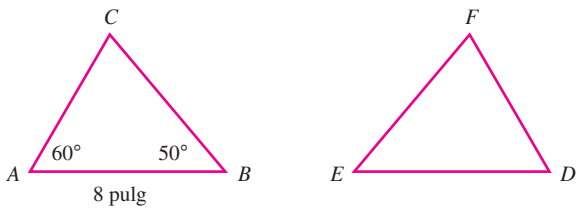
23. En la ilustración, $ABCD$ es un rectángulo. Nombre tres pares de segmentos de igual longitud.



24. En la ilustración, $ABCD$ es trapecio isósceles. Encuentre x.



Refiérase a la ilustración en la cual $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

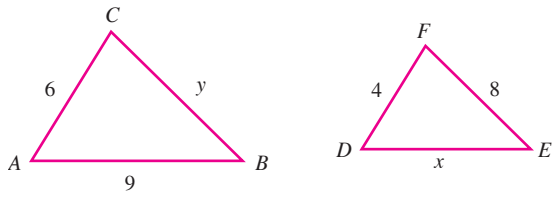


25. Encuentre $m(\overline{DE})$. **26.** Encuentre $m(\angle E)$.

Refiérase a la ilustración en la columna siguiente en la cual $m(\angle A) = m(\angle D)$ *y* $m(\angle C) = m(\angle F)$.

27. Encuentre x.

28. Encuentre y.



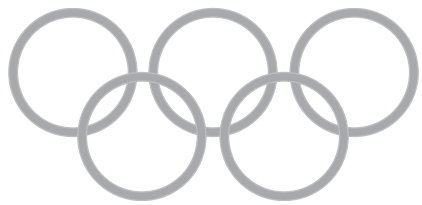
Dé las respuestas hasta la décima más cercana.

29. Un diamante de béisbol es un cuadrado con lados de 90 pies de largo. ¿Cuál es la distancia en línea recta de la tercera base a la primera base?

30. Encuentre el área de un triángulo con base de 44.5 centímetros de largo y altura de 17.6 centímetros.

31. Encuentre el área de un trapecio con altura de 6 pies y bases de 12.2 pies y 15.7 pies.

32. OLIMPIADAS Se va a doblar una barra de acero para formar los aros entrelazados del símbolo de los Juegos Olímpicos. ¿Cuántos pies de barra de acero serán necesarios para hacer el símbolo si el diámetro de cada aro es de 6 pies?



33. Encuentre el área de un círculo con diámetro de 6 pies.

34. Encuentre el volumen de un sólido rectangular con dimensiones de 4.3 por 5.7 por 6.5 metros.

35. Encuentre el volumen de una esfera de 8 metros de diámetro.

36. Encuentre el volumen de una pirámide de 10 pies de alto que tiene una base rectangular de 5 pies de largo y 4 pies de ancho.

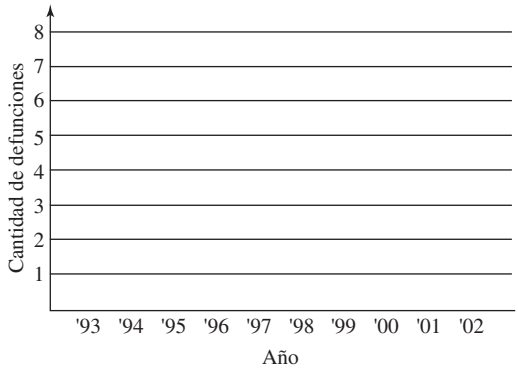
37. Dé un ejemplo de la vida real en el que se use el concepto de perímetro. Haga lo mismo para el área y el volumen. Asegúrese de discutir el tipo de unidades usadas en cada caso.

38. Dibuje un cubo. Explique cómo encontrar su área superficial.

CAPÍTULOS 1–9 EJERCICIOS ACUMULATIVOS DE REPASO

1. PARQUES DE DIVERSIÓN Use los datos de la tabla para construir una gráfica de barras en la ilustración.

Accidentes fatales en paseos en parques de diversión										
Año	'93	'94	'95	'96	'97	'98	'99	'00	'01	'02
Número	4	2	4	3	4	7	6	1	3	2



Fuente: Comisión de Seguridad del Consumidor de Productos de los EU

2. AUTOS USADOS El anuncio siguiente apareció en *The Car Trader*. (H.S.O. significa "haga su oferta".) Si se reciben ofertas de $8750, $8875, $8900, $8850, $7995, $8995 y $8925, ¿cuál fue el precio de venta del auto?

> Ford Mustang 1969. Llantas nuevas. ¡Urge vender! H.S.O.

3. Reste: $35\,021 - 23\,999$.

4. Divida: $1353 \div 41$.

5. Redondee 2 109 567 hasta el millar más cercano.

6. Factorice en primos 220.

7. Encuentre todos los factores de 24.

8. Enliste el conjunto de los enteros.

9. Evalúe: $-10(-2) - 2^3 + 1$.

10. Evalúe: $5 - 3[4^2 - (1 + 5 \cdot 2)]$.

11. Evalúe: $|-6 - (-3)|$.

12. Evalúe la expresión $\dfrac{2x + 3y}{z - y}$ para $x = 2$, $y = -3$, y $z = -4$.

13. ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación y una expresión?

14. Simplifique: $4x - 2(3x - 4) - 5(2x)$.

Resuelva las ecuaciones. **Compruebe los resultados.**

15. $3(p + 15) + 4(11 - p) = 0$

16. $5t - 7 = 7t + 13$

17. $-x + 2 = 13$ **18.** $4x - 40 = -20$

19. CARACOLES De acuerdo con el *Libro de Récords Mundiales Guinness,* en el Campeonato Mundial de Carreras de Caracoles de 1995 un caracol recorrió la pista de 13 pulgadas en dos minutos. ¿Cuál fue la velocidad del caracol en pulgadas por minuto?

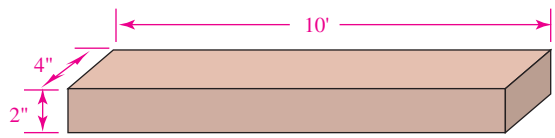
20. COMPRAS ¿Cuál es el valor de x cupones si cada uno le da al comprador un descuento de 50¢?

21. Traduzca a símbolos matemáticos:
Siete al cuadrado menos dos al cubo

22. MADERA Para encontrar el número de pies de tabla (p.t.) en un pedazo de madera use la fórmula

$$\text{p.t.} = \frac{\text{espesor (pulg)} \cdot \text{ancho (pulg)} \cdot \text{largo (pie)}}{12}$$

Encuentre el número de pies de tabla en el pedazo mostrado. (*Sugerencia*: el símbolo 3 significa pulgadas y 2 significa pies.)



23. Simplifique: $\dfrac{35}{28}$.

24. Sume: $45\dfrac{2}{3} + 96\dfrac{4}{5}$.

25. Reste: $\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{5}$.

26. HORNEADO Una bolsa de 5 libras de harina para todo propósito contiene $17\frac{1}{2}$ tazas. Un panadero usa $3\frac{3}{4}$ tazas. ¿Cuánta harina queda?

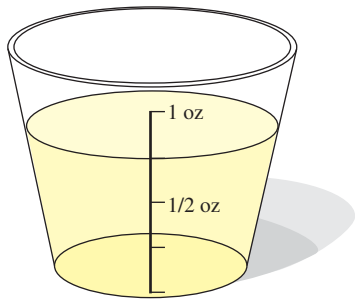
27. Multiplique: $-\dfrac{6}{25}\left(2\dfrac{7}{24}\right)$.

28. Divida: $\dfrac{15}{8} \div \dfrac{45}{8}$.

29. ¿Cuál es el recíproco de $\dfrac{9}{8}$?

30. Escriba $7\dfrac{1}{2}$ como fracción impropia.

31. MEDICINA PARA MASCOTAS Al dueño de una mascota se le dijo que usara un gotero para darle medicina a su gatito enfermo. La taza mostrada abajo contiene 8 dosis de medicamento. Determine el tamaño de cada dosis.



32. Evalúe: $\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)$.

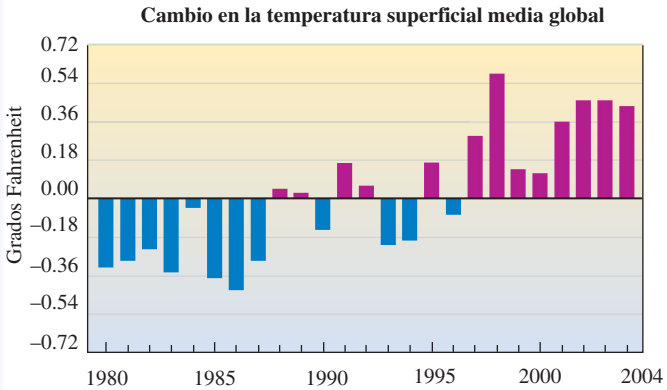
33. Simplifique: $\dfrac{7 - \frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}}$.

34. GRAVEDAD Los objetos en la Luna pesan sólo un sexto de lo que pesan en la Tierra. Si una roca pesa 3 onzas en la Luna, ¿cuánto pesa en la Tierra?

35. CALENTAMIENTO GLOBAL La gráfica de abajo muestra el cambio anual promedio de la temperatura global medido por satélites orbitando la Tierra.

a. ¿Cuándo se registró la mayor elevación de temperatura? ¿De cuánto fue?

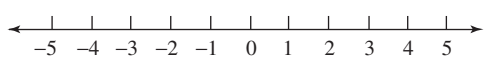
b. ¿Cuándo se registró la mayor disminución de temperatura? ¿De cuánto fue?



Fuente: Administración Nacional Oceánica y Atmosférica

36. Grafique cada elemento del conjunto sobre la recta numérica:

$$\left\{-4\frac{5}{8}, \sqrt{17}, 2.89, \frac{2}{3}, -0.1, -\sqrt{9}, \frac{3}{2}\right\}$$



37. Redondee el número pi hasta la diezmilésima más cercana: $\pi = 3.141592654\ldots$

38. Coloque el símbolo apropiado ($>$ o $<$) en el espacio: 154.34 ▫ 154.33999.

39. Sume: $3.4 + 106.78 + 35 + 0.008$.

40. Multiplique: $-5.5(-3.1)$.

41. Multiplique: $(89.9708)(1000)$.

42. Divida: $\dfrac{0.0742}{1.4}$.

43. Evalúe: $-8.8 + (-7.3 - 9.5)$.

44. Evalúe: $\frac{7}{8}(9.7 + 15.8)$.

45. Cambie $\frac{2}{15}$ a decimal.

46. Evalúe $\dfrac{(-1.3)^2 + 6.7}{-0.9}$ y redondee a la centésima más cercana.

47. DECORACIONES Una mujer piensa gastar $20 para la decoración de la fiesta de cumpleaños de su hija. Decide comprar un tanque de helio por $15.15 y algunos globos. Si los globos se venden a 5 centavos la pieza, ¿cuántos globos puede comprar?

48. Encuentre la raíz cuadrada de 100.

49. Evalúe: $2\sqrt{121} - 3\sqrt{64}$.

50. Evalúe: $\sqrt{\frac{49}{81}}$.

51. TENIS DE MESA Los pesos (en onzas) de 8 bolas de ping pong que se van a usar en un torneo son como sigue: 0.85, 0.87, 0.88, 0.88, 0.85, 0.86, 0.84 y 0.85. Encuentre la media, la mediana y la moda de los pesos.

52. **a.** Considere $(-3)^2$. ¿Cuál es la base y cuál el exponente? Evalúe la expresión.

b. Considere -3^2. ¿Cuál es la base y cuál el exponente? Evalúe la expresión.

Simplifique las expresiones.

53. $l^4 \cdot l^5$

54. $(a^5)^7$

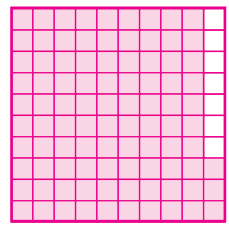
55. $-3h^9(-5h)$

56. $(2b^3c^6)^3$

57. $(y^5)^2(y^4)^3$

58. $x^m \cdot x^n$

59. ¿Qué porcentaje de la figura está sombreado?



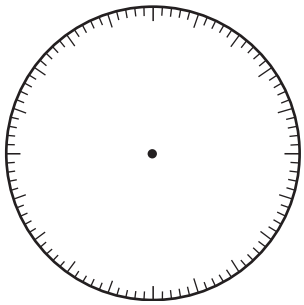
60. ¿Qué número es 15% de 450?

61. 24.6 es 20.5% ¿de qué número?

62. Complete la tabla.

Porcentaje	Decimal	Fracción
57%		
	0.001	
		$\frac{1}{3}$

63. GOBIERNO ESTUDIANTIL En una elección para Presidente de los Estudiantes, se emitieron 560 votos. Stan Cisneros recibió 308 votos y Amy Huang-Sims recibió 252 votos. Use una gráfica de círculo para mostrar los porcentajes recibidos por cada candidato.



64. COMPRAS ¿Cuál es el precio normal de la calculadora de abajo?

65. IMPUESTO DE VENTA Si la tasa de impuesto es $6\frac{1}{4}\%$, ¿qué impuesto se cargará al precio de un auto nuevo que se vende a $18 550?

66. DE COLECCIÓN Una figura de porcelana alemana Hummel, que se compró originalmente a $125 se vendió por un coleccionista diez años después en $750. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento en el valor de la figura?

67. LIQUIDACIÓN DE UN PRÉSTAMO Para pagar por sus cuotas, un estudiante universitario pide $1500 por dos meses. Si la tasa de interés anual es 9%, ¿cuánto tendrá que pagar el estudiante cuando venza su préstamo?

68. JUBILACIÓN Cuando se casó un hombre invirtió $5000 en una cuenta que le garantizaba pagarle 8% de interés pagadero mensualmente por 50 años. Al final de los 50 años, ¿cuánto tendrá en su cuenta?

Escriba las frases como razones.

69. 3 centímetros a 7 centímetros.

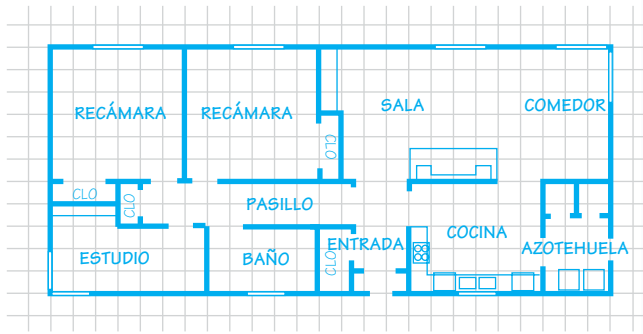
70. 13 semanas a 1 año.

71. COMPARACIÓN DE PRECIOS Un pizarrón blanco con área de 400 pulg^2 se vende a $24. Un pizarrón más grande, con un área de 600 pulg^2, se vende a $42. ¿Qué pizarrón es mejor compra?

72. Resuelva la proporción: $\frac{x}{14} = \frac{13}{28}$.

73. RECLAMACIONES DE SEGUROS En un año, una compañía de seguros tuvo 3 quejas por cada 1000 pólizas. Si un total de 375 quejas se archivaron ese año, ¿cuántas pólizas tuvo la compañía?

74. DIBUJOS A ESCALA Suponga que el plano de una casa se dibuja en una cuadrícula de cuadrados de $\frac{1}{4}$-de pulgada. ¿Cuál es el largo de la casa?



Haga las conversiones.

75. 168 pulgadas = ____ pies

76. 15 yardas = ____ pulgadas

77. 212 onzas = ____ libras

78. 30 galones = ____ cuartos

79. 25 tazas = ____ onzas fluidas

80. 738 minutos = ____ horas

81. 654 miligramos = ____ centigramos

82. 500 mililitros = ____ litro

83. 5890 decímetros = ____ decámetros

84. 75°C = ____ F

85. EL AMAZONAS El río Amazonas desemboca al Oceano Atlántico a través de un ancho estuario, estimado gruesamente de 240 000 metros de ancho. Convierta el ancho a kilómetros.

86. TENIS Una pelota de tenis pesa entre 57 y 58 g. Exprese este rango en centigramos.

87. TRANSATLÁNTICOS Cuando hacía sus cruceros transatlánticos de Inglaterra a Norteamérica, el Queen Mary tuvo 13 pies por galón.

a. ¿Cuántos metros por galón es esto?

b. La capacidad de combustible del barco era 3 000 000 de galones. ¿Cuántos litros es esto?

88. COCINA ¿Cuál es el peso en kilogramos de un jamón de 10 libras?

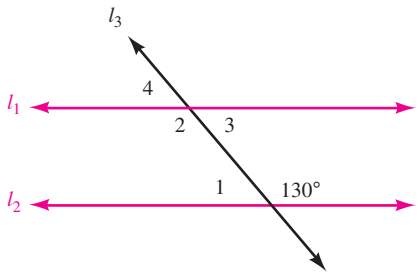
89. ¿Cuántos grados tiene un ángulo recto?

90. ¿Cuántos grados hay en un ángulo agudo?

91. Encuentre el suplemento de un ángulo de 105º.

92. Encuentre el complemento de un ángulo de 75º.

Refiérase a la ilustración en la que $l_1 \parallel l_2$. Encuentre la medida de los ángulos.



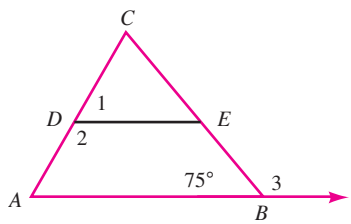
93. m(∠1)

94. m(∠3)

95. m(∠2)

96. m(∠4)

Refiérase a la ilustración en la que $\overrightarrow{AB} \parallel \overline{DE}$ y $m(\overline{AC}) = m(\overline{BC})$. Encuentre la medida de los ángulos.



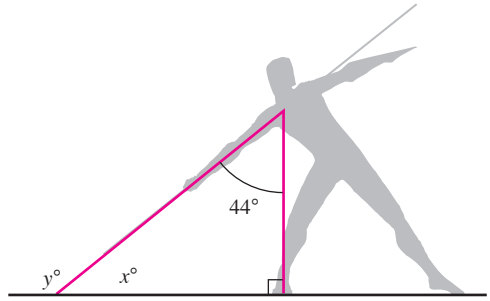
97. m(∠1)

98. m(∠C)

99. m(∠2)

100. m(∠3)

101. LANZAMIENTO DE JABALINA Determine x y y.



102. Encuentre la suma de los ángulos en un pentágono.

103. Si dos lados de un triángulo rectángulo miden 5 metros y 12 metros, ¿cuánto mide la hipotenusa?

Si la respuesta no es exacta, redondéela hasta la centésima más cercana.

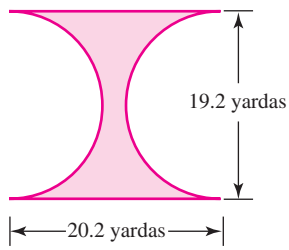
104. Encuentre el perímetro y el área de un rectángulo con dimensiones de 9 metros por 12 metros.

105. Encuentre el área de un triángulo con base de 14 pies de largo y una altura de 18 pies.

106. Encuentre el área de un trapecio que tiene bases que son de 12 pulgadas y 14 pulgadas y una altura de 7 pulgadas.

107. Encuentre la circunferencia y el área de un círculo con diámetro de 14 centímetros.

108. Encuentre el área de la región sombreada que se crea usando dos semicírculos.



109. Encuentre el volumen de un sólido rectangular con dimensiones de 5 metros por 6 metros por 7 metros.

110. Encuentre el volumen de una esfera con un diámetro de 10 pulgadas.

111. Encuentre el volumen de un cono que tiene una base circular de 8 metros de diámetro y una altura de 9 metros.

112. Encuentre el volumen de un tubo cilíndrico que tiene 20 pies de largo y 6 pulgadas de diámetro.

113. Encuentre el área superficial de un bloque de hielo que tiene la forma de un sólido rectangular con dimensiones 15 pulg × 24 pulg × 18 pulg.

APÉNDICE I

Polinomios

I.1 Introducción a los polinomios

- Polinomios • Clasificación de los polinomios • Grado de un polinomio
- Evaluación de polinomios

Polinomios

Cabe recordar que un **término algebraico,** o simplemente **término,** es un número o un producto de un número y una o más variables, las cuales se pueden elevar como potencias. Algunos ejemplos de términos son:

$$17, \quad 5x, \quad 6t^2 \quad \text{y} \quad -8z^3$$

Los coeficientes de estos términos son 17, 5, 6 y -8 respectivamente.

Polinomios

Un **polinomio** es un término único o una suma de términos en los que todas las variables tienen números naturales como exponentes. No aparece ninguna variable en el denominador.

Algunos ejemplos de polinomios son:

$$0, \quad 8y^2, \quad 2x + 1, \quad 4y^2 - 2y + 3 \quad \text{y} \quad 7a^3 + 2a^2 - a - 1$$

El polinomio $8y^2$ tiene un término. El polinomio $2x + 1$ tiene dos términos, $2x$ y 1. Como $4y^2 - 2y + 3$ se puede escribir como $4y^2 + (-2y) + 3$, éste es la suma de los tres términos, $4y^2$, $-2y$ y 3.

Clasificación de polinomios

Los polinomios se clasifican de acuerdo a la cantidad de términos que contienen. Un polinomio que tiene sólo un término se designa **monomio.** Un polinomio con dos términos se conoce como **binomio.** Un polinomio con tres términos se designa **trinomio.** La tabla I.1 muestra algunos ejemplos de estos polinomios.

Monomios	Binomios	Trinomios
$5x^2$	$2x - 1$	$5t^2 + 4t + 3$
$-6x$	$18a^2 - 4a$	$27x^3 - 6x + 2$
29	$-27z^4 + 7z^2$	$32r^2 + 7r - 12$

TABLA I.1

Autoevaluación 1
Clasifique cada polinomio como monomio, binomio o trinomio según sea el caso.
a. $5x$
b. $8x^2 + 7$
c. $x^2 - 2x - 1$

Respuestas **a.** monomio, **b.** binomio, **c.** trinomio

EJEMPLO 1 Clasifique cada polinomio como monomio, binomio o trinomio: **a.** $3x + 4$, **b.** $3x^2 + 4x - 12$ y **c.** $25x^3$.

Solución

a. Como $3x + 4$ tiene dos términos, es un binomio.

b. Como $3x^2 + 4x - 12$ tiene tres términos, es un trinomio.

c. Como $25x^3$ tiene un término, es un monomio.

Grado de un polinomio

El monomio $7x^3$ se denomina **monomio de tercer grado** o **monomio de grado 3,** puesto que la variable aparece tres veces como factor.

- $5x^2$ es un monomio de segundo grado. Porque la variable aparece dos veces como factor: $x^2 = x \cdot x$.
- $-8x^4$ es un monomio de cuarto grado. Porque la variable aparece cuatro veces como factor: $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$.
- $\frac{1}{2}x^5$ es un monomio de grado 5. Porque la variable aparece 5 veces como factor: $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

El grado de un polinomio se define considerando los grados de cada uno de sus términos.

Grado de un polinomio

El **grado de un polinomio** es igual al grado del término que tiene el mayor grado.

Por ejemplo,

- $x^2 + 5x$ es un binomio de grado 2, porque el grado de su término que tiene el mayor exponente (x^2) es 2.
- $4y^3 + 2y - 7$ es un trinomio de grado 3, porque el grado de su término que tiene el mayor exponente ($4y^3$) es 3.
- $\frac{1}{2}z + 3z^4 - 2z^2$ es un trinomio de grado 4, porque el grado de su término que tiene el mayor exponente ($3z^4$) es 4.

Autoevaluación 2
Calcule el grado de cada polinomio:
a. $3p^3$
b. $17r^4 + 2r^8 - r$
c. $-2g^5 - 7g^6 + 12g^7$

Respuestas **a.** 3, **b.** 8, **c.** 7

EJEMPLO 2 Determine el grado de cada polinomio: **a.** $-2x + 4$, **b.** $5t^3 + t^4 - 7$ y **c.** $3 - 9z + 6z^2 - z^3$.

Solución

a. Como $-2x$ se puede escribir como $-2x^1$, el grado del término que tiene el mayor exponente (o grado) es 1. En consecuencia, el grado del polinomio es 1

b. En $5t^3 + t^4 - 7$, el grado del término que tiene el mayor exponente (t^4) es 4. En consecuencia, el grado del polinomio es 4.

c. En $3 - 9z + 6z^2 - z^3$, el grado del término que tiene el mayor exponente ($-z^3$) es 3. En consecuencia, el grado del polinomio es 3.

Evaluación de polinomios

Cuando un número se sustituye por la variable en un polinomio, el polinomio toma un valor numérico. Al hecho de calcular este valor se conoce como **evaluar el polinomio.**

EJEMPLO 3 Evalúe cada polinomio cuando $x = 3$: **a.** $3x - 2$ y **b.** $-2x^2 + x - 3$.

Solución

a. $3x - 2 = 3(3) - 2$ Se sustituye x por 3.
$= 9 - 2$ Se multiplica $3(3) = 9$.
$= 7$ Se realiza la resta: $9 - 2 = 7$.

b. $-2x^2 + x - 3 = -2(3)^2 + 3 - 3$ Se sustituye x por 3.
$= -2(9) + 3 - 3$ Se eleva al cuadrado 3: $3 \cdot 3 = 9$.
$= -18 + 3 - 3$ Se multiplica: $-2(9) = -18$.
$= -15 - 3$ Se suma: $-18 + 3 = -15$.
$= -18$ Se resta: $-15 - 3 = -18$.

Autoevaluación 3
Evalúe cada polinomio cuando: $x = -1$
a. $-2x^2 - 4$
b. $3x^2 - 4x + 1$

Respuestas **a.** -6, **b.** 8

EJEMPLO 4 **Altura de un objeto.** El polinomio $-16t^2 + 28t + 8$ representa la altura de un objeto (en pies) en t segundos después que se ha lanzado en línea recta y hacia arriba. Calcule la altura que alcanzará el objeto en 1 segundo.

Solución Para calcular la altura en 1 segundo, evaluamos el polinomio en $t = 1$.

$-16t^2 + 28t + 8 = -16(1)^2 + 28(1) + 8$ Se sustituye t por 1.
$= -16(1) + 28(1) + 8$ Se eleva 1 al cuadrado: $1 \cdot 1 = 1$.
$= -16 + 28 + 8$ Se multiplica: $-16(1) = -16$ y $28(1) = 28$.
$= 12 + 8$ Se suma: $-16 + 28 = 12$.
$= 20$ Se suma: $12 + 8 = 20$.

En 1 segundo, el objeto está a una altura de 20 pies sobre la tierra.

Autoevaluación 4
Calcule la altura del objeto en 2 segundos.

Respuesta 0 pies

Sección I.1 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Un polinomio con un término se conoce como _____.
2. Un polinomio con tres términos se denomina _____.
3. Un polinomio con dos términos se denomina _____.
4. El grado de un polinomio es el _____ como el grado de su término que tiene el máximo grado.

CONCEPTOS *Clasifique cada polinomio como monomio, binomio, trinomio.*

5. $3x^2 - 4$
6. $5t^2 - t + 1$
7. $17e^4$
8. $x^2 + x + 7$
9. $25u^2$
10. $x^2 - 9$
11. $q^5 + q^2 + 1$
12. $4d^3 - 3d^2$

Determine el grado de cada polinomio:

13. $5x^3$
14. $3t^5 + 3t^2$
15. $2x^2 - 3x + 2$
16. $\frac{1}{2}p^4 - p^2$
17. $2m$
18. $7q - 5$
19. $25w^6 + 5w^7$
20. $p^6 - p^8$

NOTACIÓN *Escriba cada solución.*

21. Evalúe $3a^2 + 2a - 7$ cuando $a = 2$.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2a - 7 &= 3(\square)^2 + 2(\square) - 7 \\ &= 3(\square) + \square - 7 \\ &= 12 + 4 - 7 \\ &= \square - 7 \\ &= 9 \end{aligned}$$

22. Evalúe $-q^2 - 3q + 2$ cuando $q = -1$.

$$\begin{aligned} -q^2 - 3q + 2 &= -(\square)^2 - 3(\square) + 2 \\ &= -(\square) - 3(-1) + 2 \\ &= -1 + \square + 2 \\ &= \square + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

PRÁCTICA *Evalúe cada polinomio sustituyendo el valor que se indica.*

23. $3x + 4$ cuando $x = 3$

24. $\frac{1}{2}x - 3$ cuando $x = -6$

25. $2x^2 + 4$ cuando $x = -1$

26. $-\frac{1}{2}x^2 - 1$ cuando $x = 2$

27. $0.5t^3 - 1$ cuando $t = 4$

28. $0.75a^2 + 2.5a + 2$ cuando $a = 0$

29. $\frac{2}{3}b^2 - b + 1$ cuando $b = 3$

30. $3n^2 - n + 2$ cuando $n = 2$

31. $-2s^2 - 2s + 1$ cuando $s = -1$

32. $-4r^2 - 3r - 1$ cuando $r = -2$

APLICACIONES *La altura h (en pies) de una pelota que se lanza en línea recta con una velocidad inicial de 64 pies/segundo está determinada por la ecuación $h = -16t^2 + 64t$. Calcule la altura de la pelota después de cierta cantidad de segundos.*

33. 0 segundos

34. 1 segundo

35. 2 segundos

36. 4 segundos

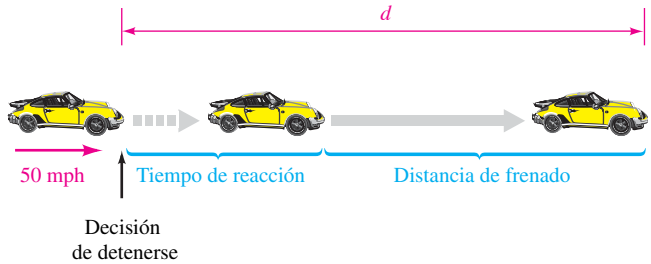
La cantidad de pies que puede viajar un automóvil antes de detenerse depende del tiempo de reacción del conductor y de la distancia de frenado. Para un conductor, la distancia de frenado d está determinada por la ecuación $d = 0.04v^2 + 0.9v$, donde v es la velocidad del automóvil. Calcule la distancia de frenado para cada una de las siguientes velocidades:

37. 30 mph

38. 50 mph

39. 60 mph

40. 70 mph



POR ESCRITO

41. Explique cómo calcular el grado del polinomio $2x^3 + 5x^5 - 7x$.

42. Explique cómo evaluar el polinomio $-2x^2 - 3$ cuando $x = 5$.

REPASO *Realice las operaciones*

43. $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$

44. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

45. $\frac{36}{7} - \frac{23}{7}$

46. $\frac{5}{14} - \frac{4}{21}$

47. $\frac{5}{12} \cdot \frac{18}{5}$

48. $\frac{23}{25} \div \frac{46}{5}$

Resuelva cada ecuación.

49. $x - 4 = 12$

50. $4z = 108$

51. $2(x - 3) = 6$

52. $3(a - 5) = 4(a + 9)$

I.2 Suma y resta de polinomios

- Suma de polinomios
- Resta de polinomios

Los polinomios se pueden sumar, restar y multiplicar en forma similar a como se realiza con los números en aritmética. En esta sección aprenderemos cómo calcular las sumas y diferencias de polinomios.

Suma de polinomios

Recuerde que los términos semejantes tienen exactamente las mismas variables y los mismos exponentes. Por ejemplo, los monomios

$3z^2$ y $-2z^2$ son términos semejantes. Los dos tienen la misma variable (z) con el mismo exponente (2).

Sin embargo los monomios

$7b^2$ y $8a^2$ no son términos semejantes. Tienen diferentes variables.

$32p^2$ y $25p^3$ no son términos semejantes. Los exponentes de p son diferentes.

Recuerde además que los términos semejantes se pueden combinar sumando sus coeficientes y manteniendo las mismas variables y exponentes. Por ejemplo:

$$2y + 5y = (2 + 5)y = 7y \quad \text{y} \quad -3x^2 + 7x^2 = (-3 + 7)x^2 = 4x^2$$

En consecuencia, *para sumar monomios que tienen términos semejantes, se suman los coeficientes y se mantienen las mismas variables y exponentes.*

EJEMPLO 1 Sume: $5x^3 + 7x^3$

Solución Como los monomios son términos semejantes, sumamos los coeficientes y mantenemos las variables y los exponentes.

$$5x^3 + 7x^3 = 12x^3$$

Autoevaluación 1
Sume: $7y^3 + 12y^3$

Respuesta $19y^3$

EJEMPLO 2 Sume: $\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2}t^2$

Solución Como los monomios son términos semejantes, sumamos los coeficientes y mantenemos los exponentes y las variables.

$$\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2}t^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right)t^2$$

$$= \frac{15}{2}t^2$$

Para sumar las fracciones, se suman los numeradores y se mantienen los denominadores: $3 + 5 + 7 = 15$.

Autoevaluación 2
Sume: $3.2m^3 + 4.5m^3 + 7.2m^3$

Respuesta $14.9m^3$

Para sumar dos polinomios, se escribe el signo + entre los polinomios y se combinan los términos semejantes.

EJEMPLO 3 Sume: $2x + 3$ y $7x - 1$

Solución

$(2x + 3) + (7x - 1)$ Se escribe un signo + entre los binomios.

$= (2x + 7x) + (3 - 1)$ Se usan las propiedades asociativas y conmutativas para agrupar los términos semejantes.

$= 9x + 2$ Se combinan los términos semejantes.

Autoevaluación 3
Sume: $(5y - 2) + (-3y + 7)$

Respuesta $2y + 5$

Los binomios del ejemplo 3 se pueden sumar si se escriben los polinomios de tal forma que los términos se acomoden en columnas.

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ +\ 7x - 1 \\ \hline 9x + 2 \end{array}$$

Se suman los términos semejantes, una columna a la vez.

Autoevaluación 4
Sume:
$(2b^2 - 4b) + (b^2 + 3b - 1)$

Respuesta $3b^2 - b - 1$

EJEMPLO 4 Sume: $(5x^2 - 2x + 4) + (3x^2 - 5)$

Solución

$$(5x^2 - 2x + 4) + (3x^2 - 5)$$
$$= (5x^2 + 3x^2) + (-2x) + (4 - 5)$$ Se aplican las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.
$$= 8x^2 - 2x - 1$$ Se combinan los términos semejantes.

Los polinomios del ejemplo 4 se pueden sumar si se escriben los polinomios en forma que los términos semejantes se escriban en columnas.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 2x + 4 \\ +\,3x^2 \qquad - 5 \\ \hline 8x^2 - 2x - 1 \end{array}$$ Se suman los términos semejantes, una columna a la vez.

Autoevaluación 5
Sume:
$(s^2 + 1.2s - 5) + (3s^2 - 2.5s + 4)$

Respuesta $4s^2 - 1.3s - 1$

EJEMPLO 5 Sume: $(3.7x^2 + 4x - 2) + (7.4x^2 - 5x + 3)$

Solución

$$(3.7x^2 + 4x - 2) + (7.4x^2 - 5x + 3)$$
$$= (3.7x^2 + 7.4x^2) + (4x - 5x) + (-2 + 3)$$ Se aplican las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.
$$= 11.1x^2 - x + 1$$ Se combinan los términos semejantes.

Los trinomios del ejemplo 5 se pueden sumar si se escriben de tal forma que los términos semejantes estén colocados en columnas.

$$\begin{array}{r} 3.7x^2 + 4x - 2 \\ +\ 7.4x^2 - 5x + 3 \\ \hline 11.1x^2 - \ x + 1 \end{array}$$ Se suman los términos semejantes, una columna a la vez.

Resta de polinomios

Para restar un monomio de otro, se suma el opuesto del monomio que se va a sustraer. En símbolos, $x - y = x + (-y)$.

Autoevaluación 6
Reste: $6y^3 - 9y^3$

Respuesta $-3y^3$

EJEMPLO 6 Reste: $8x^2 - 3x^2$

Solución

$$8x^2 - 3x^2 = 8x^2 + (-3x^2)$$ Se suma el opuesto de $3x^2$
$$= 5x^2$$ Se suman los coeficientes y se mantienen las mismas variables y el exponente.

Para restar polinomios también se suma el opuesto. Por ejemplo, para restar $3n^2 - 4n + 2$ de $5n^2 + 2n - 3$, se procede como se indica a continuación.

$$(5n^2 + 2n - 3) - (3n^2 - 4n + 2)$$

$= (5n^2 + 2n - 3) + [-(3n^2 - 4n + 2)]$ Se suma el opuesto.

$= (5n^2 + 2n - 3) + (-3n^2 + 4n - 2)$ Se aplica la propiedad distributiva para cambiar los signos.

$= (5n^2 - 3n^2) + (2n + 4n) + (-3 - 2)$ Se aplican las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.

$= 2n^2 + 6n - 5$ Se combinan los términos semejantes.

Estos polinomios se pueden restar si se escriben como términos semejantes que se agrupan en columnas.

$$\begin{array}{r} 5n^2 + 2n - 3 \\ -(3n^2 - 4n + 2) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 5n^2 + 2n - 3 \\ +\ -3n^2 + 4n - 2 \\ \hline 2n^2 + 6n - 5 \end{array}$$

Se cambian los signos y se realiza la suma.

EJEMPLO 7

Reste: $(3x - 4.2) - (5x + 7.2)$

Solución

$$(3x - 4.2) - (5x + 7.2)$$

$= (3x - 4.2) + [-(5x + 7.2)]$ Se suma el opuesto.

$= (3x - 4.2) + (-5x - 7.2)$ Se aplica la propiedad distributiva para cambiar los signos.

$= (3x - 5x) + (-4.2 - 7.2)$ Se aplican las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.

$= -2x - 11.4$ Se combinan los términos semejantes.

Autoevaluación 7

Reste:
$(3.3a - 5) - (7.8a + 2)$

Respuesta $-4.5a - 7$

Los binomios del ejemplo 7 se pueden restar si se escriben de tal forma que los términos semejantes se agrupen en columnas.

$$\begin{array}{r} 3x - 4.2 \\ -(5x + 7.2) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3x - 4.2 \\ +\ -5x - 7.2 \\ \hline -2x - 11.4 \end{array}$$

Se cambian los signos y se realizan las sumas.

EJEMPLO 8

Reste: $(3x^2 - 4x - 6) - (2x^2 - 6x + 12)$

Solución

$$(3x^2 - 4x - 6) - (2x^2 - 6x + 12)$$

$= (3x^2 - 4x - 6) + [-(2x^2 - 6x + 12)]$ Se suma el opuesto.

$= (3x^2 - 4x - 6) + (-2x^2 + 6x - 12)$ Se aplica la propiedad distributiva para cambiar los signos.

$= (3x^2 - 2x^2) + (-4x + 6x) + (-6 - 12)$ Se aplican las propiedades asociativa y conmutativa para agrupar los términos semejantes.

$= x^2 + 2x - 18$ Se combinan los términos semejantes.

Autoevaluación 8

Reste:
$(5y^2 - 4y + 2) - (3y^2 + 2y - 1)$

Respuesta $2y^2 - 6y + 3$

Los trinomios del ejemplo 8 se pueden restar si se escriben de tal forma que los términos semejantes se agrupen en columnas.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x - 6 \\ -(2x^2 - 6x + 12) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3x^2 - 4x - 6 \\ +\ -2x^2 + 6x - 12 \\ \hline x^2 + 2x - 18 \end{array}$$

Se cambian los signos y se realizan las sumas.

Sección I.2 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Si dos términos algebraicos tienen exactamente las mismas variables y exponentes, se conocen como términos _____.
2. $3x^3$ y $3x^2$ son términos _____.

CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

3. Para sumar dos monomios, sumamos el _____ y mantenemos el mismo _____ y los exponentes.
4. Para restar un monomio de otro, sumamos el _____ del monomio que se va a restar.

Determine si los siguientes monomios son términos semejantes. En caso afirmativo combínelos.

5. $3y, 4y$
6. $3x^2, 5x^2$
7. $3x, 3y$
8. $3x^2, 6x$
9. $3x^3, 4x^3, 6x^3$
10. $-2y^4, -6y^4, 10y^4$
11. $-5x^2, 13x^2, 7x^2$
12. $23, 12x, 25x$

NOTACIÓN *Anote cada solución.*

13. $(3x^2 + 2x - 5) + (2x^2 - 7x)$
$= (3x^2 + \square) + (2x - \square) + (-5)$
$= \square + (-5x) - 5$
$= 5x^2 - 5x - 5$

14. $(3x^2 + 2x - 5) - (2x^2 - 7x)$
$= (3x^2 + 2x - 5) + [-(\square - 7x)]$
$= (3x^2 + 2x - 5) + (\square)$
$= (\square) + (2x + 7x) + (-5)$
$= x^2 + 9x - 5$

PRÁCTICA *Sume los polinomios.*

15. $4y + 5y$
16. $-2x + 3x$
17. $-8t^2 - 4t^2$
18. $15x^2 + 10x^2$
19. $3s^2 + 4s^2 + 7s^2$
20. $-2a^3 + 7a^3 - 3a^3$
21. $(3x + 7) + (4x - 3)$
22. $(2y - 3) + (4y + 7)$
23. $(2x^2 + 3) + (5x^2 - 10)$
24. $(-4a^2 + 1) + (5a^2 - 1)$
25. $(5x^3 - 4.2x) + (7x^3 - 10.7x)$
26. $(-4.3a^3 + 25a) + (5.8a^3 - 10a)$
27. $(3x^2 + 2x - 4) + (5x^2 - 17)$
28. $(5a^2 - 2a) + (-2a^2 + 3a + 4)$
29. $(7y^2 + 5y) + (y^2 - y - 2)$
30. $(4p^2 - 4p + 5) + (6p - 2)$
31. $(3x^2 - 3x - 2) + (3x^2 + 4x - 3)$
32. $(4c^2 + 3c - 2) + (3c^2 + 4c + 2)$
33. $(3n^2 - 5.8n + 7) + (-n^2 + 5.8n - 2)$
34. $(-3t^2 - t + 3.4) + (3t^2 + 2t - 1.8)$
35. $3x^2 + 4x + 5$
$\underline{2x^2 - 3x + 6}$
36. $2x^2 - 3x + 5$
$\underline{-4x^2 - x - 7}$
37. $-3x^2 \quad - 7$
$\underline{-4x^2 - 5x + 6}$
38. $4x^2 - 4x + 9$
$\underline{9x - 3}$
39. $-3x^2 + 4x + 25.4$
$\underline{5x^2 - 3x - 12.5}$
40. $-6x^3 - 4.2x^2 + 7$
$\underline{-7x^3 + 9.7x^2 - 21}$

Reste los polinomios.

41. $32u^3 - 16u^3$
42. $25y^2 - 7y^2$
43. $18x^5 - 11x^5$
44. $17x^6 - 22x^6$
45. $(4.5a + 3.7) - (2.9a - 4.3)$
46. $(5.1b - 7.6) - (3.3b + 5.9)$
47. $(-8x^2 - 4) - (11x^2 + 1)$
48. $(5x^3 - 8) - (2x^3 + 5)$
49. $(3x^2 - 2x - 1) - (-4x^2 + 4)$
50. $(7a^2 + 5a) - (5a^2 - 2a + 3)$
51. $(3.7y^2 - 5) - (2y^2 - 3.1y + 4)$
52. $(t^2 - 4.5t + 5) - (2t^2 - 3.1t - 1)$
53. $(2b^2 + 3b - 5) - (2b^2 - 4b - 9)$
54. $(3a^2 - 2a + 4) - (a^2 - 3a + 7)$
55. $(5p^2 - p + 7.1) - (4p^2 + p + 7.1)$
56. $(m^2 - m - 5) - (m^2 + 5.5m - 7.5)$
57. $3x^2 + 4x - 5$
$- \underline{(-2x^2 - 2x + 3)}$
58. $3y^2 - 4y + 7$
$- \underline{(6y^2 - 6y - 13)}$
59. $-2x^2 - 4x + 12$
$- \underline{(10x^2 + 9x - 24)}$

60.
$$\begin{array}{r} 25x^3 - 45x^2 + 31x \\ -\ (12x^3 + 27x^2 - 17x) \\ \hline \end{array}$$

61.
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 3x + 10 \\ -\ (5x^3 - 4x - 4) \\ \hline \end{array}$$

62.
$$\begin{array}{r} 3x^3 + 4x^2 + 12 \\ -\ (-4x^3 + 6x^2 - 3) \\ \hline \end{array}$$

APLICACIONES

Considere la siguiente información: Si se adquiere una casa por \$85 000 *y se espera que su plusvalía se incremente* \$700 *por año, su valor y después de x años estará determinado por la ecuación* $y = 700x + 85\,000$.

63. VALOR DE UNA CASA Calcule el valor estimado de la casa después de 10 años.

64. VALOR DE UNA CASA Se compra una segunda casa por \$102 000 y se espera que su plusvalía sea de \$900 por año. Encuentre la ecuación que determine el valor y de la casa después de x años.

65. VALOR DE UNA CASA Calcule el valor de la casa que se analizó en el ejercicio 64 después de 12 años.

66. VALOR DE DOS CASAS Encuentre una sola ecuación polinomial que determine el valor combinado de y para las dos casas después de x años.

67. VALOR DE DOS CASAS Calcule en dos formas el valor de las dos casas después de 15 años.

a. Sustituyendo en las ecuaciones polinomiales $y = 700x + 85\,000$ y $y = 900x + 102\,000$ y realizando las sumas.

b. Sustituyendo en el resultado del ejercicio 66.

68. VALOR DE DOS CASAS Calcule en dos formas el valor de las dos casas después de 25 años.

a. Sustituyendo en las ecuaciones polinomiales $y = 700x + 85\,000$ y $y = 900x + 102\,000$ y realizando las sumas.

b. Sustituyendo en el resultado del ejercicio 66.

Considere la siguiente información. Una pareja de esposos jóvenes adquiere dos automóviles, uno por \$8500 *y el otro por* \$10 200. *Se espera que el primer automóvil deprecie su valor en* \$800 *por año, y el segundo auto en* \$1100 *por año.*

69. VALOR DE UN AUTOMÓVIL Escriba una ecuación que determine el valor y del primer automóvil después de x años.

70. VALOR DE UN AUTOMÓVIL Escriba una ecuación que determine el valor y del segundo automóvil después de x años.

71. VALOR DE DOS AUTOMÓVILES Determine una sola ecuación que determine el valor y de ambos automóviles después de x años.

72. VALOR DE DOS AUTOMÓVILES Determine en dos formas el valor de los dos automóviles después de 6 años.

POR ESCRITO

73. ¿Qué son *términos semejantes*?

74. Explique cómo sumar dos polinomios.

75. Explique cómo restar dos polinomios.

76. Cuando se suman dos polinomios, ¿el resultado siempre es un binomio? Explique su respuesta.

REPASO

77. TENIS DE BASQUETBOL Utilice la siguiente información para calcular cuán ligeros son los tenis de Kevin Garnett en comparación con los tenis de Michael Jordan.

Nike Air Garnett III	**Air Jordan XV**
Malla sintética decolorada y piel. Tallas $6\frac{1}{2}$ a18 Peso: 13.8 onzas	Parte superior de piel de grano completo y patrón ondulado. Tallas $6\frac{1}{2}$ a 18 Peso: 14.6 onzas

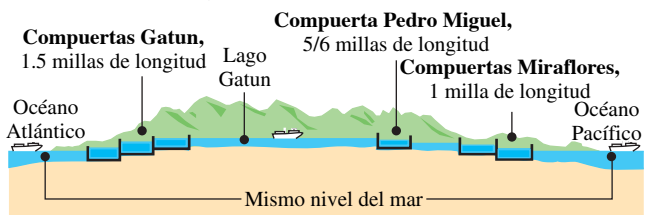
78. AERÓBICOS La cantidad de calorías que se queman durante la realización de ejercicios aeróbicos en escalones depende de la altura del escalón. ¿Cuántas calorías adicionales se queman durante una sesión de ejercicios de 10 minutos si se utiliza un escalón que mide 8 pulgadas de altura en vez de un escalón cuya altura es de 4 pulgadas?

Altura del escalón (en pulg)	Calorías quemadas por minuto
4	4.5
6	5.5
8	6.4
10	7.2

Fuente: *Reebok Instructor News* (Vol. 4, No. 3, 1991)

79. EL CANAL DE PANAMÁ Un barco ingresa al Canal de Panamá proveniente del Océano Atlántico se levanta 85 pies sobre el nivel del lago Gatun gracias a un sistema de compuertas. Véase la siguiente figura. Luego el barco desciende 31 pies gracias a las compuertas del lago Pedro Miguel. ¿Qué profundidad adicional debe bajar el barco en el sistema de compuertas de Miraflores para que esté al mismo nivel del Océano Pacífico?

80. COMPUERTAS DEL CANAL ¿Cuál es la longitud combinada del sistema de compuertas del Canal de Panamá? Exprese su respuesta como número mixto y como decimal, redondee al décimo más cercano.



I.3 Multiplicación de polinomios

- Multiplicación de polinomios
- Multiplicación de un polinomio por un monomio
- Multiplicación de un binomio por un binomio
- Multiplicación de un polinomio por un binomio

En esta sección analizaremos cómo multiplicar los polinomios.

Multiplicación de monomios

Para multiplicar $4x^2$ por $-2x^3$, se aplican las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para agrupar los factores numéricos y los factores de las variables y se realiza la multiplicación.

$$\begin{aligned} 4x^2(-2x^3) &= 4(-2)x^2x^3 \\ &= -8x^5 \end{aligned}$$

Este ejemplo sugiere la siguiente regla.

Multiplicación de dos monomios

Para multiplicar dos monomios, se multiplican los factores numéricos y luego se multiplican los factores de la variable.

Autoevaluación 1
Multiplique: $-7a^3 \cdot 2a^5$

EJEMPLO 1 Multiplique: **a.** $3y \cdot 6y$ y **b.** $-3x^5(2x^5)$.

Solución

a. $3y \cdot 6y = (3 \cdot 6)(y \cdot y)$ Se multiplican los factores numéricos y se multiplican las variables.

$= 18y^2$ Se multiplica : $3 \cdot 6 = 18$ y $y \cdot y = y^2$.

b. $(-3x^5)(2x^5) = (-3 \cdot 2)(x^5 \cdot x^5)$ Se multiplican los factores numéricos y se multiplican las variables.

$= -6x^{10}$ Se multiplica: $-3 \cdot 2 = -6$ y $x^5 \cdot x^5 = x^{10}$

Respuesta $-14a^8$

Multiplicación de un polinomio por un monomio

Para calcular el producto de un polinomio y un monomio se utiliza la propiedad distributiva. Por ejemplo para multiplicar $x + 4$ por $3x$, se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 3x(x + 4) &= 3x(x) + 3x(4) && \text{Se utiliza la propiedad distributiva.} \\ &= 3x^2 + 12x && \text{Se multiplican los monomios: } 3x(x) = 3x^2 \text{ y } 3x(4) = 12x \end{aligned}$$

Los resultados de este ejemplo sugieren la siguiente regla.

Multiplicación de polinomios por monomios

Para multiplicar un polinomio por un monomio se usa la propiedad distributiva para quitar los paréntesis y simplificar.

Autoevaluación 2
Multiplique:
a. $3y(5y^3 - 4y)$
b. $5x(3x^2 - 2x + 3)$

EJEMPLO 2 Multiplique: **a.** $2a^2(3a^2 - 4a)$ y **b.** $2x(3x^2 + 2x - 3)$

Solución

a. $2a^2(3a^2 - 4a)$

$= 2a^2(3a^2) - 2a^2(4a)$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= 6a^4 - 8a^3$ Se multiplica: $2a^2(3a^2) = 6a^4$ y $2a^2(4a) = 8a^3$

b. $2x(3x^2 + 2x - 3)$

$= 2x(3x^2) + 2x(2x) - 2x(3)$ Se usa la propiedad distributiva,

$= 6x^3 + 4x^2 - 6x$ Se multiplica: $2x(3x^2) = 6x^3$, $2x(2x) = 4x^2$ y $2x(3) = 6x$.

Respuestas **a.** $15y^4 - 12y^2$, **b.** $15x^3 - 10x^2 + 15x$

Multiplicación de un binomio por otro binomio

Para multiplicar dos binomios se utiliza la propiedad distributiva más de una vez. Por ejemplo para multiplicar $2x + 3$ por $3x - 5$, se procede como se indica a continuación.

$(3x - 5)(2x + 3) = (3x - 5)2x + (3x - 5)3$ Se distribuye cada factor de $3x - 5$ sobre los dos términos del binomio $(2x + 3)$.

$= 2x(3x - 5) + 3(3x - 5)$ Se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación.

$= 2x(3x) - 2x(5) + 3(3x) - 3(5)$ Se aplica dos veces la propiedad distributiva de la multiplicación.

$= 6x^2 - 10x + 9x - 15$ Se realizan las multiplicaciones.

$= 6x^2 - x - 15$ Se combinan los términos semejantes: $-10x + 9x = -x$.

Los resultados de este ejemplo sugieren la siguiente regla.

Multiplicación de un binomio por otro binomio

Para multiplicar dos binomios se multiplica cada término de un binomio por cada uno de los términos del otro binomio, y se combinan los términos semejantes.

EJEMPLO 3 Multiplique: $(2x - 4)(3x + 5)$.

Solución

$(2x - 4)(3x + 5)$

$= (2x - 4)3x + (2x - 4)5$ Se multiplica cada término del binomio $(3x + 5)$ por $2x - 4$.

$= 3x(2x - 4) + 5(2x - 4)$ Se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación.

$= 3x(2x) - 3x(4) + 5(2x) - 5(4)$ Se aplica dos veces la propiedad distributiva de la multiplicación.

$= 6x^2 - 12x + 10x - 20$ Se realizan las multiplicaciones.

$= 6x^2 - 2x - 20$ Se combinan los términos semejantes: $-12x + 10x = -2x$.

Autoevaluación 3
Multiplique: $(3x - 2)(2x + 3)$

Respuesta $6x^2 + 5x - 6$

EJEMPLO 4 Calcule: $(5x - 4)^2$.

Solución En la expresión $(5x - 4)^2$, el binomio $5x - 4$ es la base y 2 es el exponente.

$(5x - 4)^2 = (5x - 4)(5x - 4)$ Se escribe $5x - 4$ como factor dos veces.

$= (5x - 4)5x - (5x - 4)4$ Se distribuye cada factor del binomio $5x - 4$ con cada término de $(5x - 4)$.

$= 5x(5x - 4) - 4(5x - 4)$ Se modifica el orden de los factores.

$= 5x(5x) - 5x(4) - 4(5x) - 4(-4)$ Se distribuye la multiplicación por $5x$. Se distribuye la multiplicación por 4.

$= 25x^2 - 20x - 20x + 16$ Se realizan las multiplicaciones.

$= 25x^2 - 40x + 16$ Se simplifica: $-20x - 20x = -40x$.

Autoevaluación 4
Calcule: $(5x + 4)^2$

Respuesta $25x^2 + 40x + 16$

COMENTARIO Un error que se comete con bastante frecuencia cuando se eleva al cuadrado un binomio consiste en elevar al cuadrado solamente el primer y el segundo términos. Por ejemplo es incorrecto escribir

$$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - (4)^2$$
$$= 25x^2 - 16$$

La respuesta adecuada es $25x^2 - 40x + 16$.

Multiplicación de un polinomio por un binomio

Para multiplicar un polinomio por un binomio debemos aplicar la propiedad distributiva más de una vez. Por ejemplo, para multiplicar $3x^2 + 3x - 5$ por $2x + 3$, procedemos como se indica:

$$\begin{aligned}(\mathbf{2x + 3})(3x^2 + 3x - 5) &= (\mathbf{2x + 3})3x^2 + (\mathbf{2x + 3})3x - (\mathbf{2x + 3})5\\ &= 3x^2(2x + 3) + 3x(2x + 3) - 5(2x + 3)\\ &= 6x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 9x - 10x - 15\\ &= 6x^3 + 15x^2 - x - 15\end{aligned}$$

Autoevaluación 5
Multiplique: $(x - 2)(3x^2 + 4x + 1)$

EJEMPLO 5 Multiplique: $(3a + 1)(3a^2 + 2a + 2)$.

Solución

$$\begin{aligned}&(\mathbf{3a + 1})(3a^2 + 2a + 2)\\ &\quad = (\mathbf{3a + 1})3a^2 + (\mathbf{3a + 1})2a + (\mathbf{3a + 1})2\\ &\quad = 3a^2(3a + 1) + 2a(3a + 1) + 2(3a + 1)\\ &\quad = 3a^2(3a) + 3a^2(1) + 2a(3a) + 2a(1) + 2(3a) + 2(1)\\ &\quad = 9a^3 + 3a^2 + 6a^2 + 2a + 6a + 2\\ &\quad = 9a^3 + 9a^2 + 8a + 2\end{aligned}$$

Respuesta $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$

Podemos usar el formato de una columna para multiplicar polinomios. Para hacerlo, multiplicamos cada uno de los términos del polinomio superior por cada término del polinomio inferior. Para facilitar la suma, los términos similares se acomodan en columnas. Como ejemplo, podemos multiplicar $2x - 4$ por $3x + 2$ como se indica.

$$\begin{array}{rr} & 2x - 4\\ & \times\ 3x + 2\\ \hline 3x(2x - 4) \longrightarrow & 6x^2 - 12x\\ 2(2x - 4) \longrightarrow & \quad +\ 4x - 8\\ \hline & 6x^2 - \ 8x - 8\end{array}$$

Autoevaluación 6
Multiplique $3y^2 - 5y + 4$ por $4y - 3$.

EJEMPLO 6 Multiplique $3a^2 - 4a + 7$ por $2a + 5$.

Solución

$$\begin{array}{r} 3a^2 - \ 4a + 7\\ \times\qquad 2a + 5\\ \hline 6a^3 - \ 8a^2 + 14a\\ \quad +\ 15a^2 - 20a + 35\\ \hline 6a^3 + \ 7a^2 - \ 6a + 35\end{array}$$

Respuesta $12y^3 - 29y^2 + 31y - 12$

Sección I.3 EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. Un polinomio con un término se denomina un _____.
2. Un polinomio con dos términos se denomina un _____.
3. Un polinomio con ____ términos se denomina un trinomio.
4. $a(b + c) = ab + ac$ ilustra la propiedad _____.

CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

5. Para multiplicar dos monomios, multiplique los factores _____ y luego multiplique los _____ de la variable.
6. Para multiplicar un polinomio por un monomio, aplique la propiedad _____ para eliminar los paréntesis y simplificar.
7. Para multiplicar dos binomios, multiplique cada _____ de un binomio por cada término del otro binomio y combine los términos _____.
8. Para multiplicar un polinomio por un binomio se debe aplicar la _____ distributiva más de una vez.

NOTACIÓN *Escriba cada respuesta.*

9. $3x(2x - 5) = 3x(\quad) - 3x(\quad)$
$= 6x^2 - 15x$

10. $(3x + 1)(2x^2 - 3x - 2)$
$= (3x + 1)\quad - (3x + 1)\quad - (3x + 1)\quad$
$= 2x^2(3x + 1) - 3x(3x + 1) - 2(3x + 1)$
$= 2x^2(\quad) + 2x^2(1) - 3x(3x) - 3x(1)$
$\quad - 2(3x) - 2(\quad)$
$= 6x^3 + 2x^2 - \quad - 3x - \quad - 2$
$= 6x^3 - 7x^2 - 9x - 2$

PRÁCTICA *Calcule cada producto.*

11. $(3x^2)(4x^3)$
12. $(-2a^3)(3a^2)$
13. $(3b^2)(-2b)$
14. $(3y)(-y^4)$
15. $(-2x^2)(3x^3)$
16. $(-7x^3)(-3x^3)$
17. $\left(-\frac{2}{3}y^5\right)\left(\frac{3}{4}y^2\right)$
18. $\left(\frac{2}{5}r^4\right)\left(\frac{3}{5}r^2\right)$
19. $3(x + 4)$
20. $-3(a - 2)$
21. $-4(t + 7)$
22. $6(s^2 - 3)$
23. $3x(x - 2)$
24. $4y(y + 5)$
25. $-2x^2(3x^2 - x)$
26. $4b^3(2b^2 - 2b)$
27. $2x(3x^2 + 4x - 7)$
28. $3y(2y^2 - 7y - 8)$
29. $-p(2p^2 - 3p + 2)$
30. $-2t(t^2 - t + 1)$
31. $3q^2(q^2 - 2q + 7)$
32. $4v^3(-2v^2 + 3v - 1)$
33. $(a + 4)(a + 5)$
34. $(y - 3)(y + 5)$
35. $(3x - 2)(x + 4)$
36. $(t + 4)(2t - 3)$
37. $(2a + 4)(3a - 5)$
38. $(2b - 1)(3b + 4)$

Eleve al cuadrado cada binomio.

39. $(2x + 3)^2$
40. $(2y + 5)^2$
41. $(2x - 3)^2$
42. $(2y - 5)^2$
43. $(5t + 1)^2$
44. $(5t - 1)^2$

Multiplique los polinomios.

45. $(2x + 1)(3x^2 - 2x + 1)$
46. $(x + 2)(2x^2 + x - 3)$
47. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$
48. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
49. $(x + 2)(x^2 - 3x + 1)$
50. $(x + 3)(x^2 + 3x + 2)$

Calcule cada producto.

51. $4x + 3$
$\underline{\quad x + 2}$

52. $5r + 6$
$\underline{\quad 2r - 1}$

53. $4x - 2$
$\underline{3x + 5}$

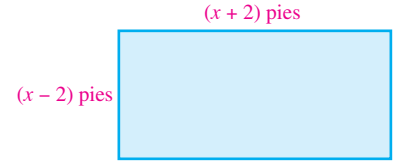
54. $6r + 5$
$\underline{2r - 3}$

55. $x^2 - x + 1$
$\underline{\quad\quad x + 1}$

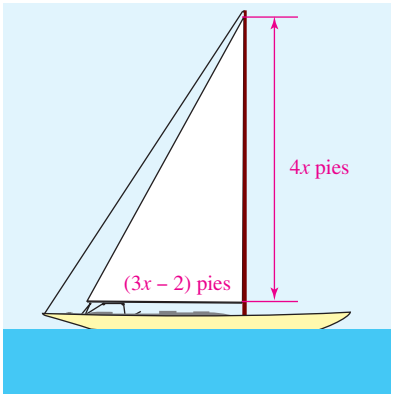
56. $4x^2 - 2x + 1$
$\underline{\quad\quad 2x + 1}$

APLICACIONES

57. GEOMETRÍA Exprese el área del rectángulo.



58. VELEROS La altura h de la vela triangular es $4x$ pies, y la base b es $3x - 2$ pies. Exprese el área de la vela. (*Sugerencia*: el área de un triángulo está determinada por la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$)



59. ECONOMÍA La ganancia R obtenida de la venta de relojes despertadores es el producto de su precio y la cantidad de unidades vendidas. Si el precio de cada despertador está determinado por la fórmula $-\frac{x}{100} + 30$ y x es la cantidad de unidades vendidas, determine una fórmula que permita calcular la ganancia obtenida.

60. ECONOMÍA Si la fórmula para determinar el precio del ejercicio 59 cambió a $-\frac{x}{100} + 40$, determine la fórmula para calcular la ganancia.

POR ESCRITO

61. Explique cómo se realiza la multiplicación de dos binomios.

62. Explique cómo calcular $(2x + 1)^2$

63. Explique por qué razón $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1^2$. (El símbolo $\neq$ se lee como "no es igual a")

64. Si dos términos se pueden sumar, entonces tienen que ser términos semejantes. Si se van a multiplicar dos términos, ¿ambos deben ser semejantes? Explique su respuesta.

REPASO

65. LA TIERRA El planeta Tierra requiere 23 horas, 56 minutos y 4.091 segundos para girar una vez alrededor de su eje. Escriba la cifra 4.091 con palabras.

66. COMIDA RÁPIDA El ticket de la siguiente figura muestra la cantidad pagada y el precio por libra de una ensalada de espagueti que se adquirió en una tienda de abarrotes delicatessen. Calcule el precio total de la ensalada.

67. ¿Cuál es el equivalente de $\frac{7}{64}$ en la forma decimal?

68. Escriba $-\frac{6}{10}$ en forma decimal.

69. Evalúe: $56.09 + 78 + 0.567$

70. Evalúe: $-679.4 - (-599.89)$

71. Evalúe: $\sqrt{16} + \sqrt{36}$

72. Calcule: $103.6 \div 0.56$

APÉNDICE II

Razonamiento inductivo y deductivo

- Razonamiento inductivo
- Razonamiento deductivo

Razonar significa pensar con lógica. El objetivo de este apéndice es desarrollar su inteligencia para la resolución de problemas mediante la mejora de sus habilidades de razonamiento. En este apartado se incluyen dos tipos fundamentales de razonamiento que se pueden aplicar en una amplia variedad de situaciones. Éstos se conocen como *razonamiento inductivo y razonamiento deductivo.*

Razonamiento inductivo

En un laboratorio los científicos realizan experimentos y observan los resultados. Después de repetir varias veces un experimento y obtener el mismo resultado, los investigadores generalizan los resultados en una afirmación que parece ser cierta.

- Si caliento agua a una temperatura de 212°F, ésta hervirá.
- Si dejo caer un objeto pesado, éste caerá.
- Si combino un ácido con una base, ocurrirá una reacción química.

Cuando se obtienen conclusiones generales a partir de observaciones específicas, estamos utilizando el **razonamiento inductivo**. El siguiente ejemplo muestra la forma en la que se utiliza el razonamiento inductivo en el pensamiento matemático. A partir de una lista de números o símbolos, denominada *secuencia*, se puede encontrar un término faltante de la secuencia si se analizan los patrones y se aplica el razonamiento inductivo.

EJEMPLO 1 **Patrón que aumenta.** Encuentre el número siguiente de la secuencia 5, 8, 11, 14, ...

Solución Los términos de la secuencia están en aumento. Para descubrir el patrón, determinamos la *diferencia* entre cada par sucesivo de términos.

$8 - 5 = 3$ Se resta el primer término del segundo término.

$11 - 8 = 3$ Se resta el segundo término del tercer término.

$14 - 11 = 3$ Se resta el tercer término del cuarto término.

La diferencia entre cada par de números es 3. Eso significa que cada número sucesivo es superior en 3 respecto del anterior. En consecuencia, el número siguiente de la secuencia es $14 + 3 = 17$.

Autoevaluación 1
Encuentre el número siguiente en la secuencia $-3, -1, 1, 3, \ldots$.

Respuesta 5

Autoevaluación 2
Encuentre el número siguiente en la secuencia $-0.1, -0.3, -0.5, -0.7 \ldots$.

Respuesta -0.9

EJEMPLO 2 **Patrón que disminuye.** Encuentre el número siguiente en la secuencia $-2, -4, -6, -8, \ldots$.

Solución Los términos de la secuencia disminuyen. Como cada término sucesivo es inferior a 2 unidades respecto del término anterior, el número siguiente del patrón es $-8 - 2$ o -10.

Autoevaluación 3
Encuentre el dato siguiente en la secuencia Z, A, Y, B, X, C, ...

Respuesta W

EJEMPLO 3 **Patrón alternativo.** Encuentre la letra siguiente en la secuencia D, B, E, C, F, D, ...

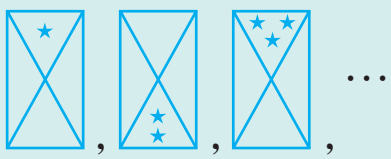
Solución La letra A es la primera letra del alfabeto, la letra D ocupa el cuarto lugar, B es la segunda letra, y así sucesivamente. Podemos crear la siguiente tabla de correspondencia entre letras y números:

$A \rightarrow 1$ sume 3.
$D \rightarrow 4$ reste 2.
$B \rightarrow 2$ sume 3.
$E \rightarrow 5$ reste 2.
$C \rightarrow 3$ sume 3.
$F \rightarrow 6$ reste 2.
$D \rightarrow 4$

Vemos que se suma 3 al primer numero para obtener el segundo. Luego se resta 2 al segundo número para obtener el tercero. Para obtener los términos sucesivos de la secuencia sumamos alternativamente 3 a un número, y luego restamos 2 al número de ese resultado para obtener el número siguiente.

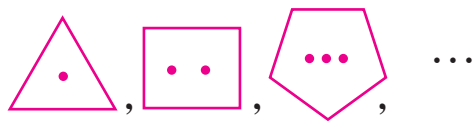
Si aplicamos este patrón, el número siguiente de la secuencia numérica será $4 + 3$ o 7. El número más grande que sigue en la secuencia original será G, ya que es la séptima letra del alfabeto.

Autoevaluación 4
Encuentre la siguiente forma geométrica en la secuencia que se muestra a continuación.



Respuesta

EJEMPLO 4 **Dos patrones.** Encuentre la forma geométrica que falta en la siguiente secuencia.



Solución La secuencia tiene dos patrones que aparecen al mismo tiempo. La primera figura tiene tres lados y un punto, la segunda figura tiene cuatro lados y dos puntos, y la tercer figura tiene cinco lados y tres puntos. En consecuencia, es de esperarse que la cuarta figura tenga seis lados y cuatro puntos, como se muestra en la figura A-1.

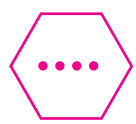


FIGURA A.1

EJEMPLO 5 **Patrón circular.** Encuentre la siguiente figura geométrica de la secuencia que se muestra a continuación.

Solución De la figura podemos observar que cada punto se mueve de un lugar de la estrella al siguiente, en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Este es un patrón circular. La siguiente figura de la secuencia será la que se muestra en la figura A-2.

FIGURA A.2

Autoevaluación 5
Encuentre la siguiente figura geométrica de la secuencia

Respuesta

Razonamiento deductivo

Contrario al razonamiento inductivo, el **razonamiento deductivo** va de un caso general a lo específico. Por ejemplo, si sabemos que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°, entonces sabemos que la suma de los ángulos del $\triangle ABC$ es 180°. Siempre que se aplique un principio general a una situación particular se estará usando el razonamiento deductivo.

El sistema de razonamiento deductivo se construye a partir de cuatro elementos.

1. **Términos indefinidos:** son aquéllos que se aceptan sin otorgarles un significado formal.
2. **Términos definidos:** son aquéllos que se definen de manera formal.
3. **Axiomas** o **postulados:** son afirmaciones que se aceptan sin prueba alguna.
4. **Teoremas:** son afirmaciones que se pueden probar con razonamiento formal.

Muchos problemas se pueden resolver aplicando el razonamiento deductivo. Por ejemplo, suponga que se planea inscribirse en el curso matutino de álgebra, y se sabe que los profesores Gravinsky, Miller y Wisniewski están asignados en los cursos siguientes de álgebra que se impartirán el siguiente semestre. Después de realizar cierta investigación, se encuentra que el profesor Gravinsky solamente da clases en la tarde, el profesor Wisniewski solamente imparte clases por la mañana, además sabemos que los dos tienen sus grupos completos. Sin saber nada acerca del profesor Miller, podemos concluir que él será nuestro mentor, ya que es la única posibilidad restante.

Los ejemplos que se muestran a continuación muestran cómo aplicar el razonamiento deductivo en la resolución de problemas.

EJEMPLO 6 **Programación de los cursos.** Cuatro profesores están programados en los cursos de matemáticas del siguiente semestre, y tienen las siguientes preferencias en las asignaciones de las materias:

1. Los profesores A y B no desean impartir cálculo.
2. El profesor C desea enseñar estadística.
3. El profesor B desea impartir álgebra.

¿Quién impartirá la materia de trigonometría?

Solución La gráfica siguiente muestra cada materia, con cada posible profesor.

Cálculo	Álgebra	Estadística	Trigonometría
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D

Como los profesores A y B no desean impartir cálculo, podemos eliminarlos de cálculo. Como el profesor C desea impartir estadística, podemos eliminarlo de cualquier otra opción. Esto deja al profesor D como la única persona que enseñaría cálculo, así que podemos eliminarlo de cualquier otra opción. Puesto que el profesor B desea enseñar álgebra, podemos eliminarlo de cualquier otra opción. En consecuencia, la única persona restante que queda para enseñar trigonometría es el profesor A.

Cálculo	Álgebra	Estadística	Trigonometría
~~A~~	A	A	A
~~B~~	B	~~B~~	~~B~~
~~C~~	~~C~~	C	~~C~~
D	~~D~~	~~D~~	~~D~~

Autoevaluación 7

De 50 automóviles que se ofertan en un lote de compactos usados, 9 tienen color rojo, 31 son modelos importados, y 6 son modelos importados de color rojo. Si un cliente desea adquirir un modelo nacional que no tenga color rojo, ¿entre cuántos automóviles tendrá que basar su elección?

EJEMPLO 7 **Banderas de los estados.** La gráfica de la figura A-3 muestra la cantidad de banderas de los diferentes estados que integran la unión americana, las cuales contienen una águila, una estrella o ambas. ¿Cuántas banderas de los estados tienen ya sea una águila o una estrella?

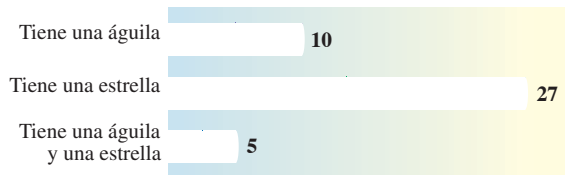


FIGURA A.3

Solución En la figura A-4(a), se observa el traslape o intersección de los círculos es una forma de representar que hay 5 banderas de los estados que tiene tanto una águila como una estrella. Si una águila aparece en un total de 10 banderas, entonces el círculo de la izquierda debe contener 5 banderas adicionales fuera de la intersección. Véase la figura A-4(b). Si un total de 27 banderas tienen una estrella, entonces el círculo de la derecha debe contener 22 banderas adicionales fuera de la intersección.

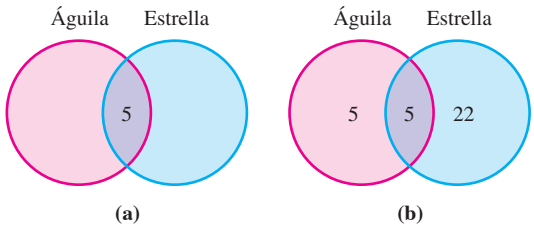


FIGURA A.4

De la figura A-4 se observa que 5 + 5 + 22 o 32 banderas tienen una águila, una estrella o ambas. Para determinar cuántas banderas tienen ya sea una águila o una estrella, restamos este total de la cantidad total de banderas de los estados, que es 50.

$$50 - 32 = 18$$

En consecuencia hay 18 banderas de los estados de la Unión Americana que tienen ya sea una águila o una estrella.

Respuesta 16

Apéndice II EJERCICIOS DE ESTUDIO

VOCABULARIO *Llene los espacios en blanco.*

1. El razonamiento _____ obtiene conclusiones generales a partir de observaciones específicas.
2. El razonamiento _____ va de lo general a lo específico.

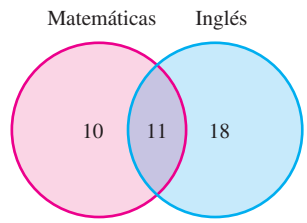
CONCEPTOS *Determine si el patrón que se muestra a continuación aumenta, disminuye, indique si se trata de un patrón alternativo o circular.*

3. 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, . . .
4. 8, 5, 2, −1, . . .
5. −2, −4, 2, 0, 6, . . .
6. 0.1, 0.5, 0.9, 1.3, . . .
7. a, c, b, d, c, e, . . .
8.

9. PROGRAMACIÓN DE LAS HABITACIONES A partir de la tabla siguiente, determine en qué horas de la mañana del miércoles está disponible el salón de prácticas musicales. El símbolo X indica que el salón ya se ha reservado con anticipación.

	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.
9 A.M.	X		X	X	
10 A.M.	X	X			X
11 A.M.			X		X

10. CUESTIONARIOS Se preguntó a un grupo de estudiantes universitarios si se iban a inscribir al curso de matemáticas y al curso de inglés. Los resultados de la encuesta se muestran en la siguiente ilustración.



   a. ¿Cuántos alumnos se inscribieron en el curso de matemáticas y en el curso de inglés?

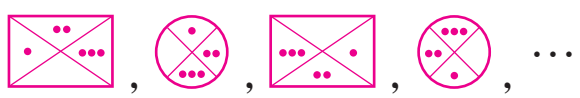
   b. ¿Cuántos estudiantes se inscribieron en el curso de inglés pero no lo hicieron en el de matemáticas?

   c. ¿Cuántos alumnos se inscribieron solamente en el curso de matemáticas?

PRÁCTICA *Encuentre el número que sigue en cada secuencia.*

11. 1, 5, 9, 13, . . .
12. 15, 12, 9, 6, . . .
13. −3, −5, −8, −12, . . .
14. 5, 9, 14, 20, . . .
15. −7, 9, −6, 8, −5, 7, −4, . . .
16. 2, 5, 3, 6, 4, 7, 5, . . .
17. 9, 5, 7, 3, 5, 1, . . .
18. 1.3, 1.6, 1.4, 1.7, 1.5, 1.8, . . .
19. −2, −3, −5, −6, −8, −9, . . .
20. 8, 11, 9, 12, 10, 13, . . .
21. 6, 8, 9, 7, 9, 10, 8, 10, 11, . . .
22. 10, 8, 7, 11, 9, 8, 12, 10, 9, . . .

Encuentre la figura que sigue en cada secuencia.

23. 

24.

Encuentre la figura que falta en la siguiente secuencia.

25.

26.

Encuentre la letra o las letras que faltan en las siguientes secuencias.

27. A, c, E, g, . . .

28. R, SS, TTT, . . .

29. d, h, g, k, j, n, . . .

30. B, N, C, N, D, . . .

¿Qué conclusiones se pueden obtener a partir de cada una de las siguientes afirmaciones?

31. Cuatro personas de nombres John, Luis, María y Paula tienen las siguientes profesiones respectivamente: profesor, carnicero, panadero y artesano de velas.

1. John y Paula están casados.

2. El profesor planea casarse con María quien practica la panadería, en el mes de diciembre.

3. Luis es el panadero.

¿Quién es el profesor?

32. En un zoológico, una cebra, un tigre, un león y un mono se van a colocar en 4 jaulas numeradas del 1 al 4, de izquierda a derecha. Se han tomado las siguientes decisiones:

1. El león y el tigre no deben quedar juntos.

2. El mono debe quedar en una de las jaulas de los extremos.

3. El tigre debe quedar en la jaula número 4.

¿En qué jaula quedó la cebra?

33. Un Ford, un Buick, un Dodge y un Mercedes se van a estacionar de lado a lado.

1. El Ford queda entre el Mercedes y el Dodge.

2. El Mercedes no debe quedar junto al Buick.

3. El Buick debe estacionarse en el extremo de la izquierda.

¿Qué automóvil se estacionó en el extremo derecho?

34. Cuatro nadadores que compitieron en las Olimpiadas terminaron en primero, segundo, tercero y cuarto lugar.

1. El nadador A le ganó al nadador B.

2. El nadador C se colocó entre los nadadores B y D.

3. El nadador B le ganó al nadador D.

¿En qué orden quedaron al término de la competencia?

35. Un grupo de banderas de colores verde, azul, rojo y amarillo se colgaron en un poste, en forma vertical.

1. La bandera de color azul se colocó entre la bandera verde y la amarilla.

2. La bandera roja quedó junto a la bandera amarilla.

3. La bandera verde está encima de la bandera roja.

¿Cuál es el orden de las banderas de arriba abajo?

36. Andrés, Barrry y Carl tienen dos actividades cada uno: envasador, músico, pintor, chofer, peluquero y jardinero. Partiendo de las siguientes afirmaciones, encuentre las ocupaciones de cada uno.

1. El pintor le robó varias botellas al envasador.

2. El chofer ofendió al músico al burlarse de su bigote.

3. El chofer tuvo una cita con la hermana del pintor.

4. El músico y el jardinero acostumbran ir de cacería con Andrés.

5. Carl le ganó a Barry y al pintor en una partida de cartas.

6. Barry le debe al jardinero $100.

APLICACIONES

37. MIEMBROS DEL JURADO A continuación se muestra el resultado de un cuestionario que se aplicó a los miembros de un jurado. Determine cuántos de los 20 000 encuestados han participado o no han participado en el proceso de un juicio criminal o civil.

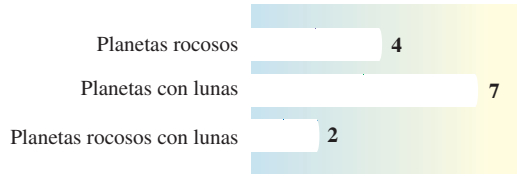
Cuestionario para los miembros del jurado

997	Ha participado en la corte de un juicio criminal.
103	Ha participado en la corte de un juicio civil.
35	Ha participado en ambos.

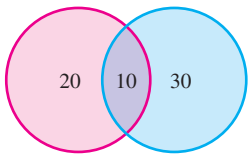
38. ENCUESTAS ELECTRÓNICAS En la siguiente ilustración se muestra una encuesta realizada en la Internet, la cual muestra que 124 personas votaron por la primera opción, 27 votaron por la segunda, y 19 personas votaron tanto por la primera como por la segunda. ¿Cuánta gente eligió la tercera opción, ninguna de las anteriores?

Encuesta de Internet	Puede votar por más de una opción:	
¿Qué haría usted si el precio de la gasolina llega a $2.50 por galón?	◉ Dejaría de manejar. ◉ Compraría otro automóvil con mayor rendimiento de gasolina. ◉ Ninguna de las anteriores.	
	Cantidad de personas que votaron	178

39. EL SISTEMA SOLAR La gráfica siguiente muestra algunas características importantes de los ocho planetas de nuestro sistema solar. ¿Cuántos planetas son rocosos y no tienen lunas?



40. Escriba un problema en el que se pueda usar el siguiente diagrama para resolverlo.



POR ESCRITO

41. Describa el razonamiento deductivo.

42. Describa una situación de la vida real en la que pueda aplicar el razonamiento deductivo.

43. Describa el razonamiento inductivo.

44. Describa una situación de la vida real en la que pueda aplicar el razonamiento inductivo.

APÉNDICE III

Tabla de raíces y potencias

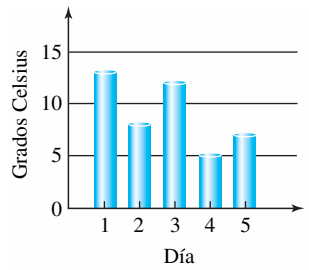
n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1.000	1	1.000	51	2601	7.141	132 651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2704	7.211	140 608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	53	2809	7.280	148 877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2916	7.348	157 464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3025	7.416	166 375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3136	7.483	175 616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3249	7.550	185 193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	58	3364	7.616	195 112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3481	7.681	205 379	3.893
10	100	3.162	1000	2.154	60	3600	7.746	216 000	3.915
11	121	3.317	1331	2.224	61	3721	7.810	226 981	3.936
12	144	3.464	1728	2.289	62	3844	7.874	238 328	3.958
13	169	3.606	2197	2.351	63	3969	7.937	250 047	3.979
14	196	3.742	2744	2.410	64	4096	8.000	262 144	4.000
15	225	3.873	3375	2.466	65	4225	8.062	274 625	4.021
16	256	4.000	4096	2.520	66	4356	8.124	287 496	4.041
17	289	4.123	4913	2.571	67	4489	8.185	300 763	4.062
18	324	4.243	5832	2.621	68	4624	8.246	314 432	4.082
19	361	4.359	6859	2.668	69	4761	8.307	328 509	4.102
20	400	4.472	8000	2.714	70	4900	8.367	343 000	4.121
21	441	4.583	9261	2.759	71	5041	8.426	357 911	4.141
22	484	4.690	10 648	2.802	72	5184	8.485	373 248	4.160
23	529	4.796	12 167	2.844	73	5329	8.544	389 017	4.179
24	576	4.899	13 824	2.884	74	5476	8.602	405 224	4.198
25	625	5.000	15 625	2.924	75	5625	8.660	421 875	4.217
26	676	5.099	17 576	2.962	76	5776	8.718	438 976	4.236
27	729	5.196	19 683	3.000	77	5929	8.775	456 533	4.254
28	784	5.292	21 952	3.037	78	6084	8.832	474 552	4.273
29	841	5.385	24 389	3.072	79	6241	8.888	493 039	4.291
30	900	5.477	27 000	3.107	80	6400	8.944	512 000	4.309
31	961	5.568	29 791	3.141	81	6561	9.000	531 441	4.327
32	1024	5.657	32 768	3.175	82	6724	9.055	551 368	4.344
33	1089	5.745	35 937	3.208	83	6889	9.110	571 787	4.362
34	1156	5.831	39 304	3.240	84	7056	9.165	592 704	4.380
35	1225	5.916	42 875	3.271	85	7225	9.220	614 125	4.397
36	1296	6.000	46 656	3.302	86	7396	9.274	636 056	4.414
37	1369	6.083	50 653	3.332	87	7569	9.327	658 503	4.431
38	1444	6.164	54 872	3.362	88	7744	9.381	681 472	4.448
39	1521	6.245	59 319	3.391	89	7921	9.434	704 969	4.465
40	1600	6.325	64 000	3.420	90	8100	9.487	729 000	4.481
41	1681	6.403	68 921	3.448	91	8281	9.539	753 571	4.498
42	1764	6.481	74 088	3.476	92	8464	9.592	778 688	4.514
43	1849	6.557	79 507	3.503	93	8649	9.644	804 357	4.531
44	1936	6.633	85 184	3.530	94	8836	9.695	830 584	4.547
45	2025	6.708	91 125	3.557	95	9025	9.747	857 375	4.563
46	2116	6.782	97 336	3.583	96	9216	9.798	884 736	4.579
47	2209	6.856	103 823	3.609	97	9409	9.849	912 673	4.595
48	2304	6.928	110 592	3.634	98	9604	9.899	941 192	4.610
49	2401	7.000	117 649	3.659	99	9801	9.950	970 299	4.626
50	2500	7.071	125 000	3.684	100	10 000	10.000	1 000 000	4.642

APÉNDICE IV

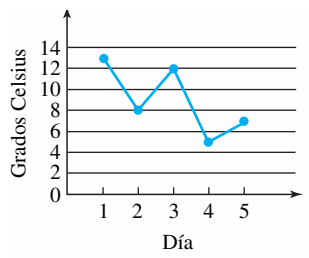
Respuestas a los ejercicios seleccionados

Capítulo 1 Verifique sus conocimientos (pág. 2)

1. entero **2.** perímetro **3.** conmutativa, asociativa
4. factores, producto, cociente **5.** primo
6. 3 millares + 7 centenas + 3 decenas + 7 unidades **7.** 186 300
8.



9.



10. > **11.** 5121 **12.** 58
13. 2 061 497 **14.** 24 624
15. 57 R 34 **16.** 64 pies, 247 pies^2 **17.** $2 \cdot 5^2 \cdot 19$
18. 5 **19.** 103 **20.** 3
21. 19 **22.** 63

Para pensar a detalle (pág. 9)

1. c **2.** b **3.** e **4.** d **5.** a

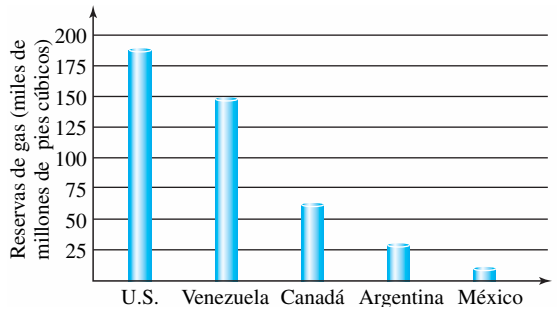
Ejercicios de estudio Sección 1.1 (pág. 10)

1. conjunto **3.** expandida **5.** número **7.** 3 **9.** 6
11. números naturales
13.

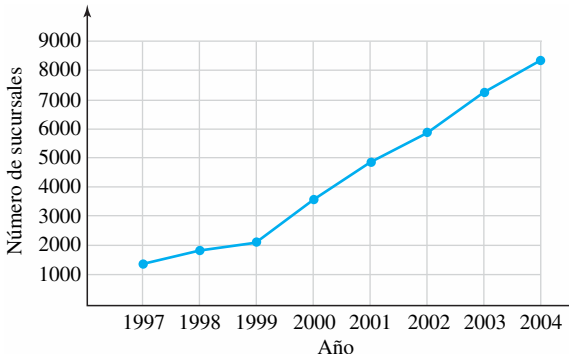
15.

17. > **19.** > **21.** < **23.** > **25.** brazas
27. 2 centenas + 4 decenas + 5 unidades; doscientos cuarenta y cinco **29.** 3 millares + 6 centenas + 9 unidades; tres mil seiscientos nueve; **31.** 3 decenas de millar + 2 millares + 5 centenas; treinta y dos mil quinientos **33.** 1 centena de millar + 4 millares + 4 centenas + 1 unidad; ciento cuatro mil cuatrocientos uno **35.** 425 **37.** 2736 **39.** 456 **41.** 27 598
43. 9113 **45.** 10 700 506 **47.** 79 590 **49.** 80 000 **51.** 5 926 000
53. 5 900 000 **55.** $419 160 **57.** $419 000

59. Aisha **61. a.** Los 70s, 7 **b.** Los 60s, 9 **c.** Los 60s, 12
63.



65.



67.
a.

No. 201 — 9 de marzo de 20 05
Páguese a Davis Chevrolet $ 15 601.00
Quince mil seiscientos un y 00/100 DÓLARES
Don Smith
45-365-02

b.

No. 7890 — 12 de agosto de 20 05
Páguese a Dr. Anderson $ 3,433.00
Tres mil cuatrocientos treinta y tres y 00/100 DÓLARES
Juan Decito
45-828-02

69. 1 865 593; 482 880; 1503; 269; 43 449
71. a. 299 800 000 m/seg **b.** 300 000 000 m/seg

Ejercicios de estudio Sección 1.2 (pág. 19)

1. adendas **3.** rectángulo, cuadrado **5.** dimensiones **7.** conmutativa **9.** perímetro **11.** propiedad conmutativa de la adición **13.** propiedad asociativa de la adición **15.** propiedad conmutativa de la adición **17.** 0 **19.** paréntesis **21.** 33 más 12 iguales 45 **23.** 47 **25.** 38 **27.** 461 **29.** 150 **31.** 363 **33.** 121 **35.** 140 **37.** 979 **39.** 1985 **41.** 10 000 **43.** 15 907 **45.** 1861 **47.** 5312 **49.** 88 pies **51.** 68 pulgadas **53.** 91 pies **55.** $767 496 832 **57.** 5 843 737 **59.** 10 057 mi **61.** $6 233 000 000 **63.** 196 pulgadas **67.** 3 millares + 1 centena + 2 decenas + 5 unidades **69.** 6 354 780 **71.** 6 350 000

Ejercicios de estudio Sección 1.3 (pág. 26)

1. diferencia **3.** suma **5.** izquierda, derecha **7.** resta, suma **9.** 83 − 30 **11.** correcto **13.** incorrecto **15.** 3 **17.** 25 **19.** 103 **21.** 59 **23.** 24 **25.** 118 **27.** 958 **29.** 1689 **31.** 10 457 **33.** 303 **35.** 43 559 **37.** 19 299 **39.** 102 **41.** 49 760 **43.** 5 **45.** 197 **47.** 110 **49.** 6 **51.** $18 **53.** 33 puntos **55.** $213 **57.** 1 263 030 **59.** $1322 **61.** 39 732 **67.** 5 370 650 **69.** 5 371 000 **71.** 5 400 000 **73.** 52 pulg **75.** 1530

Ejercicios de estudio Sección 1.4 (pág. 36)

1. suma **3.** producto **5.** asociativa **7.** área **9. a.** $4 \cdot 8$ **b.** $7 \cdot 15$ **11.** $5 \cdot 8 = 8 \cdot 5$ **13.** 3 **15. a.** área **b.** área **c.** perímetro **17.** $\times, \cdot, ( )$ **19.** 28 **21.** 56 **23.** 84 **25.** 98 **27.** 1491 **29.** 6232 **31.** 3700 **33.** 750 **35.** 1 070 000 **37.** 512 000 **39.** 11 200 **41.** 6300 **43.** 8250 **45.** 101 000 **47.** 324 **49.** 5829 **51.** 7623 **53.** 1060 **55.** 2576 **57.** 20 079 **59.** 155 832 **61.** 408 758 **63.** 16 969 380 **65.** 8 945 912 **67.** 2400 **69.** 45 696 **71.** 84 pulg^2 **73.** 144 pulg^2 **75.** $132 **77.** 204 gramos **79.** 72 **81.** 125 800 **83.** 312 **85.** sí **87.** 288 mi **89.** 54 pie^2 **91.** 1260 mi, 97 200 mi^2 **93.** 64 **95.** 388 pie^2 **99.** 8 **101.** 872

Ejercicios de estudio Sección 1.5 (pág. 45)

1. cociente, dividendo **3.** divisible **5.** 0 **7.** 0 **9.** suma **11.** 0, 5 **13.** suma **15.** 1 **17.** indefinido **19.** dos **21.** $\div$, $\overline{)}$, $\frac{}{}$ **23.** 8 **25.** 6 **27.** 9 **29.** 7 **31.** $3 \cdot 8 = 24$ **33.** $8 \cdot 7 = 56$ **35.** 72 **37.** 35 **39.** 237 **41.** 617 **43.** 5 **45.** 3 **47.** 12 **49.** 13 **51.** 73 **53.** 41 **55.** 205 **57.** 210 **59.** 8 R 25 **61.** 20 R 3 **63.** 30 R 13 **65.** 31 R 28 **67.** sí **69.** no **71.** sí **73.** sí **75.** 350 **77.** 89 **79.** 124 **81.** 160 **83.** 4 **85.** 59 375 gal **87.** 14 500 lb **89.** 13 docena **91.** 9 niñas, 24 equipos **93.** $73 **95.** AZ: 50; IN: 170; RI: 1100; SC: 140 (todas las respuestas se dan en personas por milla cuadrada) **99.** 2 **101.** 23

Ejercicios de estudio Estimación (pág. 48)

1. no **3.** no **5.** no **7.** aprox. 8900 mi **9.** aprox. 30 bolsas **11.** 1 800 000 000

Ejercicios de estudio Sección 1.6 (pág. 54)

1. factores **3.** factor **5.** compuesto **7.** primo **9.** base, exponente **11.** $1 \cdot 27$ o $3 \cdot 9$ **13. a.** 44 **b.** 100 **15. a.** 1 y 11 **b.** 1 y 23 **c.** 1 y 37 **d.** Son números primos. **17.** sí **19.** 90 **21.** 605 **23.** no **25.** 2 y 5 **27.** 2 **29.** $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$; $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$; son lo mismo. **31.** 13, 8, 7 **33.** 2 **35.** $7 \cdot 7 \cdot 7$ **37.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **39.** $5 \cdot 5 \cdot 11$ **41.** 10 **43.** 2^5 **45.** 5^4 **47.** $4^2(5^2)$ **49.** 1, 2, 5, 10 **51.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 **53.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **55.** 1, 2, 4, 11, 22, 44 **57.** 1, 7, 11, 77 **59.** 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 **61.** $3 \cdot 13$ **63.** $3^2 \cdot 11$ **65.** $2 \cdot 3^4$ **67.** $2^2 \cdot 5 \cdot 11$ **69.** 2^6 **71.** $3 \cdot 7^2$ **73.** 81 **75.** 32 **77.** 144 **79.** 4096 **81.** 72 **83.** 3456 **85.** 12 812 904 **87.** 1 162 213 **89.** 1, 2, 4, 7, 14, 28; $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ **91.** 2^2 unidades cuadradas; 3^2 unidades cuadradas; 4^2 unidades cuadradas **97.** 231 000 **99.** 0 **101.** $A = lw$

Para pensar a detalle (pág. 62)

10, 5, 12, 3, 4

Ejercicios de estudio Sección 1.7 (pág. 62)

1. paréntesis, corchetes **3.** evalúe **5.** 3; eleve al cuadrado, multiplique, reste **7.** multiplique, reste **9.** $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9$; $(2 \cdot 3)^2 = 6^2$ **11.** 4, 20, 8 **13.** 9, 36, 30 **15.** 27 **17.** 2 **19.** 15 **21.** 25 **23.** 5 **25.** 25 **27.** 18 **29.** 813 **31.** 5239 **33.** 16 **35.** 5 **37.** 49 **39.** 24 **41.** 13 **43.** 10 **45.** 198 **47.** 18 **49.** 216 **51.** 17 **53.** 191 **55.** 3 **57.** 29 **59.** 14 **61.** 64 **63.** 192 **65.** 74 **67.** 137 **69.** 3 **71.** 21 **73.** 11 **75.** 1 **77.** 10 496 **79.** 2,845 **81.** $2(6) + 4(2) + 2(1)$; $22 **83.** $24 + 6(5) + 10(10) + 12(20) + 2(50) + 100$; $594 **85.** brick: $3(3) + 1 + 1 + 3 + 3(5)$; 29; aphid: $3[1 + 2(3) + 4 + 1 + 2]$; 42 **87.** 79° **89.** 5 **91.** 298 **93. a.** 135 **b.** $(1 + 4 + 4)(1 \cdot 4 \cdot 4) = 144$ **99.** 7300 **101.** 9591

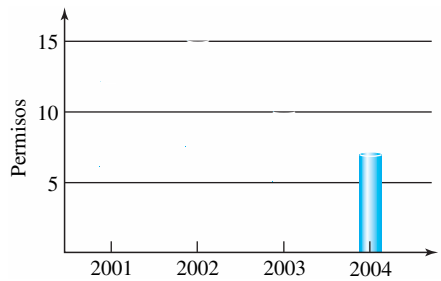
Concepto clave (pág. 66)

1. Podemos obtener diferentes respuestas al mismo problema: método 1 **3.** Potencia, suma, resta **5.** multiplicación, división, multiplicación, resta **7.** 5 **9.** 0 **11.** 206

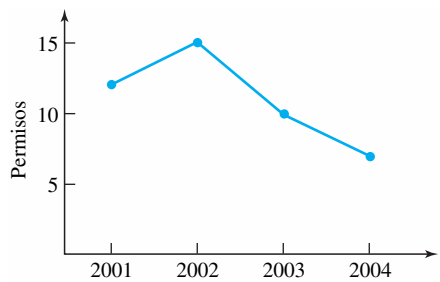
Repaso del capítulo (pág. 68)

1. 2, 5, 9 **2.** 0, 2, 5, 9

3.



4.

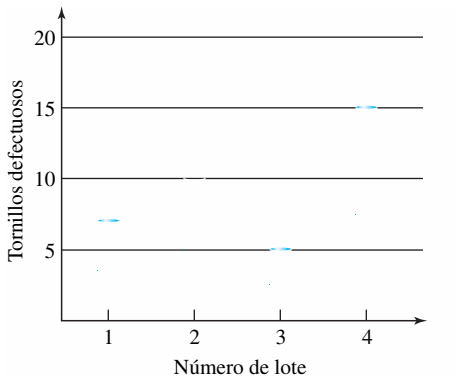


5. 6 **6.** 7 **7.** 5 centenas de millar + 7 decenas de millar + 3 millares + 2 unidades **8.** 3 decenas de millón + 7 millones + 3 centenas de millar + 9 millares + 5 decenas + 4 unidades **9.** 3207 **10.** 23 253 412 **11.** > **12.** < **13.** 2 507 300 **14.** 2 510 000 **15.** 2 507 350 **16.** 2 500 000 **17.** 13 **18.** 13 **19.** 14

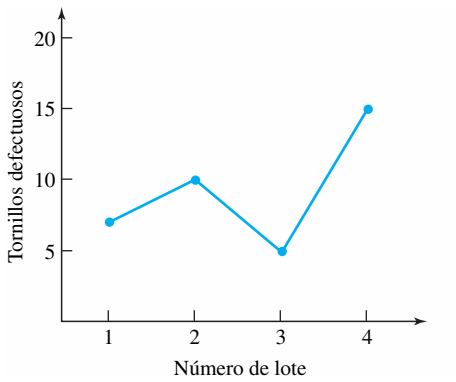
20. 14 **21.** 20 **22.** 18 **23.** 348 **24.** 11 925 **25.** 518 **26.** 6000
27. a. prop. conmut. de la suma **b.** prop. asoc. de la suma
28. 2746 pies **29.** 208 909 566 **30.** 14661 **31.** 3 **32.** 4 **33.** 17
34. 54 **35.** 74 **36.** 2075 **37.** $45 **38.** $785 **39.** 147
40. 2 737 654 **41.** 56 **42.** 56 **43.** 0 **44.** 7 **45.** 210 **46.** 210
47. 3297 **48.** 178 704 **49.** 31 684 **50.** 455 544 **51.** 330
52. a. prop. asoc. de la mult. **b.** prop. conmut. de la mult.
53. 32 cm^2 **54.** 6084 $pulg^2$ **55.** Santiago **56.** 14 400 **57.** 21
58. 37 **59.** 19 R 6 **60.** 23 R 27 **61.** 3 **62.** 17 **63.** 0
64. indefinido **65.** 16, 25 **66.** 34 **67.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **68.** 1, 5, 25 **69.** primo **70.** compuesta **71.** ninguno **72.** ninguno
73. compuesta **74.** primo **75.** impar **76.** par **77.** par
78. impar **79.** $2 \cdot 3 \cdot 7$ **80.** $3 \cdot 5^2$ **81.** 6^4 **82.** $5^3(13^2)$
83. 125 **84.** 121 **85.** 200 **86.** 2700 **87.** 49 **88.** 23 **89.** 75
90. 4 **91.** 32 **92.** 72 **93.** 8 **94.** 24 **95.** 1 **96.** 3 **97.** 19
98. 7 **99.** 77 **100.** 60

Examen del capítulo 1 (pág. 73)

1. 0, 1, 2, 3, 4 **2.** 5 millares + 2 centenas + 6 decenas + 6 unidades **3.** 7507 **4.** 35 000 000
5.



6.



7. > **8.** < **9.** 762 **10.** 248 **11.** 8100 **12.** 942
13. 2168 pulg **14.** $76 **15.** 424 **16.** 26 791 **17.** 72
18. 114 R 57 **19.** 92 cm, 529 cm^2 **20. a.** prop. asoc. de la mult. **b.** prop. conmut. de la mult. **21. a.** 0 **b.** 0 **22.** 96
23. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ **24.** 44 **25.** 29 **26.** 26 **27.** 1 **28.** 39

Capítulo 2 Verifique sus conocimientos (pág. 76)

1. absoluto **2.** identidad **3.** opuestos (o negativos) **4.** no es similar **5.** > **6.** 1 **7. a.** −14 **b.** 0 **c.** −8 **d.** 2 **8. a.** −6 **b.** 6 **c.** −12 **9. a.** −9 **b.** 100 **c.** −24 **10.** $3(-6) = -18$
11. a. −4 **b.** 30 **c.** indefinido **12. a.** 7 **b.** −7 **c.** 12
13. a. −9 **b.** 9 **c.** 1 **14. a.** 16 **b.** −13 **c.** 29 **d.** 1
15. $20 **16.** 15

Para pensar a detalle (pág. 81)

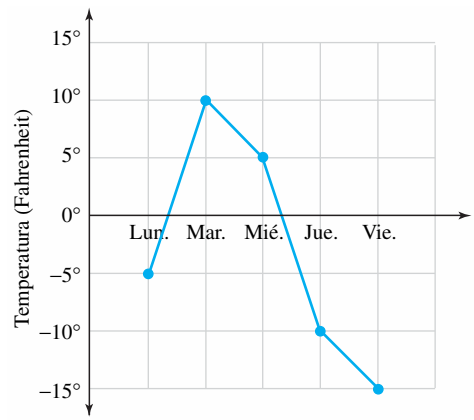
$4621, $1073, $3325

Ejercicios de estudio Sección 2.1 (pág. 84)

1. línea **3.** gráfica **5.** desigualdad **7.** valor absoluto
9. enteros **11. a.** < **b.** > **c.** <, > **13.** sí **15.** $15 - 8$
17. $15 > 12$ **19. a.** −225 **b.** −10 **c.** −3 **d.** −12 000
e. −2 **21.** negativo **23.** −4 **25.** −8 y 2 **27.** −7
29. $6 - 4$, -6, $-(-6)$ (las respuestas pueden variar)
31. a. $-(-8)$ **b.** $|-8|$ **c.** $8 - 8$ **d.** $-|-8|$ **33.** 9 **35.** 8
37. 14 **39.** −20 **41.** −6 **43.** 203 **45.** 0 **47.** 11 **49.** 4 **51.** 12
53.

55.

57. < **59.** < **61.** > **63.** > **65.** ≥ **67.** ≥ o ≤ **69.** ≤
71. ≤ **73.** 2, 3, 2, 0, −3, −7 **75.** picos: 2, 4, 0; valles: −3, −5, −2 **77. a.** −1 (1 inferior al par) **b.** −3 (3 inferior al par)
c. la mayoría de las calificaciones están debajo del par
79. a. −10° a −20° **b.** 40° **c.** 10° **81. a.** 200 años **b.** a.C.
c. d.C. **d.** el nacimiento de Cristo
83.



91. 23 500 **93.** 761 **95.** propiedad asociativa de la multiplicación

Para pensar a detalle (pág. 92)

Disminuya los gastos, aumente el ingreso, disminuya los gastos, aumente el ingreso, aumente el ingreso, aumente el ingreso, disminuya los gastos, disminuya los gastos, aumente el ingreso, disminuya los gastos.

Ejercicios de estudio Sección 2.2 (pág. 95)

1. identidad **3.** 3 **5.** −2 **7. a.** sí **b.** sí **9. a.** 7 **b.** 10
11. resta, el mayor **13.** −18, −19 **15.** 5, 2 **17.** −5 debe estar entre paréntesis: $-6 + (-5)$ **19.** 11 **21.** 23 **23.** 0
25. −99 **27.** −9 **29.** −10 **31.** 1 **33.** −7 **35.** −20 **37.** 15
39. 8 **41.** 2 **43.** −10 **45.** 9 **47.** 8 **49.** −21 **51.** 3
53. −10 **55.** −4 **57.** 7 **59.** −21 **61.** −7 **63.** 9 **65.** 0
67. 0 **69.** 5 **71.** 0 **73.** −3 **75.** −10 **77.** −1 **79.** −17
81. −8346 **83.** −1032 **85.** 3G, −3G **87.** no; caída de $70 cada mes **89.** 5; riesgo de 4% **91.** −1, 0 **93.** 7 pies sobre la etapa de inundación **95.** cerca de −$2500 millones **101.** 15 $pies^2$ **103.** 16 pies **105.** 5^3

Ejercicios de estudio Sección 2.3 (pág. 103)

1. diferencia **3.** suma, opuesto **5.** 6 **7.** + **9.** corchetes
11. $-8 - (-4)$ **13.** 7 **15.** no; $8 - 3 = 5$, $3 - 8 = -5$
17. −3, 2, 0 **19.** −2, −10, 6, −4 **21.** 9 **23.** −13 **25.** −10

27. −1 **29.** 0 **31.** 8 **33.** 5 **35.** −4 **37.** −4 **39.** −20
41. 0 **43.** 0 **45.** −15 **47.** −9 **49.** 3 **51.** 9 **53.** −2
55. −10 **57.** −14 **59.** 3 **61.** −8 **63.** −18 **65.** −6 **67.** 10
69. −4 **71.** −2447 **73.** 20 503 **75.** −1676 **77.** −120 pies
79. 16 puntos **81.** −8 **83.** 1066 pies **85.** −4 yd
87. a.

b. 37 pies
89. No, él tendrá un déficit de $244 (−244). **95.** 5990
97. 1, 2, 4, 5, 10, 20 **99.** 143

Ejercicios de estudio Sección 2.4 (pág. 111)

1. factores, producto **3.** 3, exponente **5.** desigual
7. acumulativo **9.** −9, el opuesto de ese número **11.** pos · pos, pos · neg, neg · pos, neg · neg **13. a.** negativo **b.** positivo
15. a. 3 **b.** 12 **c.** 5 **d.** 9 **e.** 10 **f.** 25 **17. a.** 2, 4, 4, 16, 6, 64 **b.** par **19.** 6, −24 **21.** −5 deberá estar entre paréntesis: −6(−5) **23.** 54 **25.** −15 **27.** −36 **29.** 56 **31.** −20 **33.** −120
35. 0 **37.** 6 **39.** 7 **41.** −23 **43.** −48 **45.** 40 **47.** −30
49. −60 **51.** −1 **53.** −18 **55.** 0 **57.** 0 **59.** 60 **61.** 16
63. −125 **65.** −8 **67.** 81 **69.** −1 **71.** 1 **73.** 49, −49 **75.** −144, 144 **77.** −59 812 **79.** 43 046 721 **81.** −25 728 **83.** 390 625
85. a. plan #1: −30 lb, plan #2: −28 lb **b.** plan #1; el tiempo de ejercicios es el doble que el del plan #2 **87. a.** alto 2, bajo −3 **b.** alto 4, bajo −6 **89.** −20° **91.** −20 pies **93.** −$24 330
99. 45 **101.** 2100 **103.** es menor que

Ejercicios de estudio Sección 2.5 (pág. 117)

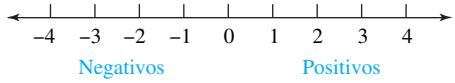
1. cociente, divisor **3.** valor absoluto **5.** positivo
7. 5(−5) = −25 **9.** 0(?) = −6 **11.** $\frac{-20}{5} = -4$ **13. a.** siempre es cierto **b.** algunas veces es cierto **c.** siempre es cierto **15.** −7 **17.** 2
19. 5 **21.** 3 **23.** −20 **25.** −2 **27.** 0 **29.** indefinido
31. −5 **33.** 1 **35.** −1 **37.** 10 **39.** −4 **41.** −3 **43.** 5
45. −4 **47.** −5 **49.** −4 **51.** −542 **53.** −16 **55.** −4° por hora **57.** −1010 pies **59.** −6 (ha perdido 6 juegos) **61.** −$15
63. −$1740 **69.** 104 **71.** 2 · 3 · 5 · 7 **73.** sí **75.** 81

Ejercicios de estudio Sección 2.6 (pág. 123)

1. orden **3.** agrupado **5.** 3; potencia, multiplicación, resta
7. multiplicación, resta **9.** La base de la primera expresión exponencial es 3, la base de la segunda es −3.
11. 4, 20, −20, −28 **13.** 9, −36, −42 **15.** −7 **17.** 1 **19.** −21
21. −14 **23.** −7 **25.** −5 **27.** 12 **29.** −14 **31.** 30 **33.** 2
35. 15 **37.** −42 **39.** −5 **41.** −3 **43.** 4 **45.** 0 **47.** −14
49. 19 **51.** 4 **53.** −3 **55.** 25 **57.** −48 **59.** 44 **61.** 91
63. 3 **65.** −5 **67.** 17 **69.** 11 **71.** 8 **73.** 112 **75.** −1707
77. −15 **79.** −200 **81.** −320 **83.** −9000 **85.** −1200
87. 19 **89.** 11 yd **91.** ganancia de 60% **97.** 5000 **99.** Sume las longitudes de todos sus lados. **101.** no

Concepto clave (pág. 126)

1. −5 **3.** −30 **5.** +10 o 10 **7.** −205
9.



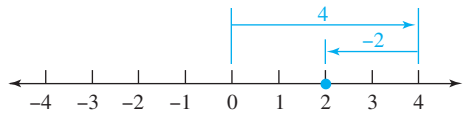
11. −6 < −4
13. Signos iguales: se suman sus valores absolutos y se coloca el signo común a la suma. Signos diferentes: se restan sus valores absolutos, el menor del mayor, y se coloca el signo del número que tiene el valor absoluto más grande en el resultado.
15. Se dividen sus valores absolutos. Signos iguales: el cociente el positivo. Signos diferentes: el cociente es negativo.

Repaso del capítulo (pág. 128)

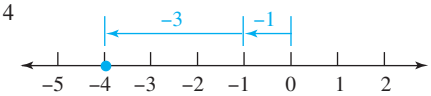
1.

2.

3. <
4. < **5.** ≥ **6.** ≤ o ≥ **7.** −33 pies **8.** −$1200 **9.** −10 seg
10. 4 **11.** 0 **12.** 43 **13.** −12 **14.** negativo **15.** opuesto
16. negativo **17.** menos **18.** 12 **19.** −8 **20.** 8 **21.** 0 **22.** 2



23. −4



24. −10 **25.** −83 **26.** −8 **27.** −1 **28.** 112 **29.** −11
30. −3 **31.** −2 **32.** −4 **33.** −20 **34.** 0 **35.** 0 **36.** 11
37. −4 **38.** 65 pies **39.** −3 **40.** −21 **41.** 4 **42.** −112
43. −6 **44.** 6 **45.** −37 **46.** 30 **47.** suma, opuesto
48. −4 **49.** 15 **50.** 6 **51.** −8 **52.** −77 **53.** −1
54. −225 pies **55.** Alaska: 180°; Virginia: 140° **56.** −45 **57.** 18
58. −14 **59.** 376 **60.** −100 **61.** 1 **62.** −25 **63.** −150
64. −36 **65.** −36 **66.** 0 **67.** 1 **68.** −3, −6, −9 **69.** 25
70. −32 **71.** 64 **72.** −64 **73.** negativo **74.** primera expresión −2; −4, 4 **75.** 5, −3, −15 **76.** −2 **77.** −5 **78.** −8
79. 101 **80.** 0 **81.** indefinido **82.** 1 **83.** 10 **84.** −2 min
85. −22 **86.** 4 **87.** −43 **88.** 8 **89.** 41 **90.** 0 **91.** −13
92. 32 **93.** 12 **94.** −16 **95.** −4 **96.** 1 **97.** −1 **98.** −4
99. −70 **100.** 20 **101.** −7000 **102.** 1100

Examen del capítulo 2 (pág. 133)

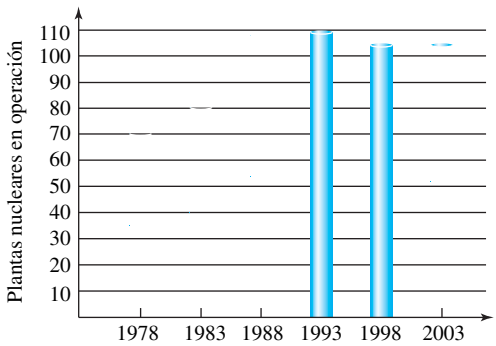
1. a. > **b.** < **c.** < **2.** {. . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, . . .}
3. Monroe
4. −5

5. a. −34 **b.** −34 **c.** −8 **6. a.** −13 **b.** −1 **c.** −15
d. −150 **7. a.** −70 **b.** −48 **c.** 16 **d.** 0 **8.** −4(5) = −20
9. a. −8 **b.** indefinido **c.** −5 **d.** 0 **10.** $3 millones
11. 154 pies **12. a.** 6 **b.** 7 **c.** −6 **d.** 132 **13. a.** 16 **b.** −16
c. −1 **14.** −27 **15.** 1 **16.** −34 **17.** 42 **18.** 4 **19.** −72°
20. izquierda, −7 **21.** −15 **22.** −4 + (−4) + (−4) + (−4) + (−4) = −20 **23.** El valor absoluto de un número es la distancia desde el número al cero en la recta numérica. La distancia puede ser positiva o cero, pero nunca será negativa.
24. Esto es cierto puesto que 12 = 12.

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 135)

1. 1, 2, 5, 9 **2.** 0, 1, 2, 5, 9 **3.** −2, −1 **4.** −2, −1, 0, 1, 2, 5, 9
5. 6 **6.** 3 **7.** 7 326 500 **8.** 7 330 000 **9.** Cable CFR

10.

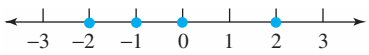


Fuente: *The World Almanac, 2005*

11. 786

12. 3806 **13.** 4684 **14.** 13 136 **15.** 104 pies, 595 pies^2
16. 65 **17.** 11 745 **18.** 13 **19.** 307 329 **20.** 467 **21.** 1728
22. 1, 2, 3, 6, 9, 18 **23.** primo, impar **24.** compuesto, par
25. par **26.** impar **27.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ **28.** 11^4 **29.** 175 **30.** 38
31. 50 **32.** 2 **33.** no **34.** 21

35.



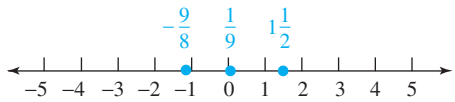
36.

37. −5 **38.** −5
39. −1 **40.** 8 **41.** 216 **42.** −35 **43.** 2 **44.** −5 **45.** 26
46. 70 **47.** −3 **48.** 4 **49.** −81 **50.** 81 **51.** \$126 037
52. −\$79 **53.** −100 pies **54.** −\$3 600 000

Capítulo 3 Verifique sus conocimientos (pág. 138)

1. numerador, denominador **2.** base, altura **3.** recíprocos
4. mínimo **5.** equivalente **6.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ **7. a.** $\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **8. a.** $\frac{3}{8}$ **b.** $-\frac{1}{3}$
9. $22\frac{1}{2}$ **10. a.** 2 **b.** $\frac{1}{6}$ **11. a.** $\frac{51}{40}$ **b.** $\frac{2}{5}$ **12. a.** $\frac{1}{12}$ **b.** $\frac{5}{8}$

13. $\frac{30}{36}$ **14.**

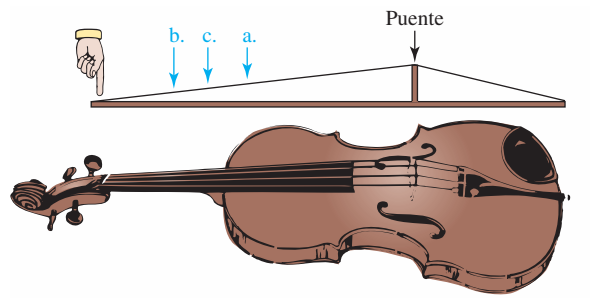


15. $\frac{5}{8}$ cm^2 **16.** $313\frac{7}{15}$
17. $4\frac{11}{24}$ **18.** $9\frac{33}{40}$ **19.** $-\frac{2}{3}$ **20.** $\frac{9}{5}$ **21.** $-\frac{2}{5}$ **22.** 60
23. $1\frac{3}{4}$ millones de dólares

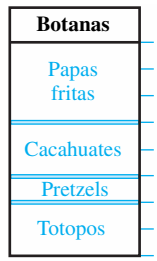
Ejercicios de estudio Sección 3.1 (pág. 144)

1. numerador, denominador **3.** propio, impropio
5. equivalente **7.** más alto, edificio **9. a.** 2 **b.** 3 **c.** 5
d. 7 **11.** fracciones equivalentes: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **13. a.** En el primer caso, se factorizaron 20 y 28. En el segundo caso, se obtuvieron factores primos. **b.** Sí **15.** Los 2 que están en el numerador y en el denominador no son factores comunes **17. a.** $\frac{8}{1}$ **b.** $-\frac{25}{1}$
19. 3, 2, 2, 3, 2, 3 **21.** $\frac{1}{3}$ **23.** $\frac{1}{3}$ **25.** $\frac{2}{3}$ **27.** $\frac{5}{2}$ **29.** $-\frac{1}{2}$
31. $-\frac{6}{7}$ **33.** $\frac{5}{9}$ **35.** $\frac{6}{7}$ **37.** en sus términos mínimos **39.** $\frac{3}{8}$
41. $\frac{5}{7}$ **43.** $\frac{4}{5}$ **45.** en sus términos mínimos **47.** $\frac{7}{8}$ **49.** $-\frac{1}{3}$
51. $\frac{3}{5}$ **53.** $\frac{5}{4}$ **55.** 2 **57.** $\frac{35}{40}$ **59.** $\frac{28}{35}$ **61.** $\frac{45}{54}$ **63.** $\frac{15}{30}$ **65.** $\frac{4}{14}$
67. $\frac{54}{60}$ **69.** $-\frac{25}{20}$ **71.** $-\frac{6}{45}$ **73.** $\frac{15}{5}$ **75.** $\frac{48}{8}$ **77.** $\frac{36}{9}$ **79.** $-\frac{4}{2}$
81. $\frac{3}{5}$ **83.** $-\frac{15}{16}$ pulg **85.** $\frac{7}{10}, \frac{1}{8}$

87.



89. un cuarto de vuelta a la izquierda, tres cuartos de vuelta a la derecha **91.**



93. $\frac{1}{250}$ **99.** 11 **101.** 564 000
103. −6

Ejercicios de estudio Sección 3.2 (pág. 153)

1. multiplique **3.** producto **5.** base, altura **7.** $\frac{1}{6}$
9.

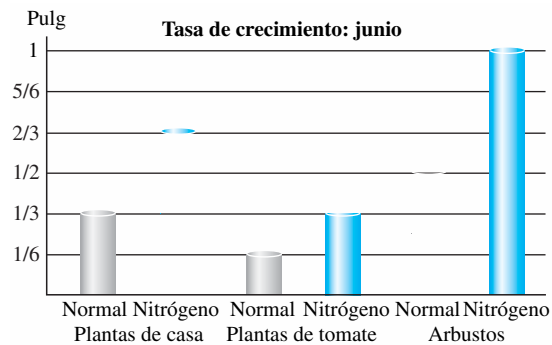
a. $\frac{1}{4}$ **b.** 12, 1, $\frac{1}{12}$

11. a. negativo **b.** positivo **13. a.** verdadero **b.** falso **15.** 7, 15, 3, 3 **17.** $\frac{1}{8}$ **19.** $\frac{21}{128}$ **21.** $\frac{4}{7}$ **23.** $\frac{77}{60}$ **25.** $-\frac{1}{5}$ **27.** $\frac{2}{9}$ **29.** $\frac{2}{3}$
31. 1 **33.** $\frac{1}{20}$ **35.** $\frac{1}{30}$ **37.** 15 **39.** −12 **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $\frac{8}{3}$
45. $-\frac{16}{3}$ **47.** $-\frac{3}{2}$ **49.** $\frac{5}{6}$ **51.** $\frac{4}{9}$ **53.** $\frac{25}{81}$ **55.** $\frac{16}{9}$ **57.** $-\frac{27}{64}$
59.

·	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{24}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$

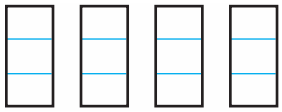
61. 15 pies^2 **63.** $\frac{15}{2}$ yd^2 **65.** 15 pies^2 **67.** 290 **69.** 18, 6, y 2 pulg
71. $\frac{3}{8}$ taza de azúcar, $\frac{1}{6}$ taza de melaza

73.



75. 121 pulg^2 **77.** 18 pulg^2 **83.** 6800 **85.** 26 **87.** 5^3

Ejercicios de estudio Sección 3.3 (pág. 160)

1. recíprocos **3.** $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ **5.**  $4 \div \frac{1}{3}$, 12

7. 1 **9. a.** 5 **b.** 5 **c.** $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{5}{6}$ **15.** $\frac{27}{16}$ **17.** 1 **19.** $\frac{2}{3}$ **21.** 36 **23.** 50 **25.** $\frac{2}{15}$ **27.** $\frac{1}{192}$ **29.** $-\frac{27}{8}$ **31.** $-\frac{15}{2}$ **33.** $-\frac{1}{64}$ **35.** 1 **37.** $\frac{8}{15}$ **39.** $\frac{1}{6}$ **41.** $\frac{13}{8}$ **43.** $-\frac{5}{8}$ **45.** -6 **47.** $-\frac{5}{2}$ **49.** 104 **51.** 56 **53.** ruta 1 **55. a.** 16 **b.** $\frac{3}{4}$ pulg **c.** $\frac{1}{120}$ pulg **57.** 7855 **63.** es menor que **65.** positivo **67.** falso **69.** -29

Para pensar a detalle (pág. 169)

$\frac{7}{20}$

Ejercicios de estudio Sección 3.4 (pág. 170)

1. mínimo **3.** más alto **5.** numeradores, común **7.** Los denominadores no son iguales **9. a.** 4 **b.** 5 **11. a.** una vez **b.** dos veces **c.** tres veces **13.** 60

15. a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; ya que $\frac{4}{12} > \frac{3}{12}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. **19.** 18 **21.** 24 **23.** 40 **25.** 60 **27.** $\frac{4}{7}$ **29.** $\frac{20}{103}$ **31.** $\frac{2}{5}$ **33.** $\frac{5}{8}$ **35.** $\frac{9}{20}$ **37.** $\frac{22}{15}$ **39.** $\frac{23}{56}$ **41.** $\frac{1}{12}$ **43.** $\frac{1}{12}$ **45.** $\frac{47}{50}$ **47.** $-\frac{3}{16}$ **49.** $-\frac{2}{3}$ **51.** $-\frac{23}{24}$ **53.** $-\frac{13}{5}$ **55.** $-\frac{23}{4}$ **57.** $\frac{19}{48}$ **59.** $-\frac{43}{45}$ **61.** $\frac{26}{75}$ **63.** $\frac{17}{54}$ **65.** $\frac{341}{400}$ **67.** $-\frac{1}{50}$ **69.** $\frac{47}{60}$ **71.** $\frac{3}{4}$ **73.** $\frac{5}{36}$ **75.** $\frac{23}{10}$ **77.** $-\frac{17}{60}$ **79. a** $\frac{7}{32}$ pulg **b.** $\frac{3}{32}$ pulg **81.** $\frac{17}{24}$; no **83.** $\frac{1}{16}$ lb, debajo de la carga **85.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ **87.** $\frac{7}{10}$ **89.** $\frac{1}{6}$ hp **95.** 4 **97.** 576 **99.** 30 pulg

Ejercicios de estudio El MCM y el MFC (pág. 175)

1. 15 **3.** 56 **5.** 42 **7.** 18 **9.** 660 **11.** 600 **13.** 72 **15.** 378 **17.** 3 **19.** 11 **21.** 4 **23.** 25 **25.** 20 **27.** 12 **29.** 6 **31.** 9 **33.** 360 min (6 h)

Para pensar a detalle (pág. 177)

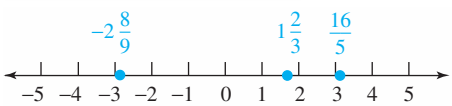
$1\frac{1}{3}$ h

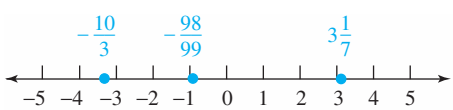
Ejercicios de estudio Sección 3.5 (pág. 180)

1. mezclado **3.** grafica **5. a.** $-5\frac{1}{2}°$ **b.** $-6\frac{7}{8}$ pulg **7. a.** $2\frac{2}{3}$ **b.** $1\frac{1}{3}$ **9.** $-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ **11.** $2\frac{1}{2}$

13.

17. $3\frac{3}{4}$ **19.** $5\frac{4}{5}$ **21.** $-3\frac{1}{3}$ **23.** $10\frac{7}{12}$ **25.** $\frac{13}{2}$ **27.** $\frac{104}{5}$ **29.** $-\frac{56}{9}$ **31.** $\frac{602}{3}$

33. 

35. 

37. $3\frac{4}{7}$ **39.** $10\frac{1}{2}$ **41.** 14 **43.** $-13\frac{3}{4}$ **45.** $-8\frac{1}{3}$ **47.** $\frac{35}{72}$ **49.** $-1\frac{1}{4}$ **51.** $\frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$ **53.** $-\frac{64}{27} = -2\frac{10}{27}$ **55.** $1\frac{9}{11}$ **57.** $-\frac{9}{10}$ **59.** 12 **61.** $\frac{5}{16}$ **63.** $-\frac{2}{3}$ **65.** $2\frac{1}{2}$ **67.** -2 **69.** 64 calorías **71.** 357¢ = \$3.57 **73.** 675 **75.** $2\frac{3}{4}$ pulg, $1\frac{1}{4}$ pulg **77.** $42\frac{5}{8}$ pulg^2 **79.** 602 **81.** talla 14, corte liviano **87.** 72 **89.** 4(8) **91.** $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$

Ejercicios de estudio Sección 3.6 (pág. 188)

1. conmutativa **3.** pedir prestado **5. a.** 76, $\frac{3}{4}$ **b.** $76 + \frac{3}{4}$ **7.** la propiedad fundamental de las fracciones **9. a.** $10\frac{1}{16}$ **b.** $1{,}290\frac{1}{3}$ **c.** $17\frac{1}{2}$ **d.** $46\frac{1}{5}$ **13.** $4\frac{2}{5}$ **15.** $5\frac{1}{7}$ **17.** $7\frac{1}{2}$ **19.** $5\frac{11}{30}$ **21.** $1\frac{1}{4}$ **23.** $1\frac{11}{24}$ **25.** $9\frac{3}{10}$ **27.** $3\frac{5}{14}$ **29.** $129\frac{11}{15}$ **31.** $397\frac{5}{12}$ **33.** $273\frac{2}{9}$ **35.** $623\frac{8}{21}$ **37.** $11\frac{1}{30}$ **39.** $101\frac{7}{16}$ **41.** $2\frac{1}{2}$ **43.** $26\frac{7}{24}$ **45.** $10\frac{7}{16}$ **47.** $320\frac{5}{18}$ **49.** $6\frac{1}{3}$ **51.** $\frac{1}{4}$ **53.** $3\frac{12}{35}$ **55.** $3\frac{5}{8}$ **57.** $4\frac{1}{3}$ **59.** $3\frac{7}{8}$ **61.** $53\frac{5}{12}$ **63.** $460\frac{1}{8}$ **65.** $1\frac{37}{70}$ **67.** $14\frac{5}{24}$ **69.** $-5\frac{1}{4}$ **71.** $-5\frac{7}{8}$ **73.** $2\frac{3}{4}$ mi **75.** $7\frac{2}{3}$ tazas **77.** $48\frac{1}{2}$ pies **79. a.** $16\frac{1}{2}, 16\frac{1}{2}; 5\frac{1}{5}, 5\frac{1}{5}$ **b.** $21\frac{7}{10}$ mi **81. a.** 20¢ **b.** 30¢ **83.** $191\frac{2}{3}$ pies **89.** 52 **91.** $\frac{13}{20}$ **93.** 6 **95.** la cantidad de superficie que encierra una figura

Ejercicios de estudio Sección 3.7 (pág. 197)

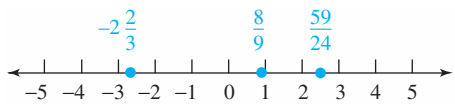
1. complejo **3.** $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$ **5.** 15 **7.** negativo **9.** resta **13.** $\frac{1}{3}$ **15.** $\frac{31}{45}$ **17.** $\frac{37}{40}$ **19.** $\frac{3}{10}$ **21.** $-1\frac{27}{40}$ **23.** $\frac{3}{4}$ **25.** $-\frac{3}{64}$ **27.** $-1\frac{1}{6}$ **29.** $8\frac{1}{2}$ **31.** $\frac{49}{4} = -15\frac{5}{8}$ **33.** $\frac{121}{16}$ **35.** 102 **37.** 36 **39.** $8\frac{1}{4}$ pulg **41.** $\frac{5}{6}$ **43.** $-1\frac{1}{3}$ **45.** $10\frac{1}{2}$ **47.** $\frac{4}{9}$ **49.** 3 **51.** 5 **53.** -20 **55.** 11 **57.** $\frac{3}{7}$ **59.** $-\frac{3}{8}$ **61.** $8\frac{1}{2}$ **63.** $14\frac{11}{20}$ mi **65.** sí **67.** $10\frac{1}{2}$ mi **69.** 6 seg **75.** 144 **77.** 37 **79.** 8 **81.** $2^5 \cdot 3^2$

Concepto clave (pág. 201)

1. 5, 5, 5, 5, 5 **2.** 5, 5, 5, 5, 5, 3 **3.** 7, 7, 7, 7, 7

Repaso del capítulo (pág. 203)

1. $\frac{7}{24}$ **2.** La figura no está dividida en partes iguales **3.** $-\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}$ **4.** fracciones equivalentes: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ **5.** El numerador y el denominador de la fracción se van a dividir entre 2 **6.** El numerador y el denominador de la fracción se van a dividir entre 2. La respuesta a cada división es 1 **7.** $\frac{1}{3}$ **8.** $\frac{5}{12}$ **9.** $-\frac{3}{4}$ **10.** $\frac{11}{18}$ **11.** El numerador y el denominador de la fracción original se van a multiplicar por 2 a fin de obtener una fracción equivalente con términos superiores **12.** $\frac{12}{18}$ **13.** $-\frac{6}{16}$ **14.** $\frac{21}{45}$ **15.** $\frac{36}{9}$ **16.** $\frac{1}{6}$ **17.** $-\frac{14}{45}$ **18.** $\frac{5}{12}$ **19.** $\frac{1}{5}$ **20.** $\frac{21}{5}$ **21.** $\frac{9}{4}$ **22.** 1 **23.** 1 **24.** cierto **25.** falso **26.** $\frac{2}{9}$ **27.** $-\frac{8}{21}$ **28.** $\frac{1}{21}$ **29.** $-\frac{5}{9}$ **30.** $\frac{9}{16}$ **31.** $-\frac{125}{8} = -15\frac{5}{8}$ **32.** $\frac{4}{9}$ **33.** $-\frac{8}{125}$ **34.** 30 lb **35.** 60 pulg^2 **36.** 8 **37.** $-\frac{12}{11}$ **38.** $\frac{1}{5}$ **39.** $\frac{7}{8}$ **40.** $\frac{25}{66}$ **41.** $-\frac{7}{2}$ **42.** $\frac{3}{32}$ **43.** $\frac{5}{2}$ **44.** $-\frac{3}{2}$ **45.** $\frac{8}{5}$ **46.** $-\frac{4}{9}$ **47.** -6 **48.** 12 **49.** $\frac{5}{7}$ **50.** $-\frac{6}{5}$ **51.** $\frac{1}{2}$ **52.** $\frac{5}{4}$ **53.** Los denominadores no son iguales **54.** 90 **55.** $\frac{5}{6}$ **56.** $\frac{1}{40}$ **57.** $-\frac{29}{24}$ **58.** $\frac{20}{7}$ **59.** $-\frac{11}{50}$ **60.** $\frac{25}{12}$ **61.** $-\frac{23}{6}$ **62.** $\frac{47}{60}$ **63.** $\frac{7}{32}$ pulg **64.** la segunda hora **65.** $2\frac{1}{6}$ **66.** $\frac{13}{6}$ **67.** $3\frac{1}{5}$ **68.** $-3\frac{11}{12}$ **69.** 1 **70.** $2\frac{1}{3}$ **71.** $\frac{75}{8}$ **72.** $-\frac{11}{5}$ **73.** $\frac{201}{2}$ **74.** $\frac{199}{100}$

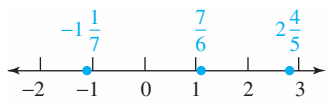
75. 

76. $-\frac{3}{10}$ **77.** $\frac{21}{22}$ **78.** 40 **79.** $-2\frac{1}{2}$ **80.** $48\frac{1}{8}$ pulg **81.** $3\frac{23}{40}$ **82.** $6\frac{1}{6}$ **83.** $1\frac{1}{12}$ **84.** $1\frac{5}{16}$ **85.** $39\frac{11}{12}$ gal **86.** $182\frac{5}{18}$ **87.** $113\frac{3}{20}$

88. $31\frac{11}{24}$ **89.** $316\frac{3}{4}$ **90.** $20\frac{1}{2}$ **91.** $34\frac{3}{8}$ **92.** $\frac{8}{9}$ **93.** $\frac{19}{72}$ **94.** $-\frac{12}{17}$ **95.** $-\frac{2}{5}$ **96.** $\frac{23}{10} = 2\frac{3}{10}$ **97.** $11\frac{1}{6}$

Examen del capítulo 3 (pág. 209)

1. a. $\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{1}{5}$ **2. a.** $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{2}{5}$ **3.** $-\frac{3}{20}$ **4.** 40 **5.** 6 **6.** $\frac{1}{30}$ **7.** $\frac{21}{24}$ **8.**



9. $\$1\frac{1}{2}$ millones

10. $\frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$ **11.** $261\frac{11}{36}$ **12.** $37\frac{5}{12}$ **13. a.** 0 lb **b.** $2\frac{3}{4}$ pulg **c.** $3\frac{3}{4}$ pulg **14.** $\frac{11}{7}$ **15.** $11\frac{3}{4}$ pulg **16.** perímetro: $53\frac{1}{3}$ pulg área: $106\frac{2}{3}$ pulg^2 **17.** 60 **18.** 12 **19.** $\frac{13}{24}$ **20.** $-\frac{20}{21}$ **21.** $-\frac{5}{3}$ **22.** 108, 36 **23.** numerador, barra de fracción, denominador; partes iguales de un todo o división **24.** Cuando se multiplica un número, como $\frac{3}{4}$, y su recíproco, $\frac{4}{3}$, el resultado es 1 **25. a.** simplificando una fracción, dividiendo el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número **b.** se produce una fracción, fracciones equivalentes: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ **c.** se multiplica el numerador y el denominador por el mismo número **26.** Los denominadores no son los mismos.

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 211)

1. 5 434 700 **2.** 5 430 000 **3.** 11 555, 10:30 A.M. **4.** cien billones **5.** 8136 **6.** 3519 **7.** 299 320 **8.** 991 **9.** 450 pies **10.** 11 250 pies^2 **11.** $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ **12.** $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ **13.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ **14.** $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ **15.** 16 **16.** −35 **17.** 2 **18.** 2 **19.** $\frac{3}{4}$ **20.** $\frac{5}{2}$ **21.** $-\frac{4}{5}$ **22.** $\frac{1}{2}$ **23.** $1\frac{5}{12}$ **24.** $-\frac{1}{35}$ **25.** $\frac{23}{6}$ **26.** $-\frac{53}{8}$ **27.** $9\frac{11}{12}$ **28.** $5\frac{11}{15}$ **29.** $\frac{11}{16}$ pulg **30.** 30 seg, 60 seg **31.** $\frac{2}{7}$ **32.** $-1\frac{9}{29}$

Capítulo 4 Verifique sus conocimientos (pág. 214)

1. suma **2.** derecha **3.** numerador **4.** raíz **5.** $\frac{21}{250}$ **6.** $85.80 **7. a.** 354.2782 **b.** 20 004.78 **8. a.** 7.875 pies^2 **b.** 11.5 pies **9.** 3.1 **10. a.** 0.15 **b.** 0.625 **c.** $0.\overline{1}$ **11.** 1.6

12.

13. $\frac{5}{12}$ **14.** $4.75

15.

16. a. 19 **b.** $\frac{19}{20}$ **c.** −0.3

17. a. > **b.** < **c.** >

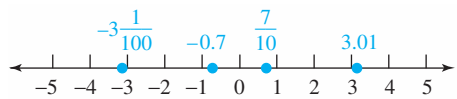
18. 52.6 mph

Ejercicios de estudio Sección 4.1 (pág. 221)

miles	cientos	decenas	unidades	·	décimas	centésimas	milésimas	diez milésimas
4	7	8	9	·	0	2	6	5

3. redondeo **5. a.** treinta y dos unidades cuatrocientos quince milésimas **b.** 32 **c.** $\frac{415}{1000}$ **d.** $30 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{5}{1000}$

7.



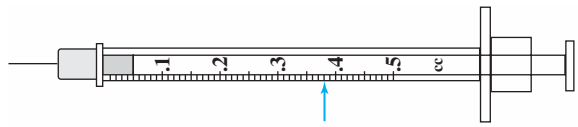
9. a. verdadero **b.** falso **c.** verdadero **d.** verdadero **11.** $\frac{47}{100}$, 0.47

13.

15. 9 816.0245

17. cincuenta unidades y una décima; $50\frac{1}{10}$ **19.** menos ciento treinta y siete diezmilésimas; $-\frac{137}{10\,000}$ **21.** trescientos cuatro y tres diezmilésimas; $304\frac{3}{10\,000}$ **23.** menos setenta y dos unidades, cuatrocientos noventa y tres milésimas; $-72\frac{493}{1000}$ **25.** −0.39 **27.** 6.187 **29.** 506.1 **31.** 2.7 **33.** −0.14 **35.** 33.00 **37.** 3.142 **39.** 1.414 **41.** 39 **43.** 2988 **45. a.** $3090 **b.** $3 090.30 **47.** < **49.** > **51.** 132.64, 132.6401, 132.6499 **53.** $1025.78

55.



57. a. 0.30 **b.** 1609.34 **c.** 453.59 **d.** 3.79 **59.** arena, limo, gránulos, arcilla **61.** Texas City, Houston, Westport, Galveston, White Plains, Crestline **63.** oro: Patterson, plata: Khorkina, bronce: Zhang **65. a.** Q1, 2004; $0.25 **b.** Q2, 2002; −$0.25 **73.** $164\frac{11}{20}$ **75.** $\frac{32}{243}$ **77.** 72 pulg^2 **79.** −1

Ejercicios de estudio Sección 4.2 (pág. 229)

1. suma **3.** opuesto **5.** punto **7.** 39.9 **9.** 54.72 **11.** 15.9 **13.** 0.23064 **15.** 288.46 **17.** 58.04 **19.** 9.53 **21.** 70.29 **23.** 4.977 **25.** 0.19 **27.** −10.9 **29.** 38.29 **31.** −14.3 **33.** −0.0355 **35.** −16.6 **37.** 47.91 **39.** 2.598 **41.** 11.01 **43.** 4.1 **45.** 35.85 **47.** −57.47 **49.** 6.2 **51.** 15.2 **53.** 8.03 **55. a.** 53.044 seg **b.** 102.38 **57.** 103.4 pulg **59.** 1.8, Texas **61.** 1.74 mi, 2.32 mi, 4.06 mi, 2.90 mi, 0 mi, 2.90 mi **63.** 43.03 seg **65.** $765.69, $740.69 **67. a.** $101.94 **b.** $55.80 **69.** 8 156.9343 **71.** 1 932.645 **73.** 2 529.0582 **79.** $110\frac{23}{40}$ **81.** $-\frac{5}{6}$

Ejercicios de estudio Sección 4.3 (pág. 238)

1. factores, productos **3.** entero, suma **5. a.** $\frac{21}{1000}$ **b.** $\frac{21}{1000} = 0.021$. Son lo mismo **7.** 2.3 **9.** 0.08 **11.** −0.15 **13.** 0.98 **15.** 0.072 **17.** 12.32 **19.** −0.0049 **21.** −0.084 **23.** −8.6265 **25.** 9.6 **27.** −56.7 **29.** 12.24 **31.** −18.183 **33.** 0.024 **35.** −16.5 **37.** 42 **39.** 6,716.4 **41.** −0.56 **43.** 8,050 **45.** 980 **47.** −200 **49.** 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25, 0.36, 0.49, 0.64, 0.81 **51.** 1.44 **53.** 1.69 **55.** −17.48 **57.** 14.24 **59.** 0.84 **61.** −3.872 **63.** 18.72 **65.** 86.49 **67.** 38.16 **69.** 14.6 **71. a.** $12.50, $12 500, $15.75, $1575 **b.** $14 075 **73.** 0.75 pulg **75.** 136.4 lb **77.** $95.20, $123.75 **79.** 160.6 m **81.** 0.000000136 pulg, 0.0000000136 pulg, 0.00000004 pulg **83.** 15.29694 **85.** 631.2722 **87.** $102.65 **93.** 7300 **95.** El valor absoluto de tres negativo **97.** −1

Para pensar a detalle (pág. 246)

2.86

Ejercicios de estudio Sección 4.4 (pág. 247)

1. dividendo, divisor, cociente **3.** entero, derecha, arriba **5.** cierto **7.** 10 **9.** Use la multiplicación para verificar si $2.13 \cdot 0.9 = 1.917$.

11. sí **13.** mueva el punto decimal en el divisor y en el dividendo dos posiciones a la derecha. **15.** 4.5 **17.** −9.75 **19.** 6.2 **21.** 32.1 **23.** 2.46 **25.** −7.86 **27.** 2.66 **29.** 7.17 **31.** 130 **33.** 1050 **35.** 0.6 **37.** 0.6 **39.** 5.3 **41.** −2.4 **43.** 13.60 **45.** 0.79 **47.** 0.07895 **49.** −0.00064 **51.** 0.0348 **53.** 4.504 **55.** −0.96 **57.** 1027.19 **59.** 3.5 **61.** 58.5 **63.** 280 **65.** 11 h después: 6 P.M. **67.** 567 **69.** 1998: $13.00; 2003: $15.35 **71.** 0.37 mi **73.** 7.24 **75.** −3.96 **81.** $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ **83.** {. . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, . . .} **85.** $38\frac{1}{2}$ **87.** 42.05

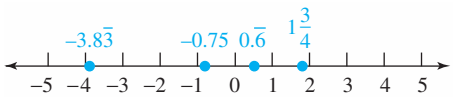
Ejercicios de estudio Estimación (pág. 251)

1. aprox. $240 **3.** aprox. 2 pies cúbicos menos **5.** aprox. 30 **7.** aprox. $330 **9.** aprox. $520 **11.** no es razonable **13.** razonable **15.** razonable **17.** no es razonable

Ejercicios de estudio Sección 4.5 (pág. 257)

1. periódico **3.** decimal **5. a.** 7 ÷ 8 **b.** numerador **7.** más pequeño

9.



11. a. falso **b.** verdadero **c.** verdadero **d.** falso **13. a.** no **b.** es un decimal periódico **15.** 0.5 **17.** −0.625 **19.** 0.5625 **21.** −0.53125 **23.** 0.55 **25.** 0.775 **27.** −0.015 **29.** 0.002 **31.** 0.$\overline{6}$ **33.** 0.$\overline{45}$ **35.** −0.58$\overline{3}$ **37.** 0.0$\overline{3}$ **39.** 0.23 **41.** 0.38 **43.** 0.152 **45.** 0.370 **47.** 1.33 **49.** −3.09 **51.** 3.75 **53.** −8.67 **55.** 12.6875 **57.** 203.73 **59.** < **61.** < **63.** $\frac{37}{90}$ **65.** $\frac{19}{60}$ **67.** $\frac{3}{22}$ **69.** $-\frac{1}{90}$ **71.** 1 **73.** 0.57 **75.** 5.27 **77.** 0.24 **79.** −2.55 **81.** 0.068 **83.** 7.11 **85.** −1.7 **87.** 4.25 **89.** 18.1 **91.** 0.$\overline{2277}$ **93.** 0.03472 **95.** 0.0625, 0.375, 0.5625, 0.9375 **97.** $\frac{3}{40}$ pulg **99.** 23.4 seg, 23.8 seg, 24.2 seg, 32.6 seg **101.** 93.6 pulg^2 **107.** −1 **109.** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **111.** 15

Ejercicios de estudio Sección 4.6 (pág. 263)

1. raíz **3.** radical, positivo **5.** radicando **7.** 25, 25 **9.** 7^2 **11.** $\frac{3}{4}$ **13.** $\sqrt{6}, \sqrt{11}, \sqrt{23}, \sqrt{27}$ **15. a.** 1 **b.** 0 **17. a.** 2.4 **b.** 5.76 **c.** 0.24

19.

21. a. 4, 5 **b.** 9, 10 **23.** −7, 8 **25.** 4 **27.** −11 **29.** −0.7 **31.** 0.5 **33.** 0.3 **35.** $-\frac{1}{9}$ **37.** $-\frac{4}{3}$ **39.** $\frac{2}{5}$ **41.** 31 **43.** −20 **45.** $-\frac{7}{20}$ **47.** −70 **49.** 2.56 **51.** −3.6 **53.** 1, 1.414, 1.732, 2, 2.236, 2.449, 2.646, 2.828, 3, 3.162 **55.** 37 **57.** 61 **59.** 3.87 **61.** 8.12 **63.** 4.904 **65.** −3.332 **67.** 4,899 **69.** −0.0333 **71. a.** 5 pies **b.** 10 pies **73.** 127.3 pies **75.** 42 pulgadas **83.** 82.35 **85.** 16 **87.** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .} **89.** $-\frac{17}{144}$

Concepto clave (pág. 266)

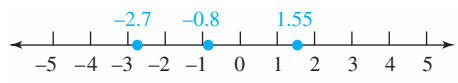
1. {1, 2, 3, 4, 5, . . .} **3.** {. . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, . . .} **5.** decimales no finitos, no periódicos; un número que no puede escribirse como una fracción de dos enteros **7.** falso **9.** falso **11.** verdadero **13.** falso **15.** verdadero

Repaso del capítulo (pág. 268)

1. 0.67, $\frac{67}{100}$ **2.**

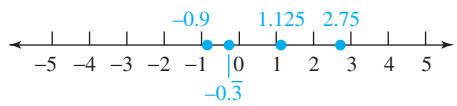
3. $10 + 6 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{3}{10\,000}$ **4.** dos y tres décimas, $2\frac{3}{10}$ **5.** quince negativo y cincuenta y nueve centésimas, $-15\frac{59}{100}$ **6.** seiscientos un diez milésimas, $\frac{601}{10\,000}$ **7.** un cien milésima, $\frac{1}{100\,000}$

8.



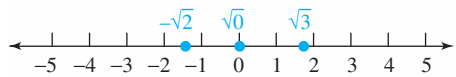
9. Washington, Díaz, Chou, Singh, Gerbac **10.** verdadero **11.** < **12.** > **13.** = **14.** < **15.** 4.58 **16.** 3 706 090 **17.** −0.1 **18.** 88.1 **19.** 66.7 **20.** 45.188 **21.** 15.17 **22.** 27.71 **23.** −7.7 **24.** 3.1 **25.** −4.8 **26.** −29.09 **27.** −25.6 **28.** 4.939 **29.** $48.21 **30.** 8.15 pulg **31.** −0.24 **32.** 2.07 **33.** −17.05 **34.** 197.945 **35.** 0.00006 **36.** 4.2 **37.** 90 145.2 **38.** 2897 **39.** 0.04 **40.** 0.0225 **41.** 10.89 **42.** 0.001 **43.** −10.61 **44.** 25.82 **45.** 692.25 **46.** 68.62 pulg^2 **47.** 0.07 pulg **48.** 1.25 **49.** −10.45 **50.** 1.29 **51.** 4.103 **52.** −2.9 **53.** 0.053 **54.** 63 **55.** 0.81 **56.** 12.9 **57.** −667.3 **58.** 20.22 **59.** $8.34 **60.** 0.8976 **61.** −0.00112 **62.** 13.95 **63.** 14 **64.** 9.5 **65.** 0.875 **66.** −0.4 **67.** 0.5625 **68.** 0.06 **69.** 0.$\overline{54}$ **70.** −0.$\overline{6}$ **71.** 0.58 **72.** 1.03 **73.** > **74.** >

75.



76. $\frac{11}{15}$ **77.** −6.24 **78.** 93 **79.** 39.564 **80.** 33.49 **81.** 34.88 pulg^2 **82. a.** radical **b.** 8^2 **83.** 7 **84.** −4 **85.** 10 **86.** 0.3 **87.** $\frac{8}{5}$ **88.** 0.9 **89.** $-\frac{1}{6}$ **90.** 0 **91.** 9 y 10 **92.** es diferente por 0.11.

93.



94. −30 **95.** 2.5 **96.** −27 **97.** 1.5 **98.** 4.36 **99.** 7.68

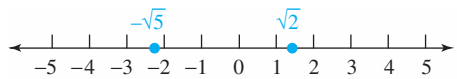
Examen del capítulo 4 (pág. 273)

1. $\frac{79}{100}$, 0.79 **2.** Selway, Monroe, Paston, Covington, Cadia **3. a.** sesenta y dos unidades cincuenta y cinco centésimas $62\frac{55}{100}$ **b.** ocho mil trece cien milésimas $\frac{8{,}013}{100\,000}$ **4.** 33.050 **5.** $208.75 **6. a.** 0.567909 **b.** 0.458 **7.** 1.02 pulg **8. a.** 10.75 **b.** 6.121 **c.** 0.1024 **d.** 14.07 **9.** 1.25 mi^2 **10.** 0.004 pulg **11.** 3588 **12. a.** 0.34 **b.** 0.41$\overline{6}$ **13.** −2.29 **14.** 1.1$\overline{8}$

15.

16. $\frac{41}{30}$ **17.** 0.42 g **18.** 80

19.

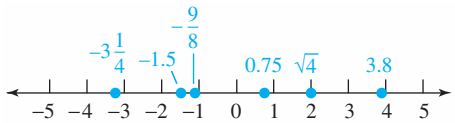


20. radical **21.** 12^2 **22. a.** 11 **b.** $-\frac{1}{30}$ **23. a.** > **b.** > **c.** > **d.** > **24. a.** −0.2 **b.** 13

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 275)

1. $788 000 **2.** (3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5) **3.** 27 R 42 **4.** 1000 **5.** $11 \cdot 5 \cdot 2^2$ **6.** 1, 2, 4, 5, 10, 20

7. {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .} **8.** −13 **9.** suma **10.** 8, −3, 36, −6, 6
11. −5(3) = −15 **12.** −1 **13.** 35 **14.** 102 **15.** −$1100
16. $\frac{6}{13}$ **17.** fracciones equivalentes **18.** $\frac{5}{7}$ **19.** $\frac{21}{128}$ **20.** $-\frac{3}{16}$
21. $\frac{34}{21}$ **22.** $19\frac{1}{8}$ **23.** $26\frac{7}{24}$ **24.** $-\frac{1}{3}$ **25.** 157.5 pulg^2
26.



27. 0.001 pulg **28.** < **29.** −8.136 **30.** 5.6 **31.** 5601.2
32. 0.0000897 **33.** 47.95 **34.** 33.6 h **35.** 232.8°C **36.** $0.41\overline{6}$
37. $50 **38.** 7 **39.** $\frac{25}{4}$ **40.** −6

Capítulo 5 Verifique sus conocimientos (pág. 278)

1. cien **2.** cantidad, porcentaje, base **3.** descuento
4. capital **5. a.** 0.75, 75% **b.** 0.625, 62.5% **c.** 1.45, 145%
6. a. 35%, $\frac{7}{20}$ **b.** 398%, $\frac{199}{50}$ o $3\frac{49}{50}$ **c.** 10.5%, $\frac{21}{200}$
7. a. 0.25, $\frac{1}{4}$ **b.** 2 o 2.0, 2 o $\frac{2}{1}$ **c.** 0.005, $\frac{1}{200}$ **8.** 35%
9. 66.7% **10. a.** 37.5% o $37\frac{1}{2}$% **b.** $33\frac{1}{3}$% **11.** 325
12. 17% **13.** 52 **14.** 250% **15.** $2.99, $11.96 **16.** $29.94
17. $46.00 **18.** $1 676.47 **19.** 93% **20.** $1045.00
21. $40.71 **22.** 13

Ejercicios de estudio Sección 5.1 (pág. 285)

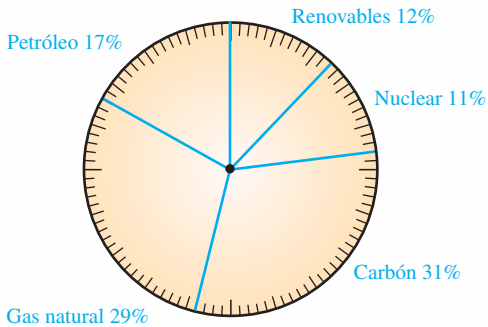
1. porcentaje **3.** 100, simplifique **5.** derecha **7. a.** 0.84, 84%, $\frac{21}{25}$
b. 16% **9.** $\frac{17}{100}$ **11.** $\frac{1}{20}$ **13.** $\frac{3}{5}$ **15.** $\frac{5}{4}$ **17.** $\frac{1}{150}$ **19.** $\frac{21}{400}$ **21.** $\frac{3}{500}$
23. $\frac{19}{1000}$ **25.** 0.19 **27.** 0.06 **29.** 0.408 **31.** 2.5 **33.** 0.0079
35. 0.0025 **37.** 93% **39.** 61.2% **41.** 3.14% **43.** 843%
45. 5000% **47.** 910% **49.** 17% **51.** 16% **53.** 40%
55. 105% **57.** 62.5% **59.** 18.75% **61.** $66\frac{2}{3}$% **63.** $8\frac{1}{3}$%
65. 11.11% **67.** 55.56% **69. a.** $\frac{15}{191}$ **b.** 8% **71. a.** $\frac{9}{22}$
b. 41% **73. a.** $\frac{5}{29}$ **b.** 17% **c.** 24% **75.** 5 pies **77.** 0.9944
79. como un decimal; 89.6% **81.** torso: 27.5% **83.** 92%
85. 0.27% **93.** $-\frac{1}{12}$ **95.** −1 **97.** 68.25 cm^2

Para pensar a detalle (pág. 294)

36% están inscritos en la universidad en tiempo completo, 69% de los estudiantes de tiempo completo leen 5 o más libros de texto o manuales que les fueron asignados durante el año escolar, 38% lo hacen en forma ocasional.

Ejercicios de estudio Sección 5.2 (pág. 295)

1. gráfica **3.** $A = 0.10 \cdot 50$ **5.** $48 = p \cdot 47$ **7. a.** 0.12
b. 0.056 **c.** 1.25 **d.** 0.0025 **9.** más **11.** 44% **13.** 25
15. 50 **17.** 90 **19.** 80% **21.** 65 **23.** 0.096 **25.** 1.25%
27. 44 **29.** 43.5 **31.** 107.1 **33.** 99 **35.** 60 **37.** 31.25%
39.



Fuente: Administración de información de energía

41. 120 **43.** $666 billones **45.** 38 000 = 38K **47.** 24 oz
49. sí **51.** 30, 12 **53.** 2.7 pulg **55.** 5% **57.** sí **63.** 18.17
65. 5.001 **67.** 0.008

Para pensar a detalle (pág. 302)

1. 1970–1975, un aumento aproximado de 75% **2.** 1995–2000, una disminución aproximada de 9%

Ejercicios de estudio Sección 5.3 (pág. 304)

1. comisión **3.** descuento **5.** reste, original
7. $42.75 **9.** 8% **11.** $47.34, $2.84, $50.18 **13.** $150
15. 8%, 1.2%, 1.45%, 6.2% **17.** 360 h **19.** 96 calorías
21. 2000–2001; 12% **23.** 10% **25.** 31% **27. a.** 25%
b. 36% **29.** $2955 **31.** 1.5% **33.** $12 000 **35.** $39.95, 25%
37. $187.49 **39.** $349.97, 13% **41.** $3.60, 23%, $11.88
43. $76.50 **49.** −50 **51.** $\frac{13}{36}$ **53.** 173.4 **55.** 13

Ejercicios de estudio Estimación (pág. 309)

1. 164 **3.** $60 **5.** $54 000 **7.** 320 lb **9.** 130 **11.** 21
13. 18 000 **15.** 3100

Ejercicios de estudio Sección 5.4 (pág. 314)

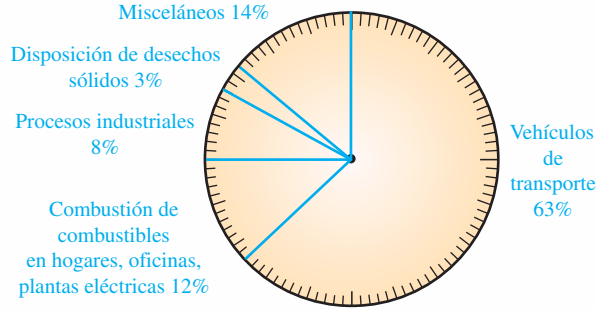
1. capital **3.** interés **5.** simple **7. a.** 0.07 **b.** 0.098
c. 0.0625 **9.** $1800 **11. a.** interés compuesto **b.** $1000
c. 4 **d.** $50 **e.** 1 año **13.** multiplicación **15.** $5300
17. $1472 **19.** $4 262.14 **21.** $10 000, 0.0725, 2 años $1450
23. $192, $1392, $58 **25.** $18.828 millones **27.** $755.83
29. $1 271.22 **31.** $570.65 **33.** $30 915.66 **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** $\frac{29}{35}$
43. $8\frac{1}{3}$ **45.** 12

Concepto clave (pág. 317)

67, 100, 0.05, 2000; 0.67, 0.56, 0.0005; 75%, 0.8, 0.625, 625%
1. 198.4 **2.** 60% **3.** 62.5 **4.** 1062.5 **5.** 17% **6.** 512
7. $3000 **8.** $3 468.55

Repaso del capítulo (pág. 319)

1. 39%, 0.39, $\frac{39}{100}$ **2.** 111%, 1.11, $1\frac{11}{100}$ **3.** 61% **4.** $\frac{3}{20}$ **5.** $\frac{6}{5}$
6. $\frac{37}{400}$ **7.** $\frac{1}{1000}$ **8.** 0.27 **9.** 0.08 **10.** 1.55 **11.** 0.018
12. 83% **13.** 62.5% **14.** 5.1% **15.** 600% **16.** 50%
17. 80% **18.** 87.5% **19.** 6.25% **20.** $33\frac{1}{3}$% **21.** $83\frac{1}{3}$%
22. 55.56% **23.** 266.67% **24.** 63% **25.** 0.1% = $\frac{1}{1000}$
26. cantidad: 15, base: 45, porcentaje: $33\frac{1}{3}$% **27.** $A = 32\% \cdot 96$
28. 200 **29.** 125 **30.** 1.75% **31.** 2,100 **32.** 121 **33.** 30
34. 14.4 gal de nitroglicerina, 0.6 gal de metano **35.** 68
36. 87% **37.** $5.43
38.


Misceláneos 14%
Disposición de desechos sólidos 3%
Procesos industriales 8%
Combustión de combustibles en hogares, oficinas, plantas eléctricas 12%
Vehículos de transporte 63%

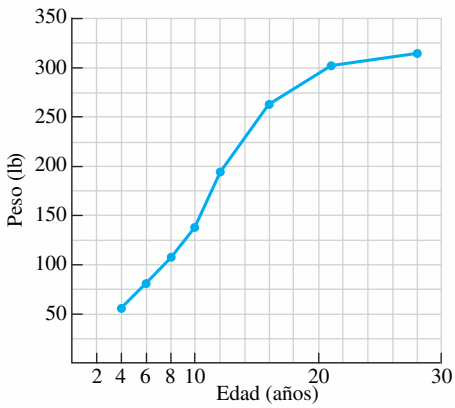
39. 139 531 200 mi^2 **40.** \$3.30, \$63.29 **41.** 4% **42.** \$40.20
43. original **44.** 25% **45.** 9.6% **46.** \$50, \$189.99, 26%
47. \$6000, 8%, 2 años, \$960 **48.** \$10 308.22 **49.** \$134.69
50. \$2 142.45 **51.** \$6 076.45 **52.** \$43 265.78

Examen del capítulo 5 (pág. 323)

1. 61%, $\frac{61}{100}$, 0.61 **2.** 199%, $\frac{199}{100}$, 1.99 **3. a.** 0.67 **b.** 0.123
c. 0.0975 **4. a.** 25% **b.** 62.5% **c.** 12% **5. a.** 19%
b. 347% **c.** 0.5% **6. a.** $\frac{11}{20}$ **b.** $\frac{1}{10\,000}$ **c.** $\frac{5}{4}$ **7.** 23.33%
8. 60% **9.** $66\frac{2}{3}$% **10.** 25% **11. a.** 1.02 pulg **b.** 32.98 pulg
12. 6.5% **13.** \$3.81 **14.** 93.9% **15.** 90 **16.** 21 **17.** 144
18. 27% **19.** \$35.92 **20.** \$41 440 **21.** \$11.95, \$3, 20%
22. 22% **23.** \$150 **24.** \$5079.60 **25.** La frase "hizo que el crimen disminuyera un 37%" no es clara. La pregunta que surge es: ¿disminuyó el 37% de qué? **26.** El interés es dinero que se paga debido al uso del dinero.

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 325)

1.



2. $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$ **3. a.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 **b.** $5 \cdot 2^3$
4. \$2106 **5.** 64 pies^2 **6.** -7 **7.** -4 **8.** 55 **9.** 9 **10.** -30
11. 15°C **12.** -10 **13.** $\frac{4}{11}$ **14.** $\frac{2}{3}$ **15.** $-\frac{5}{21}$ **16.** $\frac{2}{5}$ **17.** $\frac{34}{21}$
18. $20\frac{5}{18}$ **19.** $\frac{4}{9}$ **20.** $-\frac{8}{27}$ **21.** 70.29 **22.** -8.6265 **23.** 752
24. 83.4 **25.** 452.03 **26.** 452.030 **27.** $0.7\overline{3}$ **28.** $\frac{2}{3}$ **29.** -29
30. 3.5 h **31.** 29%, $\frac{29}{100}$, 0.473, $\frac{473}{1000}$, 87.5%, 0.875 **32.** 125
33.

STEAK HOUSE
Bloomington, MN
Mesero #12\ AT

VISA	67463777288
Nombre	DALTON/ LIZ
Cantidad	\$75.18
Propina \$	12.00
TOTAL \$	87.18

34. 0.0018% **35.** \$1450 **36.** 50

Capítulo 6 Verifique sus conocimientos (pág. 328)

1. razón **2.** proporción **3.** longitud, métrico **4.** Fahrenheit, Celsius **5.** 7/5 **6.** 2/9 **7.** 47 mpg **8.** la bolsa de 12 oz.
9. 4/1 **10. a.** sí **b.** no **11.** no **12.** 68 **13.** -40
14. 25.74 **15.** -0.2 **16.** 500 cm **17.** $9\frac{2}{3}$ yd **18.** 26 400 pies
19. 252 pulg **20.** 109.4 yds **21.** 175.26 cm **22.** 2500
23. $3\frac{1}{2}$ pulg **24.** -40°C

Para pensar a detalle (pág. 332)

22 : 1, 24 : 1, 26 : 1; Matemáticas básicas tiene la razón profesor/estudiante más baja.

Ejercicios de estudio Sección 6.1 (pág. 335)

1. razón **3.** costo **5.** 3 **7.** 10 **9.** $\frac{11 \text{ minutos}}{60 \text{ minutos}} = \frac{11}{60}$ **11.** $\frac{13}{9}$, 13 a 9, 13:9 **13.** $\frac{5}{7}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{5}{8}$ **21.** $\frac{2}{7}$ **23.** $\frac{1}{3}$ **25.** $\frac{1}{5}$
27. $\frac{3}{7}$ **29.** $\frac{3}{4}$ **31.** \$1800 **33.** $\frac{1}{3}$ **35.** \$8750 **37.** $\frac{1}{5}$ **39.** $\frac{32 \text{ pies}}{3 \text{ seg}}$
41. $\frac{21 \text{ realizados}}{25 \text{ intentos}}$ **43.** $\frac{375 \text{ estudiantes}}{2 \text{ años}}$ **45.** $\frac{3 \text{ latidos}}{2 \text{ mediciones}}$ **47.** 12 revoluciones por minuto **49.** 1.5 errores por hora **51.** 7 regalos por niño
53. 320 habitantes por milla cuadrada **55.** \$0.07 por pie
57. 1.2 centavos por onza **59.** \$68 por persona **61.** \$0.8 miles de millones por mes **63.** $\frac{1}{1}$ **65.** $\frac{3}{2}$ **67.** $\frac{\frac{2}{3}}{3\frac{1}{2}}$ **69.** $\frac{12 \text{ hits}}{22 \text{ turnos al bat}} = \frac{6 \text{ hits}}{11 \text{ turnos al bat}}$
71. $\frac{5 \text{ compresiones}}{2 \text{ respiraciones}}$ **73.** $\frac{329 \text{ quejas}}{100\,000 \text{ pasajeros}}$ **75.** $\frac{1 \text{ profesor}}{16 \text{ alumnos}}$
77. \$1.89 por galón **79.** 7¢ por onza **81.** la lata de 6 oz
83. las cajas con 50 tabletas **85.** el camión **87.** 440 gal por minuto **89.** 325 mi, 65 mph **91.** el segundo automóvil
97. 45.537 **99.** 192.7012

Ejercicios de estudio Sección 6.2 (pág. 344)

1. proporción **3.** cruzados **5.** $2 \cdot 10, 5 \cdot 4$ **7. a.** $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$
b. $\frac{3 \text{ asistentes de profesores}}{25 \text{ niños}} = \frac{12 \text{ asistentes de profesores}}{100 \text{ niños}}$ **9.** i, iv **13.** no **15.** sí
17. no **19.** sí **21.** no **23.** sí **25.** 4 **27.** 6 **29.** 3 **31.** 36
33. 1 **35.** -2 **37.** 18 **39.** -3.1 **41.** 3,500 **43.** 5.625
45. \$218.75 **47.** \$11.76 **49.** el mismo **51.** 24 **53.** 975
55. cerca de $4\frac{1}{4}$ **57.** 19 seg **59.** 221 mi **61.** \$309 **63.** 10 pies
65. 65.25 pies = 65 pies 3 pulg **67.** 2.625 pulg = $2\frac{5}{8}$ pulg
73. 90% **75.** $\frac{1}{3}$ **77.** 2.6

Ejercicios de estudio Sección 6.3 (pág. 355)

1. longitud **3.** 1 **5.** capacidad **7.** 1 **9.** 5 280 **11.** 16 **13.** 8
15. 1 **17.** 24 **19.** $\frac{5}{8}$ pulg, $1\frac{3}{4}$ pulg, $2\frac{5}{16}$ pulg **21. a.** $\frac{1 \text{ ton}}{2000 \text{ lb}}$ **b.** $\frac{2 \text{ pt}}{1 \text{ qt}}$
23. a. iv **b.** i **c.** ii **d.** iii **25. a.** iii **b.** iv **c.** i **d.** ii
31. $2\frac{5}{8}$ pulg **33.** $10\frac{3}{4}$ pulg **35.** 48 pulg **37.** 42 pulg **39.** 2 pies
41. 288 pulg **43.** 2.5 yd **45.** $4\frac{2}{3}$ pies **47.** 15 pies **49.** $2\frac{1}{3}$ yd
51. 3 mi **53.** 2640 pies **55.** 5 lb **57.** 3.5 tons **59.** 24 800 lb
61. 6 pt **63.** 2 gal **65.** 2 pt **67.** 4 h **69.** 5 días **71.** 150 yd
73. 2880 pulg **75.** 0.28 mi **77.** 61 600 yd **79.** 128 oz
81. 4.95 tons **83.** 68 **85.** $71\frac{7}{8}$ gal = 71.875 gal **87.** 320 oz
89. $6\frac{1}{8}$ días = 6.125 días **93.** 3700 **95.** 3673.26 **97.** 0.101 **99.** 0.1

Ejercicios de estudio Sección 6.4 (pág. 365)

1. decenas **3.** millares **5.** centésimas **7.** métrico
9. 1 cm, 3 cm, 6 cm **11. a.** $\frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}$ **b.** $\frac{100 \text{ cg}}{1 \text{ g}}$ **c.** $\frac{1000 \text{ mililitros}}{1 \text{ litro}}$
13. a. iii **b.** i **c.** ii **15. a.** ii **b.** iii **c.** i **17.** 10 **19.** $\frac{1}{100}$
21. $\frac{1}{1000}$ **23.** 1000 **25.** 1000 **27.** 1000 **29.** $\frac{1}{100}$ **31.** 1
37. 156 mm **39.** 28 cm **41.** 300 **43.** 570 **45.** 3.1
47. 7 680 000 **49.** 0.472 **51.** 4.532 **53.** 0.0325 **55.** 37.5
57. 125 **59.** 675 000 **61.** 6.383 **63.** 0.63 **65.** 69.5
67. 5.689 **69.** 5.762 **71.** 0.000645 **73.** 0.65823
75. 3000 **77.** 2000 **79.** 1 000 000 **81.** 0.5 **83.** 3000
85. 5000 **87.** 10 **89.** 0.5 km, 1 km, 1.5 km, 5 km, 10 km
91. 3.43 hm **93.** 12 cm, 8 cm **95.** 40 dL **97.** 4 **99.** 3 g
105. \$23.99 **107.** $1\frac{9}{35}$

Para pensar a detalle (pág. 371)

1. 216 mm × 279 mm **2.** 9 kilogramos **3.** 22.5 mililitros

Ejercicios de estudio Sección 6.5 (pág. 373)

1. Fahrenheit, Celsius **3. a.** metro **b.** metro **c.** pulgada **d.** milla **5. a.** litro **b.** litro **c.** galón **11.** 91.4 **13.** 147.6 **15.** 39 372 **17.** 127 **19.** 1 **21.** 11,350 **23.** 17.5 **25.** 0.6 **27.** 0.1 **29.** 243.4 **31.** 710 **33.** 0.5 **35.** 10° **37.** 122° **39.** 14° **41.** −20.6° **43.** 5 mi **45.** 70 mph **47.** 1.9 km **49.** 1.9 cm **51.** 411 lb; 744 lb **53. a.** 226.8 g **b.** 0.24 L **55.** no **57.** Los 3 cuartos **59.** 62°C **61.** 28°C **63.** −5°C y 0°C **69.** $\frac{29}{15}$ **71.** $\frac{4}{5}$ **73.** 8.05 **75.** 15.6

Concepto clave (pág. 376)

1. El asistente del profesor necesita supervisar a 75 niños; 2, 75, x, 2, x; 15, 75, 150, 15, 15, 10 **2.** 375 **3.** 10 800 pies **4.** $1152

Repaso del capítulo (pág. 378)

1. $\frac{1}{3}$ **2.** $\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{3}{2}$ **4.** $\frac{2}{3}$ **5.** $\frac{37}{32}$ **6.** $7.75 **7.** la lata de 8 oz **8.** 75 **9.** 15 **10.** no **11.** sí **12.** sí **13.** no **14.** 4.5 **15.** 16 **16.** 7.2 **17.** −0.12 **18.** 192.5 mi **19.** 300 **20.** 12 pies **21.** $1\frac{1}{2}$ pulg **22.** $\frac{1\text{ mi}}{5280\text{ pies}} = 1, \frac{5280\text{ pies}}{1\text{ mi}} = 1$ **23.** 15 pies **24.** 216 pulg **25.** 5.5 pies **26.** 306 pulg **27.** 1.75 mi **28.** 1760 yd **29.** 2 lb **30.** 275.2 oz **31.** 96 000 oz **32.** 2.25 tons **33.** 80 fl oz **34.** 0.5 gal **35.** 68 c **36.** 5.5 qt **37.** 40 pt **38.** 56 c **39.** 1200 seg **40.** 15 min **41.** $8\frac{1}{3}$ días **42.** 360 min **43.** 108 h **44.** 86 400 seg **45.** $484\frac{2}{3}$ yd **46.** 100 **47.** 4 cm **48.** $\frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}} = 1, \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} = 1$ **49.** 4.75 m **50.** 8000 mm **51.** 0.03 km **52.** 2000 dm **53.** 50 hm **54.** 25 hm **55.** 70 mg **56.** 8 g **57.** 5425 kg **58.** 5 425 000 mg **59.** 7.5 g **60.** 0.05 kg **61.** 50 **62.** 1.5 L **63.** 3.25 kL **64.** 1000 dL **65.** 40 cL **66.** 20 hL **67.** 400 mL **68.** 1000 mL **69.** 164.04 pies **70.** la torre de Sears **71.** 3106 km **72.** 198.12 cm **73.** 850.5 g **74.** 33 lb **75.** 11 000 g **76.** 910 kg **77.** cerca de 2 lb **78.** LaCroix **79.** la botella de 5 litros **80.** 25°C **81.** 30°C

Examen del capítulo 6 (pág. 383)

1. $\frac{3}{4}$ **2.** $\frac{1}{6}$ **3.** la lata de 2 libras **4.** 22.5 kW/h por día **5.** $\frac{1}{1}$, 1:1, 1 a 1 **6.** no **7.** sí **8.** sí **9.** 15 **10.** 63.24 **11.** −0.21 **12.** 0.2 **13.** $3.43 **14.** $1\frac{2}{3}$ c **15.** 15 pies **16.** $8\frac{1}{3}$ yd **17.** 160 oz **18.** 3200 lb **19.** 128 fl oz **20.** 115 200 min **21.** el que está a la izquierda **22.** el azul **23.** el de la derecha **24.** 0.5 km **25.** 500 cm **26.** 0.08 kg **27.** 70 000 mL **28.** 7.5 g **29.** la carrera de 100 yd **30.** Jim **31.** la botella de 1 litro **32.** 182°F **33.** Una escala es la relación (o razón) que compara el tamaño de un dibujo y el tamaño real del objeto. Por ejemplo, 1 pulgada a 6 pies (1 pulg: 6 pies). **34.** Es más fácil convertir de una unidad a otra en el sistema métrico, ya que se basa en el número 10.

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 385)

1. 6 decenas de millar + 4 millares + 5 centenas + 2 unidades **2.** 20 R 3 **3.** 587, 278, −6790 **4. a.** −8 **b.** indefinido **c.** −8 **d.** 0 **e.** 8 **f.** 0 **5.** 15 disparos **6.** −9, 9 **7.** −61 **8.** 2500 **9.** 0.25 **10.** 3.51 **11.** 25.1 **12.** 0.19 **13.** 79 **14.** $A = \frac{1}{2}bh$ **15.** $\frac{4}{5}$ **16.** $\frac{54}{60}$ **17.** −1 **18.** $\frac{1}{4}$ **19.** $\frac{3}{4}$ hp **20.** no **21.** sí **22.** 6 **23.** sí **24.** 15 **25.** 55.1°F **26.** 23 **27.** $0.08\overline{3}$ **28.** $66\frac{2}{3}\%$ **29.** $I = Ctp$ **30.** 99%, $\frac{99}{100}$, 0.013, $\frac{13}{1000}$, 31.25%, 0.3125 **31.** $427.99; cerca de 30% **32.** $\frac{1}{5}$ **33. a.** 960 h **b.** 4320 min **c.** 480 seg **34.** 2.5 lb **35.** 2400 mm **36.** 0.32 kg **37. a.** 1 gal **b.** una regla **38.** la bolsa de 45 kg

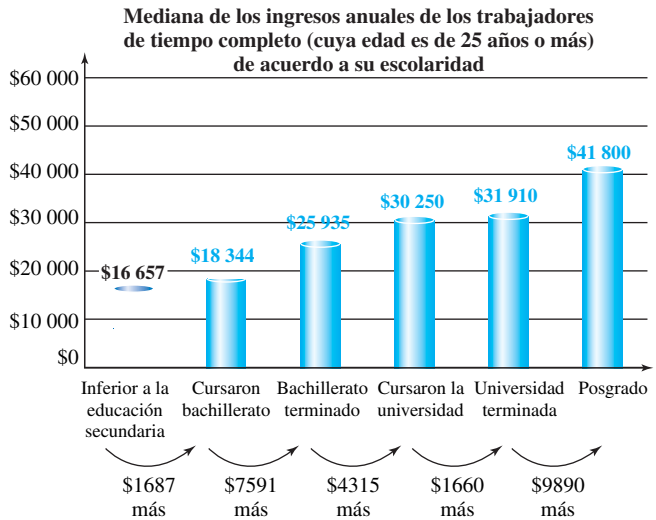
Capítulo 7 Verifique sus conocimientos (pág. 388)

1. barra **2.** pictograma **3.** frecuencia **4.** media **5.** mediana **6.** moda **7.** gráfica circular **8.** 4 **9.** 15 **10.** 20% **11.** O, AB **12.** histograma **13.** 3 **14.** 25 **15.** 40% **16.** 10 **17.** 20% **18.** 7 **19.** 7 **20.** 9 **21.** media **22.** media, mediana

Ejercicios de estudio Sección 7.1 (pág. 396)

1. a **3.** c **5.** d **7.** barras, igual **9.** $7.35 **11.** $4.01 **13.** $7895 **15.** $3110 **17.** energía nuclear **19.** 29% **21.** carbón **23.** 1980 **25.** 1970 **27.** 320 mil toneladas métricas **29.** manejo imprudente y no ceder el paso **31.** manejo imprudente **33.** adultos mayores **35.** $50 **37.** francés y alemán **39.** inglés **41.** 51.4% **43.** cerca de 11% **45.** cerca de 49% **47.** 175% **49.** $190 **51.** mineros **53.** mineros **55.** 1 **57.** 1 **59.** El corredor #1 estaba corriendo, el #2 se detuvo. **61.** 27 **63.** 90 **71.** −7 **73.** $\frac{25}{36}$ **75.** 11, 13, 17, 19, 23, 29 **77.** 4

Para pensar a detalle (pág. 405)



Fuente: U.S. Census Bureau, Junio 2004

Ejercicios de estudio Sección 7.2 (pág. 405)

1. media **3.** mediana **5.** el número de valores **7.** 8 **9.** 35 **11.** 19 **13.** 9 **15.** 6 **17.** 17.5 **19.** 3 **21.** ninguno **23.** 22.7 **25.** cerca de 63¢ **27.** 60¢ **29.** 50¢ **31.** cerca de 61° **33.** 64° **35.** 2670 mi **37.** 89 mi **39.** La mediana y la moda son 85. **41.** el mismo promedio (56); las calificaciones de la hermana son más consistentes **43.** 22.525 oz, 25 oz **45.** $4.15, $4.19, $4.29 **47.** ciudad: media 43, mediana 42, moda 42, autopista: media 48.8, mediana 49, moda 49 **49. a.** 5.5 **b.** 5.6 **c.** 5.6 **53.** 3^4 **55.** $\frac{1}{6}$ **57.** 6 **59.** $\frac{19}{10} = 1\frac{9}{10}$

Concepto clave (pág. 409)

1. 13.7 **3.** 15 **5.** 6 **7.** 6

Repaso del capítulo (pág. 411)

1. $-18°$ **2.** 30 mph **3.** cerca de 3.4 miles de millones **4.** 1997 y 1998 **5.** 1999 y 2000 **6.** 1996 y 1997 **7.** cerca de 830 millones **8.** cerca de 865 millones **9.** 1987 **10.** cerca de 1770 millones **11.** 180 **12.** 160 **13.** sí **14.** mediana **15.** 1.2 oz **16.** 1.138 oz **17.** 7.3 micrones, 7.2 micrones, 6.9 micrones **18.** \$1.45 miles de millones

Examen del capítulo 7 (pág. 415)

1. cerca de \$1659 **2.** cerca de \$11 **3.** cerca de 4.1% **4.** cerca de 1.2% **5.** cerca de 19% **6.** cerca de 6% **7.** cerca de 270 000 **8.** 1985 **9.** cerca de 7400 **10.** 65.5% **11.** A **12.** C **13.** E **14.** ciclista 1 **15.** 7.5 **16.** 7.5 **17.** 5 **18.** media **19.** 3.6, 3.6, 3.1 **20.** la mitad de las familias tienen más deuda y la otra mitad tienen una deuda inferior.

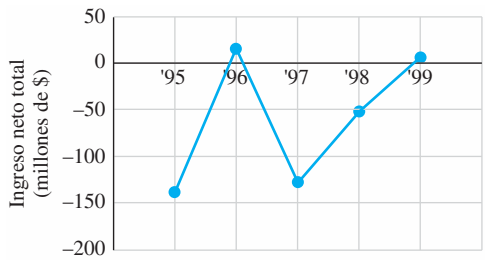
Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 417)

1. 358 600 000 gal **2.** 50 000 **3.** 54 604 **4.** 4209 **5.** 23 115 **6.** 87 **7.** $683 + 459 = 1142$ **8.** 2011 **9.** $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$ **10.** 10 912 pulg^2 **11. a.** 1, 2, 3, 6, 9, 18 **b.** $3^2 \cdot 2$ **12.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 **13.** Tiene factores diferentes de 1 y el mismo. Por ejemplo, $27 = 3 \cdot 9$. **14.** 22 **15.** 315 **16.** 6

17.

18. 5

19. falso **20.**



21. -20 **22.** 30 **23.** 125 **24.** 5 **25.** -5 **26.** 429 **27.** $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$; $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ **28.** 1100°F **29.** 800 **30.** 15% **31.** $\frac{5}{0}$; $\frac{0}{5}$; división entre 0 **32.** $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ **33.** $-\frac{1}{6}$ **34.** $6\frac{3}{4}$ pulg **35.** $\frac{8}{35}$ **36.** $\frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$ **37.** 220 **38.** 345 **39.** 0.744 **40.** 745 **41.** $0.\overline{72}$ **42.** 160 min **43.** 3.1 h **44.** 3.02, 3.005, 2.75

Capítulo 8 Verifique sus conocimientos (pág. 420)

1. igual, = **2.** variable, constante **3.** multiplicación **4.** fórmula **5.** expresión, expresiones, ecuaciones **6.** coeficiente, variable **7.** semejante **8.** 3 **9.** 2 **10.** 16 **11.** 48 **12.** 120 **13.** 140 **14.** 17 **15.** 18 **16.** 6 **17.** 45 mi **18.** $6x + 21$ **19.** $-6x + 9$ **20. a.** $3x$ **b.** $-x$ **21. a.** $3x$ **b.** $12ab$ **c.** $x + 1$ **22. a.** 6 **b.** 1 **c.** 10 **23. a.** $25q$ centavos o $\$0.25q$ **b.** $\$5f$ **24. a.** x^8 **b.** $6x^6$ **c.** $9x^2y^6$ **d.** x^{18}

Ejercicios de estudio Sección 8.1 (pág. 428)

1. igual, = **3.** lado derecho **5.** equivalente **7.** y, c **9.** suma de 6, reste 6 en ambos lados **13.** sí **15.** no **17.** sí **19.** sí **21.** sí **23.** sí **25.** no **27.** no **29.** no **31.** sí **33.** 10 **35.** 7 **37.** 3 **39.** 4 **41.** 13 **43.** 75 **45.** 740 **47.** 339 **49.** 3 **51.** 5 **53.** 9 **55.** 10 **57.** 1 **59.** 56 **61.** 84 **63.** 105 **65.** 4 **67.** 12 **69.** 0.8 **71.** 4.7 **73.** $\frac{1}{6}$ **75.** $\frac{11}{24}$ **79.** 94 683 948 **81.** 62 **83.** \$218 500 **85.** \$180 millones **87.** 25 unidades **89.** \$190 **97.** 325 780 **99.** 90 **101.** 3

Ejercicios de estudio Sección 8.2 (pág. 436)

1. división **3.** x **5.** $\frac{y}{z}$ **7.** Se va a multiplicar por 4. Divida entre 4. **9. a.** Reste 5 en ambos lados **b.** Reste 5 en ambos lados. **c.** Divida ambos lados entre 5. **d.** Multiplique los dos lados por 5 **11.** 3, 3, 4, 12, 4 **13.** 1 **15.** 96 **17.** 3 **19.** 6 **21.** 1 **23.** 2 **25.** 16 **27.** $\frac{2}{15}$ **29.** 14 **31.** 42 **33.** 75 **35.** 39 **37.** 50 **39.** 49 **41.** 10 **43.** 3 **45.** 2 **47.** 1 **49.** 40 **51.** 1200 **53.** 0.36 **55.** $\frac{1}{4}$ **59.** 390 ppm **61.** 14 **63.** 96 **65.** 32 llamadas **67.** 55 lb **73.** 48 cm **75.** $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ **77.** 72 **79.** 26 mpg

Para pensar a detalle (pág. 443)

Sugerido: 4, 6, 8, 10; expandido: 6, 9, 12, 15

Ejercicios de estudio Sección 8.3 (pág. 446)

1. fórmula **3.** sustituto **5.** $2 - 8 + 10$; es similar a una resta **7. a.** x = longitud parte 1; $x - 40$ = longitud parte 2; $x + 16$ = longitud parte 3 (las respuestas pueden variar) **b.** 20 pulg, y 76 pulg **9.** \$22, \$27, $\$(p + 2)$, $\$(10p + 2)$ **11.** 50 mi, 48 mi, $3t$ mi, 5 mi, $3x$ mi **13.** velocímetro: velocidad, odómetro: distancia, reloj, tiempo; $d = rt$ **15.** La razón se expresa en millas por hora, y el tiempo en minutos. **17. a.** $d = rt$ **b.** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ **c.** $d = 16t^2$ **19.** 17 **21.** 4 **23.** 40 **25.** -6 **27.** -6 **29.** 23 **31.** -8 **33.** 100 **35.** -28 **37.** 3 **39.** -3 **41.** -7 **43.** -18 **45.** 25 **47.** 21 **49.** -5 **51.** -29 **53.** -45 **55.** 70¢ **57.** \$8200 **59.** \$23 **61.** 300 mi **63.** $-10°$ C **65.** 240 m^2 **67.** 64 pies **69.** 5213, 5079, 4814, 2053, 2051, 1921, 3160, 3028, 2893 **71.** $D = B - C$; \$20, \$12, \$42 **73.** 5.2 yardas por acarreo **75.** 40 **77.** 4 **83.** 17, 37, 41 **85.** 7 **87.** divida entre 3 **89.** 3

Ejercicios de estudio Sección 8.4 (pág. 455)

1. distributiva, se eliminó **3.** equivalente **5.** $x(y + z) = xy + xz$ **7.** $(w + 7)5$ **9.** 5, 6, 6, 2, 3 **11.** $-y - 9$ **13.** -5 **15. a.** + **b.** − **c.** − **d.** + **17. a.** x **b.** $x + 5$ **c.** $5x - 10y - 15$ **d.** $5x$ **19.** $12x$ **21.** $-30y$ **23.** $100t$ **25.** $12s$ **27.** $14c$ **29.** $-40h$ **31.** $-42xy$ **33.** $16rs$ **35.** $30xy$ **37.** $-30br$ **39.** $80c$ **41.** $-8e$ **43.** $4x + 4$ **45.** $16 - 4x$ **47.** $-6e - 6$ **49.** $-16q + 48$ **51.** $12 + 20s$ **53.** $42 + 24d$ **55.** $-25r + 30$ **57.** $-24 - 18d$ **59.** $9x - 21y + 6$ **61.** $9z + 9x + 15y$ **63.** $-x - 3$ **65.** $-4t - 5$ **67.** $3w + 4$ **69.** $-5x + 4y - 1$ **71.** $2(4x + 5)$ **73.** $(-4 - 3x)5$ **75.** $-3(4y - 2)$ **77.** $3(4 - 7t - 5s)$ **83.** 5 **85.** multiplicación, división **87.** > **89.** alfombrado, pintura

Ejercicios de estudio Sección 8.5 (pág. 463)

1. término **3.** perímetro **5.** distributiva **7.** suma **9. a.** término **b.** factor **c.** factor **d.** factor **11. a.** 11 **b.** 8 **c.** -4 **d.** 1 **e.** -1 **f.** 102 **13.** 6, m; -75, t; 1, w; 4, bh **15.** Ayuda a identificar a los términos semejantes. **17.** $(2d + 15)$ mi **19. a.** Para sumar los términos semejantes, se suman 9 y 5 y se mantiene la variable. **21.** 7 **23.** 2, $5x$ **25. a.** el perímetro de un rectángulo **b.** dos veces la longitud **c.** dos veces la anchura **27.** $3x^2$, $5x$, 4 **29.** 5, $5t$, $-8t$, 4 **31.** 2 **33.** 5 **35.** $15t$ **37.** $4s$ **39.** x **41.** $4d$ **43.** $-4e$ **45.** no se puede simplificar **47.** $-6z$ **49.** $-7x$ **51.** 0 **53.** 0 **55.** $4x$ **57.** no se puede simplificar **59.** $-2y$ **61.** $3a$

63. $11t + 12$ **65.** $2w - 5$ **67.** $-7r + 11R$ **69.** $-50d$ **71.** $8x - 4y - 9$ **73.** $9x + 34$ **75.** $-22s + 23$ **77.** $19e - 21$ **79.** $2t + 8$ **81.** $3x + 8$ **83.** $10y - 32$ **85.** \$288 **87.** 36 pies, 48 pies, 60 pies, 72 pies, 84 pies **93.** 2 **95.** $2^2 \cdot 5^2$ **97.** valor absoluto

Para pensar a detalle (pág. 468)

1. $x + x + 2.5 = 43.1$; hombres: 22.8 años; mujer: 20.3 años. **2.** hombres: 26.9 años; mujer: 25.3 años

Ejercicios de estudio Sección 8.6 (pág. 470)

1. resolver **3.** distributiva **5.** combinar **7.** cuando sustituimos -5 por x el resultado es una afirmación falsa: $-10 = -9$. **9.** $5k$ **11. a.** $4x$ **b.** $2x$ **13. a.** $2t - 8$ **b.** -4 **c.** -16 **15.** $2x$, 2, 2, -10 **17.** 9, 45, 45, $5x$, 5, 5, 10 **19.** sí **21.** no **23.** 2 **25.** -14 **27.** -30 **29.** -28 **31.** 42 **33.** 37 **35.** 306 **37.** 735 **39.** 2 **41.** -14 **43.** -8 **45.** 5 **47.** -12 **49.** 4 **51.** 8 **53.** 10 **55.** 6 **57.** 0 **59.** -4 **61.** -10 **63.** 0 **65.** 1 **67.** 2 **69.** -11 **71.** 26 **73.** -3 **75.** 7 **77.** 3 **83.** -16 **85.** -3 **87.** 5 **89.** sí

Ejercicios de estudio Sección 8.7 (pág. 477)

1. base, exponente **3.** similar **5.** producto **7. a.** x^7 **b.** x^2y^3 **c.** $3^4a^2b^3$ **9.** $x^2 \cdot x^6 = x^8$ (las respuestas pueden variar) **11.** $(c^5)^2 = c^{10}$ (las respuestas pueden variar) **13. a.** x^{m+n} **b.** x^{mn} **c.** $x^n y^n$ **15. a.** 2 **b.** -10 **c.** x **17. a.** x^2; $2x$ **b.** x^3; $x + x^2$ **c.** x^4; $2x^2$ **19. a.** $4x^2$; $5x$ **b.** $12x^2$; $7x$ **c.** $12x^3$; $4x^2 + 3x$ **21.** 27 **27.** x^5 **29.** x^{10} **31.** f^{13} **33.** n^{32} **35.** l^{10} **37.** x^{11} **39.** 2^{12} **41.** 5^8 **43.** $8x^3$ **45.** $5t^{10}$ **47.** $-24x^5$ **49.** $-x^4$ **51.** $36y^8$ **53.** $-40t^{10}$ **55.** x^3y^3 **57.** b^8c^8 **59.** x^5y^2 **61.** a^4b^4 **63.** x^5y^7 **65.** $18x^3y^4$ **67.** $16x^4y^2$ **69.** $-24f^6t^4$ **71.** a^4b^3 **73.** $12x^4y^3$ **75.** x^8 **77.** m^{500} **79.** $8a^3$ **81.** x^4y^4 **83.** $27s^6$ **85.** $4s^4t^6$ **87.** x^{14} **89.** c^{30} **91.** $36a^{14}$ **93.** $216a^{15}$ **95.** x^{60} **97.** $32b^{25}$ **103.** $\frac{3}{4}$ **105.** 5 **107.** 7 **109.** 12

Concepto clave (pág. 479)

1. Hacemos que $x =$ el costo total de rentar la camioneta **3.** Hacemos que $x =$ la anchura del campo **5.** Hacemos que $x =$ la distancia que viajó el operador **7.** $a + b = b + a$ **9.** $\frac{b}{1} = b$ **11.** $n - 1 < n$ **13.** $(r + s) + t = r + (s + t)$

Repaso del capítulo (pág. 481)

1. no **2.** sí **3.** y **4.** t **5.** 9 **6.** 31 **7.** 340 **8.** 133 **9.** 9 **10.** 14 **11.** 120 **12.** 5 **13.** \$97 250 **14.** 185 **15.** 4 **16.** 3 **17.** 21 **18.** 14 **19.** 21 **20.** 36 **21.** 315 **22.** 425 **23.** 6 pies **24.** \$128 **25.** $h =$ altura de la pared, longitud de la base superior $= h - 5$, longitud de la base inferior $= 2h - 3$ **26.** 5 pies, 17 pies **27.** 12 **28.** -8 **29.** 100 **30.** -4 **31.** 130 mi, 114 mi, $6x$ mi, $55t$ mi **32.** \$278 **33.** \$15 230 **34.** 2002 **35.** 2004 **36.** Disminuyen **37.** La alberca está más caliente por 2° C. **38.** 144 pies **39.** $-10x$ **40.** $42xy$ **41.** $60de$ **42.** $32s$ **43.** $2e$ **44.** $49xy$ **45.** $84k$ **46.** $100t$ **47.** $4y + 20$ **48.** $-30t - 45$ **49.** $-21 - 21x$ **50.** $-12e + 24x + 3$ **51.** $-6t + 4$ **52.** $-5 - x$ **53.** $-6t + 3s - 1$ **54.** $5a + 3$ **55.** $-4x$, 8 **56.** $-3y$, 1 **57.** factor **58.** término **59.** factor **60.** término **61.** sí **62.** no **63.** sí **64.** no **65.** $7x$ **66.** $-3r$ **67.** $-9t$ **68.** $-3z$ **69.** $5x$ **70.** $-12y$ **71.** $w - 5$ **72.** $-6x + 2y$ **73.** $-46d + 2a$ **74.** $10y + 15h - 1$ **75.** $13y + 48$ **76.** $-5t + 22$ **77.** $3x + 12$ **78.** $-50f + 84$ **79.** 194 pies **80.** sí **81.** -4 **82.** -18 **83.** -3 **84.** 15 **85.** 4 **86.** 85 **87.** -3 **88.** -2 **90. a.** $4h \cdot 4h \cdot 4h$ **b.** $5^2d^3m^4$ **91.** h^{10} **92.** t^8 **93.** w^7 **94.** 4^{12} **95.** $8b^7$ **96.** $-24x^4$ **97.** $24f^7$ **98.** $-a^2b^2$ **99.** x^2y^6 **100.** m^2n^2 **101.** $27m^3z^7$ **102.** $-20c^3d^6$ **103.** v^{12} **104.** $27y^3$ **105.** $25t^8$ **106.** $8a^{12}b^{15}$ **107.** c^{26} **108.** $108s^{12}$ **109.** c^{14} **110.** $8x^9$

Examen del capítulo 8 (pág. 487)

1. 4 **2.** 30 **3.** 11 **4.** 81 **5.** 200 **6.** 24 **7.** 3100 **8.** 194 años **9.** -3 **10.** 165 mi **11.** $25x + 5$ **12.** $-42 + 6x$ **13.** $-6y - 4$ **14.** $6a + 9b - 21$ **15. a.** factor **b.** término **16. a.** $-28y + 10x$ **b.** $-3t$ **17.** $8x^2$, $-4x$, -6 **18. a.** $11x$ **b.** $24ce$ **c.** $5x$ **d.** $30y$ **19.** $-6y - 3$ **20.** 2 **21.** -9 **22.** -3 **23.** 1 **24. a.** $10k¢$ **b.** $\$20(p + 2)$ **25. a.** h^6 **b.** $-28x^5$ **c.** b^8 **d.** $24g^5k^{13}$ **26. a.** f^{15} **b.** $4a^4b^2$ **c.** x^{15} **d.** x^{15}

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 489)

1. 7 535 700 **2.** 7 540 000 **3.** 9137 **4.** 3322 **5.** 245 870 **6.** 875 **7.** 260 pies **8.** 4000 pies^2 **9.** $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ **10.** $3^2 \cdot 5^2$ **11.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **12.** $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ **13.** 18 **14.** -11 **15.** 1 **16.** -10 **17.** $\frac{1}{7}$ **18.** $\frac{2}{5}$ **19.** $\frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$ **20.** $\frac{1}{4}$ **21.** 7 **22.** 14 **23.** -52 **24.** -2 **25.** $-15x$ **26.** $28x^2$ **27.** $-6x + 8$ **28.** $-15x + 10y - 20$ **29.** $5x$ **30.** $7a^2$ **31.** $-x - y$ **32.** $-4x + 8$ **33.** -5 **34.** -5 **35.** -16 **36.** -60 **37.** 4 **38.** 4 **39.** 21 **40.** 21 pies por 84 pies **41.** p^8 **42.** $-15t^9$ **43.** $-x^5y^7$ **44.** $81a^8$ **45.** $-n^6$ **46.** $9x^6y^2$ **47.** $108p^{12}$ **48.** $-8x^9$

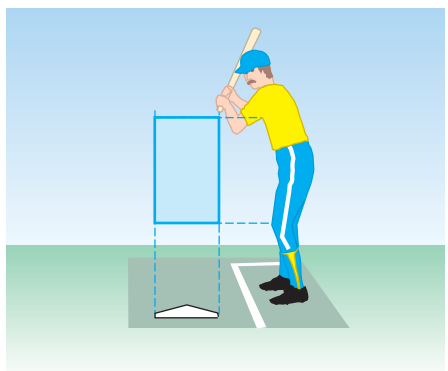
Capítulo 9 Verifique sus conocimientos (pág. 492)

1. paralelo, perpendicular **2.** cuadrilátero, triángulo **3.** derecha, hipotenusa **4.** congruente, similar **5.** perímetro, área **6.** radio, circunferencia, diámetro **7.** volumen **8. a.** III **b.** I **c.** IV **d.** II **9.** B **10.** 14° **11.** 36 **12.** 61° **13. a.** 50° **b.** 130° **c.** 130° **d.** 50° **e.** 75 **14.** 80° **15. a.** 13 pies **b.** 60 pies^2 **16.** 17.55 pulg^2 **17.** 28π pies$^2 \approx$ 78.5 pies^2 **18.** $10\frac{2}{3}\pi$ pies$^3 \approx$ 33.5 pies^3 **19.** 200 pies^3 **20.** 160π pies$^3 \approx$ 502.7 pies^3

Ejercicios de estudio Sección 9.1 (pág. 499)

1. segmento **3.** punto medio **5.** protractor **7.** derecha **9.** 180° **11.** suplementario **13.** verdadero **15.** falso **17.** verdadero **19.** verdadero **21.** agudo **23.** obtuso **25.** derecha **27.** recto **29.** verdadero **31.** falso **33.** sí **35.** sí **37.** no **39.** verdadero **41.** verdadero **43.** verdadero **45.** verdadero **47.** ángulo **49.** rayo **51.** 3 **53.** 3 **55.** 1 **57.** B **59.** 40° **61.** 135° **63.** 10 **65.** 27.5 **67.** 30 **69.** 25 **71.** 60° **73.** 75° **75.** 130° **77.** 230° **79.** 100° **81.** 40°

83.



85. 65 115 **87.** 30° **95.** 16

97. $\frac{7}{24}$ **99.** 6 **101.** 5

Ejercicios de estudio Sección 9.2 (pág. 507)

1. coplanar **3.** perpendicular **5.** alterno **7.** $\angle 4$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 5$ **9.** $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ **11.** Son paralelos **13.** un ángulo recto **15.** es perpendicular a **17.** $m(\angle 1) = 130°$, $m(\angle 2) = 50°$, $m(\angle 3) = 50°$, $m(\angle 5) = 130°$, $m(\angle 6) = 50°$, $m(\angle 7) = 50°$, $m(\angle 8) = 130°$ **19.** $m(\angle A) = 50°$, $m(\angle 1) = 85°$, $m(\angle 2) = 45°$, $m(\angle 3) = 135°$ **21.** 10 **23.** 30 **25.** 40 **27.** 12 **29.** Si las piedras están a nivel, la plomada debe pasar por el punto medio del travesaño del marco en forma de A. **41.** 72 **43.** 45% **45.** sí **47.** $\frac{1}{3}$

Ejercicios de estudio Sección 9.3 (pág. 514)

1. regular **3.** hexágono **5.** octágono **7.** equilátero **9.** hipotenusa **11.** paralelogramo **13.** rombo **15.** isósceles **17.** 4, cuadrilátero, 4 **19.** 3, triángulo, 3 **21.** 5, pentágono, 5 **23.** 6, hexágono, 6 **25.** triángulo escaleno **27.** triángulo recto **29.** triángulo equilátero **31.** triángulo isósceles **33.** cuadrado, rombo, rectángulo **35.** rombo **37.** rectángulo **39.** trapezoide **41.** triángulo **43.** 90° **45.** 45° **47.** 90.7° **49.** 30° **51.** 60° **53.** 720° **55.** 1,440° **57.** 7 lados **59.** 14 lados **65. b.** octágono **c.** triángulo **d.** pentágono **67.** pentágono, hexágono **73.** 22 **75.** 40% **77.** 0.10625

Ejercicios de estudio Sección 9.4 (pág. 522)

1. congruente **3.** similar **5.** cierto **7.** falso **9.** cierto **11.** sí **13.** sí **15.** a y b representan las longitudes de las piernas; c representa la longitud de la hipotenusa. **17.** 25, raíz cuadrada c, 5 **19.** es congruente con **21.** $\overline{DF}$, $\overline{AB}$, $\overline{EF}$, $\angle D$, $\angle B$, $\angle C$ **23.** sí, SSS **25.** no necesariamente **27.** sí, SSS **29.** sí, SAS **31.** 6 mm **33.** 50° **35.** sí **37.** 5 **39.** 8 **41.** $\sqrt{56}$ **43.** sí **45.** no **47.** 36 pies **49.** 59.2 pies **51.** 4000 pies **53.** 12 pies **55.** 25 pulg **57.** 127.3 pies **61.** $1\frac{1}{3}$ **63.** 20 **65.** 9

Ejercicios de estudio 9.5 (pág. 534)

1. perímetro **3.** área **5.** cuadrado **7.** longitud 15 pulg y anchura 5 pulg, longitud 16 pulg y anchura 4 pulg (las respuestas pueden variar) **9.** lados cuya longitud es 5 m **11.** la base es de 5 yd y la altura de 3 yd (las respuestas pueden variar) **13.** longitud 5 pies y anchura 4 pies, longitud 20 pies y anchura 3 pies (las respuestas pueden variar) **15.** $4s$ **17.** pulgadas cuadradas **19.** s^2 **21.** triángulo **23.** 32 pulg **25.** 36 m **27.** 37 cm **29.** 85 cm **31.** $28\frac{1}{3}$ pies **33.** 16 cm^2 **35.** 60 cm^2 **37.** 25 $pulg^2$ **39.** 169 mm^2 **41.** 80 m^2 **43.** 75 yd^2 **45.** 75 m^2 **47.** 144 **49.** \$4875 **51.** 81 **53.** linóleo **55.** \$1200 **57.** \$361.20 **59.** \$192 **61.** 111 825 mi^2 **63.** 51 **65.** punto ciego 1: $l = 20$ pies, $w = 10$ pies, 200 $pies^2$; punto ciego 2: $b_1 = 20$ pies, $b_2 = 16$ pies, $h = 10$ pies, 180 $pies^2$; punto ciego 3: $b = 28$ pies, $h = 28$ pies, 392 $pies^2$ **69.** $1\frac{5}{12}$ **71.** $6\frac{1}{12}$ **73.** $1\frac{7}{18}$

Ejercicios de estudio Sección 9.6 (pág. 543)

1. radio **3.** diámetro **5.** menor **7.** circunferencia **9.** $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, y $\overline{OB}$ **11.** $\overline{DA}$, $\overline{DC}$ y $\overline{AC}$ **13.** $\overset{\frown}{ABC}$ y $\overset{\frown}{ADC}$ **15.** Se duplica el radio. **17. a.** 1 pulg **b.** 2 pulg **c.** 2π pulg ≈ 6.28 pulg **d.** π $pulg^2 \approx 3.14$ $pulg^2$ **19.** elevar 6 al cuadrado. **21.** arco AB **23.** πD, r **25.** π **27.** 8π **29.** 37.70 pulg **31.** 36 m **33.** 25.42 pies **35.** 31.42 m **37.** $A = 28.3$ $pulg^2$ **39.** 88.3 $pulg^2$ **41.** 128.5 cm^2 **43.** 27.4 $pulg^2$ **45.** 66.7 $pulg^2$ **47.** 3.14 mi^2 **49.** 32.66 pies **51.** 12.73 veces **53.** 1.59 pies **55.** 12.57 $pies^2$; 0.79 $pies^2$; 6.28% **63.** 90% **65.** 5.375¢ por onza **67.** cinco

Ejercicios de estudio Sección 9.7 (pág. 554)

1. volumen **3.** cubo **5.** superficie **7.** cilindro **9.** cono **11.** $V = lwh$ **13.** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ **15.** $V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ **17.** $SA = 2lw + 2lh + 2hw$ **19.** 27 $pies^3$ **21.** 1000 dm^3 **23. a.** volumen **b.** área **c.** volumen **d.** área superficial **e.** perímetro **f.** área superficial **25. a.** 72 $pulg^3$ **b.** 18 $pulg^2$ **c.** 24 $pulg^2$ **27.** pies cúbicos **29.** 60 cm^3 **31.** 48 m^3 **33.** 3 053.63 $pulg^3$ **35.** 1 357.17 m^3 **37.** 314.16 cm^3 **39.** 400 m^3 **41.** 94 cm^2 **43.** 1 256.64 $pulg^2$ **45.** 576 cm^3 **47.** 335.10 $pulg^3$ **49.** $\frac{1}{8}$ $pulg^3 = 0.125$ $pulg^3$ **51.** 2.125 **53.** 197.92 $pies^3$ **55.** 33 510.32 $pies^3$ **57.** 8 : 1 **63.** -42 **65.** -1 **67.** $\frac{1}{5}$ **69.** 2400 mm

Concepto clave (pág. 557)

1. $d = rt$ **3.** $P = 2l + 2w$ **5.** 210 000 $pies^2$ **7.** \$80.50 **9.** 144 pies **11.** \$750, \$45, \$6250

Repaso del capítulo (pág. 559)

1. puntos C y D, línea CD, plano GHI **2.** 5 unidades **3.** $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle B$, $\angle 1$ **4.** 48° **5.** $\angle 1$ y $\angle 2$ son agudos, $\angle ABD$ y $\angle CBD$ son los ángulos rectos, $\angle CBE$ es obtuso, y $\angle ABC$ es un ángulo recto. **6.** ángulo obtuso **7.** ángulo recto **8.** ángulo recto **9.** ángulo agudo **10.** 15 **11.** 150 **12. a.** 65° **b.** 115° **13.** 40° **14.** 40° **15.** no **16.** parte a **17.** $\angle 4$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 5$ **18.** $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 7$ **19.** $\angle 1$ y $\angle 3$, $\angle 2$ y $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 7$, $\angle 6$ y $\angle 8$ **20.** $m(\angle 1) = 70°$, $m(\angle 2) = 110°$, $m(\angle 3) = 70°$, $m(\angle 4) = 110°$, $m(\angle 5) = 70°$, $m(\angle 6) = 110°$, $m(\angle 7) = 70°$ **21.** $m(\angle 1) = 60°$, $m(\angle 2) = 120°$, $m(\angle 3) = 130°$, $m(\angle 4) = 50°$ **22.** 40 **23.** 20 **24.** octágono **25.** pentágono **26.** triángulo **27.** hexágono **28.** cuadrilátero **29.** 3 **30.** 4 **31.** 8 **32.** 6 **33.** isósceles **34.** escaleno **35.** equilátero **36.** triángulo recto **37.** sí **38.** no **39.** 90 **40.** 50 **41.** 50° **42.** es equilátero **43.** trapezoide **44.** cuadrado **45.** paralelogramo **46.** rectángulo **47.** rombo **48.** rectángulo **49.** 15 cm **50.** 40° **51.** 100° **52.** cierto **53.** falso **54.** cierto **55.** cierto **56.** 65° **57.** 115° **58.** 360° **59.** 720° **60.** $\angle D$ **61.** $\angle E$ **62.** $\angle F$ **63.** $\overline{DF}$ **64.** $\overline{DE}$ **65.** $\overline{EF}$ **66.** congruente, SSS **67.** congruente, SAS **68.** congruente, ASA **69.** no necesariamente es congruente **70.** sí **71.** sí **72.** 21 pies **73.** 13 **74.** 15 **75.** 31.3 pulg **76.** 72 pulg **77.** 9 m **78.** 30 m **79.** 36 m **80.** 9.61 cm^2 **81.** 7500 $pies^2$ **82.** 450 $pies^2$ **83.** 200 $pulg^2$ **84.** 120 cm^2 **85.** 232 $pies^2$ **86.** 152 $pies^2$ **87.** 120 m^2 **88.** 9 $pies^2$ **89.** 144 $pulg^2$ **90.** $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ **91.** $\overline{AB}$ **92.** $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OB}$ **93.** O **94.** 66.0 cm **95.** 45.1 cm **96.** 254.5 $pulg^2$ **97.** 130.3 cm^2 **98.** 125 cm^3 **99.** 480 m^3 **100.** 600 $pulg^3$ **101.** 3 619 $pulg^3$ **102.** 1518 $pies^3$ **103.** 785 $pulg^3$ **104.** 9 020 833 $pies^3$ **105.** 35 343 $pies^3$ **106.** 1728 $pulg^3$ **107.** 54 $pies^3$ **108.** 61.8 $pies^2$ **109.** 314.2 $pulg^2$

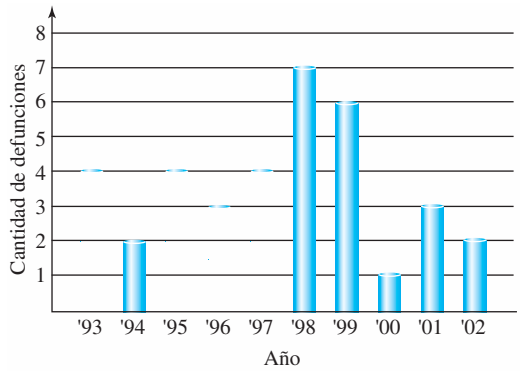
Repaso del capítulo (pág. 569)

1. 4 unidades **2.** B **3.** cierto **4.** falso **5.** falso **6.** cierto **7.** 50 **8.** 140 **9.** 12 **10.** 45 **11.** 23° **12.** 63° **13.** 70° **14.** 110° **15.** 70° **16.** 40 **17.** 3, 4, 6, 5, 8 **18.** triángulo equilátero, triángulo escaleno, triángulo isósceles **19.** 57° **20.** 66° **21.** 30° **22.** 1440° **23.** $m(\overline{AB}) = m(\overline{DC})$, $m(\overline{AD}) = m(\overline{BC})$, y $m(\overline{AC}) = m(\overline{BD})$ **24.** 130° **25.** 8 in. **26.** 50° **27.** 6

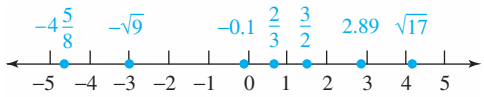
28. 12 **29.** 127.3 pies **30.** 391.6 cm^2 **31.** 83.7 $pies^2$
32. 94.2 pies **33.** 28.3 $pies^2$ **34.** 159.3 m^3 **35.** 268.1 m^3
36. 66.7 $pies^3$ **38.** El área superficial es 6 veces el área de una de las caras del cubo.

Ejercicios acumulativos de repaso (pág. 571)

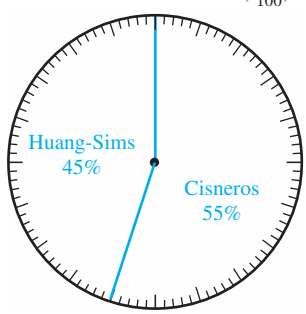
1.



2. $8995 **3.** 11,022 **4.** 33 **5.** 2 110 000 **6.** $11 \cdot 5 \cdot 2^2$
7. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 **8.** $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **9.** 13
10. -10 **11.** 3 **12.** 5 **13.** Una ecuación incluye el signo $=$, una expresión no lo contiene. **14.** $-12x + 8$ **15.** 89 **16.** -10
17. -11 **18.** 5 **19.** 6.5 pulg/min **20.** $50x¢$ **21.** $7^2 - 2^3$
22. $6\frac{2}{3}$ b.f. **23.** $\frac{5}{4}$ **24.** $142\frac{7}{15}$ **25.** $\frac{3}{20}$ **26.** $13\frac{3}{4}$ tazas **27.** $-\frac{11}{20}$
28. $\frac{1}{3}$ **29.** $\frac{8}{9}$ **30.** $\frac{15}{2}$ **31.** $\frac{3}{32}$ onzas fluidas **32.** $\frac{8}{9}$ **33.** $1\frac{9}{29}$
34. 18 oz. **35.** **a.** 1998; cerca de 0.6° F **b.** 1986; cerca de -0.4° F
36.



37. 3.1416 **38.** $>$ **39.** 145.188 **40.** 17.05 **41.** 89 970.8
42. 0.053 **43.** -25.6 **44.** 22.3125 **45.** $0.1\overline{3}$ **46.** -9.32
47. 97 **48.** 10 **49.** -2 **50.** $\frac{7}{9}$ **51.** 0.86 oz, 0.855 oz, 0.85 oz
52. **a.** $-3, 2, 9$ **b.** $3, 2, -9$ **53.** s^9 **54.** a^{35}
55. $15h^{10}$ **56.** $8b^9c^{18}$ **57.** y^{22} **58.** x^{m+n} **59.** 93%, 7%
60. 67.5 **61.** 120 **62.** 0.57, $\frac{57}{100}$, 0.1%, $\frac{1}{1000}$, $33\frac{1}{3}$%, $0.\overline{3}$
63.



64. $75 **65.** $1 159.38
66. 500% **67.** $1 522.50 **68.** $269 390.92 **69.** $\frac{3}{7}$ **70.** $\frac{1}{4}$
71. el pizarrón más pequeño **72.** $6\frac{1}{2}$ **73.** 125 000 **74.** 75 pies
75. 14 **76.** 540 **77.** 13.25 **78.** 120 **79.** 200 **80.** 12.3
81. 65.4 **82.** 0.5 **83.** 58.9 **84.** 167° **85.** 240 km
86. entre 5700 y 5800 cg **87.** **a.** cerca de 4 m/gal **b.** 11 355 000 L **88.** cerca de 4.5 kg **89.** 90 **90.** más de 0 pero menos de 90 **91.** 75° **92.** 15° **93.** 50° **94.** 50°
95. 130° **96.** 50° **97.** 75° **98.** 30° **99.** 105° **100.** 105°
101. 46, 134 **102.** 540° **103.** 13 m **104.** 42 m, 108 m^2
105. 126 $pies^2$ **106.** 91 $pulg^2$ **107.** 43.98 cm, 153.94 cm^2
108. 98.31 yd^2 **109.** 210 m^3 **110.** 523.60 $pulg^3$ **111.** 150.80 m^3
112. 3.93 $pies^3$ **113.** 2124 $pulg^2$

Ejercicios de estudio Sección I.1 (pág. A-3)

1. monomio **3.** binomio **5.** binomio **7.** monomio
9. monomio **11.** trinomio **13.** 3 **15.** 2 **17.** 1 **19.** 7
23. 13 **25.** 6 **27.** 31 **29.** 4 **31.** 1 **33.** 0 pies **35.** 64 pies
37. 63 pies **39.** 198 pies **43.** 2 **45.** $\frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$ **47.** $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
49. 16 **51.** 6

Ejercicios de estudio Sección I.2 (pág. A-8)

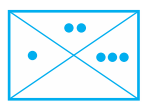
1. similar **3.** coeficientes, variable **5.** sí, $7y$ **7.** no **9.** sí, $13x^3$ **11.** sí, $15x^2$ **13.** $2x^2, 7x, 5x^2$ **15.** $9y$ **17.** $-12t^2$
19. $14s^2$ **21.** $7x + 4$ **23.** $7x^2 - 7$ **25.** $12x^3 - 14.9x$
27. $8x^2 + 2x - 21$ **29.** $8y^2 + 4y - 2$ **31.** $6x^2 + x - 5$
33. $2n^2 + 5$ **35.** $5x^2 + x + 11$ **37.** $-7x^2 - 5x - 1$
39. $2x^2 + x + 12.9$ **41.** $16u^3$ **43.** $7x^5$ **45.** $1.6a + 8$
47. $-19x^2 - 5$ **49.** $7x^2 - 2x - 5$ **51.** $1.7y^2 + 3.1y - 9$
53. $7b + 4$ **55.** $p^2 - 2p$ **57.** $5x^2 + 6x - 8$
59. $-12x^2 - 13x + 36$ **61.** $-x^3 + x + 14$ **63.** $92 000
65. $112 800 **67.** $211 000 **69.** $y = -800x + 8500$
71. $y = -1900x + 18 700$ **77.** 0.8 oz **79.** 54 pies

Ejercicios de estudio Sección I.3 (pág. A-13)

1. monomio **3.** 3 **5.** numérico, factor **7.** término, semejante
9. $2x, 5$ **11.** $12x^5$ **13.** $-6b^3$ **15.** $-6x^5$ **17.** $-\frac{1}{2}y^7$
19. $3x + 12$ **21.** $-4t - 28$ **23.** $3x^2 - 6x$ **25.** $-6x^4 + 2x^3$
27. $6x^3 + 8x^2 - 14x$ **29.** $-2p^3 + 3p^2 - 2p$
31. $3q^4 - 6q^3 + 21q^2$ **33.** $a^2 + 9a + 20$ **35.** $3x^2 + 10x - 8$
37. $6a^2 + 2a - 20$ **39.** $4x^2 + 12x + 9$ **41.** $4x^2 - 12x + 9$
43. $25t^2 + 10t + 1$ **45.** $6x^3 - x^2 + 1$ **47.** $x^3 - 1$
49. $x^3 - x^2 - 5x + 2$ **51.** $4x^2 + 11x + 6$ **53.** $12x^2 + 14x - 10$
55. $x^3 + 1$ **57.** $(x^2 - 4)$ $pies^2$ **59.** $R = -\frac{x^2}{100} + 30x$
65. cuatro, y noventa y un milésimas **67.** 0.109375
69. 134.657 **71.** 10

Ejercicios de estudio Apéndice II (pág. A-19)

1. inductivo **3.** circular **5.** alternativo **7.** alternativo
9. 10 A.M. **11.** 17 **13.** -17 **15.** 6 **17.** 3 **19.** -11 **21.** 9
23.



25.

27. I **29.** m **31.** María
33. el Mercedes **35.** verde, azul, amarillo, rojo **37.** 18 935
39. 0

ÍNDICE

A

Agrupación de símbolos, 59
Al-Khowarazmi, 422
Altitud, 530
Ángulo del vértice, 511
Ángulo(s), 495
  adyacente, 497
  agudo, 496
  alterno interno, 504
  complementario, 498
  correspondiente, 504
  de un polígono, 514
  de un triángulo, 511
  interior, 504
  lados de, 495
  llano, 496
  obtuso, 496
  opuesto, 497
  recto, 496
  suplementario, 498
  vértice de, 495
Ángulos adyacentes, 497
Ángulos agudos, 496
Ángulos alternos internos, 504
Ángulos complementarios, 498
Ángulos correspondientes, 504
Ángulos de la base, 511
Ángulos interiores, 504
Ángulos obtusos, 496
Ángulos opuestos, 497
  propiedad de los, 498
Ángulos rectos, 496
Ángulos suplementarios, 498
Arco mayor, 539
Arco menor, 539
Área, 528
  de un círculo, 542
  de un cuadrado, 529
  de un paralelogramo, 529
  de un rectángulo, 35, 529
  de un trapezoide, 530
  de un triángulo, 530
Área superficial, 549
  de un sólido rectangular, 549
  de una esfera, 551
Axiomas, A-17

B

Base, 290
  de un exponente, 52
  de un triángulo, 511
Binomial, A-1

C

Cantidad, 290
Catetos de un triángulo rectángulo, 511
Centímetros cúbicos, 365
Centro de un círculo, 539
Cilindro, 551
  volumen, 547
Círculo(s), 539
  área, 542
  arco mayor, 539
  arco menor, 539
  centro, 539
  circunferencia, 540
  cuerda, 539
  diámetro, 539
  radio, 539
Círculos concéntricos, 545
Circunferencia, 540
Cociente, 39
Coeficiente, 458
Coeficiente numérico, 458
Comisión, 300
Comparación de fracciones, 169
Concepto clave
  El MCM y el MCD, 173
  Estimación, 249, 307
  Fórmulas, 557
  La propiedad fundamental de las fracciones, 201
  Los números reales, 266
  Media, mediana y moda, 409
  Números con signo, 126
  Orden de las operaciones, 66
  Porcentaje, 317
  Proporciones, 376
  Variables, 479
Congruente, 495
Conjunto(s), 4
  de números enteros, 4
  elementos de un, 4
  miembros de un, 4
Conos, 553
  volumen, 547
Constante, 458
Construcción de fracciones, 144
Conversión de grados Fahrenheit a grados Celsius, 445
Cuadrado(s), 18, 260, 512
  área de un, 529
  perfecto, 262
  perímetro de un, 18, 256
Cuadrados perfectos, 262
Cuadrilátero(s), 512
Cubo, 546
  volumen, 547
Cuerda, 539

D

Decimal periódico, 252
Decimal que termina, 252
Decimal(es), 216
  cambio a porcentaje, 283
  comparación, 219
  división entre un decimal divisor, 243
  lectura, 218
  multiplicación, 233
  que no termina, 263
  redondeo, 220
  resta, 227, 228
  suma, 226, 228
Decimales que no terminan, 263
Denominador, 58
Denominador común, 163
Descuento, 303
Diámetro, 539
Diferencia, 22, 98
Dígito a redondear, 7
Dígito de prueba, 7
Dígito(s)
  de prueba, 7
  redondeo, 7
Distancia a que cae un objeto, 446
Distancia recorrida, 444
Dividendo, 39
División
  con cero, 41, 116
  propiedades, 41
División corta, 41
División larga, 42
Divisor, 39
  de decimales entre números enteros, 242
  enteros, 115
  entre un decimal divisor, 243
  entre una potencia de 10, 245
  fracciones, 158
  números mixtos, 178

E

Ecuación del porcentaje, 289
Ecuación(es), 289, 422
  lado derecho, 422
  lado izquierdo, 422
  porcentaje, 289
  raíces de, 422
  resolución de, 423
  soluciones de, 422
Ecuaciones equivalentes, 424
Elementos de un conjunto, 4
Énfasis en el trabajo de equipo
  Capítulo 1, 67
  Capítulo 2, 127
  Capítulo 3, 202
  Capítulo 4, 267
  Capítulo 5, 318
  Capítulo 6, 377
  Capítulo 7, 410
  Capítulo 8, 480
  Capítulo 9, 558
Entero(s), 79
  división, 115
  multiplicación, 106, 107, 108
  resta, 99
  suma, 89, 91
Eratóstenes, 517
Escala de dibujo, 343
Esfera, 550
  área superficial de una, 551
  volumen de una, 548
Estimación, 17
Estrategia(s)
  para encontrar el porcentaje de incremento o decremento, 301
  para escribir un número mixto como una fracción impropia, 176
  para escribir una fracción impropia como un número mixto, 177
  para hallar el MCD, 167
  para resolver ecuaciones, 469
  para resolver problemas, 426
Evaluación
  de un polinomio, A-3
  de fórmulas, 193

expresiones algebraicas, 441
Exponente(s), 52, 472
base de, 52
regla de las potencias para, 475
regla de las potencias para productos, 476
regla del producto para, 473
Expresión exponencial, 52
Expresiones algebraicas, 440
evaluación, 441
simplificación, 451
Expresiones equivalentes, 451
Expresiones radicales, 261
Extremos de una proporción, 339

F

Factor común, 174
Factor de conversión de unidades, 350
Factores, 29, 49, 459
Factorización en primos, 51
Fórmula de interés compuesto, 313
Fórmula del interés simple, 310
Fórmula del porcentaje, 290
Fórmula(s), 442
área de un círculo, 542
área de un cuadrado, 529
área de un paralelogramo, 529
área de un rectángulo, 35, 529
área de un trapezoide, 530
área de un triángulo, 530
área superficial de un sólido rectangular, 549
área superficial de una esfera, 551
circunferencia de un círculo, 542
conversión de temperaturas, 372
conversión de grados Fahrenheit a grados Celsius, 445
distancia a que cae un objeto, 446
distancia recorrida, 444
evaluación, 193
ganancia, 444
interés compuesto, 313
perímetro de un rectángulo, 462, 527
perímetro de un cuadrado, 462, 526
precio al por menor, 443
precio de venta, 303, 443
precio total, 299
volumen de un cono, 547
volumen de un cubo, 547
volumen de un cilindro, 547
volumen de un prisma, 548
volumen de una pirámide, 548
volumen de un sólido rectangular, 547
volumen de una esfera, 548
Fracción impropia, 140
Fracción propia, 140
Fracción(es)
cambio a un porcentaje, 284
comparación, 169
complejas, 194
construcción de, 144
división, 158
en términos inferiores, 142
escritura como un decimal, 252
mínimo denominador común (MDC), 165
multiplicación, 149
potencias de, 150
reducción, 142
resta con denominadores distintos, 165
resta con el mismo denominador, 163
simplificación, 142
suma con denominadores distintos, 165
suma con el mismo denominador, 163
Fracciones complejas, 194
simplificación, 195
Fracciones equivalentes, 141

G

Ganancia, 444
Grado, 496
de un polinomio, A-2
Grados Celsius, 371
Grados Fahrenheit, 371
Gráfica de barras, 10, 390
Gráfica de líneas, 10, 393
Gráfica(s)
graficos de pay, 293
pictográficas, 392
Graficación, 6
Gráficas circulares, 293
Gráficas de pay, 293
Gramo, 361

H

Hipotenusa, 51
Histogramas, 395

I

Identidad aditiva, 94
Igualdad
Propiedad de la división, 431
Propiedad de la multiplicación, 432
Propiedad de la resta, 424
Propiedad de la suma, 424
Ihm aljabr wa'l muqabalah, 422
Incógnita, 422
Interés, 310
Interés compuesto, 310, 311
Interés simple, 310
Inverso aditivo, 94

L

Litro, 363

M

Mago de Oz, 520
Masa, 361
Máximo común divisor (MCD), 174
Media, 401
Media aritmética, 61
Mediana, 403
Medios de una proporción, 339
Mínimo común denominador (MCD), 165
Mínimo común múltiplo (MCM), 173
Minuendo, 22
Moda, 404
Monomio, A-1
Multiplicación
binomios por binomios, A-11
decimales, 233
enteros, 106, 107, 108
fracciones, 149
monomios, A-10
números mixtos, 178
polinomios por monomios, A-10
por cero, 107
por una potencia de 10, 32
Múltiplos, 173

N

Negativos, 83
Notación estándar, 4
Notación expandida, 5, 217
Numerador, 58
Número impar, 50
Número par, 50
Número(s)
compuesto(s), 51
irracional(es), 253
mixto(s), 176
negativo(s), 78, 79
redondeo de números enteros, 7
resta, 22
Números compuestos, 51
Números irracionales, 253
Números mixtos, 176
división, 178
multiplicación, 178
resta, 187
suma, 184
Números negativos, 78, 79
Números perfectos, 56
Números positivos, 78, 79
Números primos, 50
Números racionales 141, 253
Números reales, 253

O

Operaciones, orden de las, 58, 119
Opuestos, 83
Orden de las operaciones, 58, 119
Origen, 6, 89

P

Pago de interés compuesto
anualmente, 312
diariamente, 312
semestralmente, 312
trimestralmente, 312
Para pensar a detalle
Cuartos de dormitorios, 531
Deuda de tarjeta de crédito, 81
El valor de una educación, 405
Estudiantes de la comunidad universitaria, 294
Estudiantes de reingreso, 9
Estudio de matemáticas, 302
Estudio en otros países, 371
Flujo de efectivo, 92
Matrimonio, 468
PPC, 246
Preparación para las clases, 62
Presupuestos, 169
Razón estudiantes-instructores, 332
Sueño, 177
Tiempo de estudio, 443
Tiempo extra, 235
Paralelogramo, 512
área de un, 529
Paréntesis, 15
Partes correspondientes, 518
Perímetro, 526
de un cuadrado, 462, 526
de un rectángulo, 462, 527

Periodos, 4
Peso, 362
Pi, 539
Pictografía, 392
Pirámides, 553
  volumen de las, 548
Pitágoras, 517
Plano, 494
Plomada, 508
Polígono de frecuencias, 396
Polígono regular, 510
Polígono(s), 510
  ángulos de un, 514
  vértices de un, 510
Polinomio(s), A-1, A-5
  evaluación, A-3
  grado de un, A-2
  resta, A-6
Porcentaje, 580
  cambio a un decimal, 282
  cambio a una fracción, 281
  resolución de problemas, 289
Potencia de 2, 52
Potencia de *x*, 472
Potencia(s)
  de enteros, 109
  de enteros negativos, 110
Potencias de 10, 31
Potencias de una fracción, 150
Potencias impares de enteros negativos, 110
Potencias pares de enteros negativos, 110
Precio al por menor, 443
Precio de venta, 303, 443
Precio total, 299
Principal, 310
Prisma, volumen de un, 548
Producto, 29
Productos cruzados, 340
Promedio aritmético, 401
Promedio, 61
  aritmético, 401
  media, 401
Propiedad asociativa
  de la multiplicación, 31
  de la suma, 15
Propiedad conmutativa
  de la multiplicación, 29
  de la suma, 14
Propiedad de la división de la igualdad, 431
Propiedad de la multiplicación de la igualdad, 432
Propiedad de la resta de la igualdad, 424
Propiedad de la suma
  del cero, 15, 94
  de la igualdad, 424
Propiedad distributiva, 452, 453
  extendida, 455
Propiedad fundamental de las fracciones, 201
Propiedad(es)
  de la adición de la igualdad, 424
  de la división, 41
  de la división de la igualdad, 431
  de la multiplicación por cero y por uno, 30
  de las rectas paralelas, 505
  de los rectángulos, 512
  de los ángulos opuestos, 498
  fundamental de las proporciones, 339
  regla de las potencias para los exponentes, 475
  regla de las potencias para los productos, 473
  suma de cero, 15, 94
Proporción(es), 339
  extremos de, 339
  medios de las, 339
  propiedad fundamental de las, 339
Pruebas de divisibilidad, 43
Punto, 494
Punto decimal, 217
Punto medio, 495
Punto(s) extremo(s), 494, 495

R

Radicando, 261
Radio de un círculo, 539
Raíz cuadrada, 260
Rayo, 495
Razón(es), 332
  igual(es), 331
Razonamiento deductivo, A-17
Razonamiento inductivo, A-15
Recíprocos, 157
Recta numérica, 6
Recta(s), 494
  perpendicular(es), 503
Rectángulo(s), 18, 512
  ancho, 18
  área de un, 529
  longitud de un, 18
  perímetro de un, 18, 527
  propiedades de un, 512
Rectas coplanares, 503
Rectas paralelas, 503
  propiedades de las, 505
Rectas perpendiculares, 503
Redondeo
  de decimales, 220
  de un número entero, 8
Redondeo de números enteros, 7
Redondeo front-end, 47
Reducción de fracciones, 142
Reducción de términos semejantes, 460, 461
Regla de la potencia para productos, 476
Regla del producto para exponentes, 473
Residuo, 41
Resolución
  de ecuaciones, 423, 467
  de problemas con porcentajes, 289
Resta
  de decimales, 227, 228
  de enteros, 99
  de fracciones con denominadores distintos, 165
  de fracciones con denominadores iguales, 163
  de números enteros, 22
  de números mixtos, 187
  de polinomios, A-6
Rombo, 512

S

Segmento de recta, 494
Semicírculo, 539
Signo negativo, 78
Signo positivo, 78
Signo radical, 261
Símbolo de desigualdad, 6
Símbolo de valor absoluto, 82
Símbolo(s)
  de agrupamiento, 59
  usados para la división, 39
  usados para la multiplicación, 28
Simplificación
  de expresiones algebraicas, 451
  de fracciones complejas, 195
  fracciones, 142
Sistema de numeración decimal, 216
Sólido rectangular, 546
  área superficial de un, 549
  volumen de un, 547
Soluciones de una ecuación, 422
Subconjunto, 4, 79
Suma, 14
  decimales, 226, 228
  enteros, 89, 91
  fracciones con denominadores distintos, 165
  fracciones con el mismo denominador, 163
  números mixtos, 184
  polinomios, A-5
Sumandos, 14
Sustraendo, 22

T

Tabla, 390
Tasa de interés, 310
Tasa(s), 332
  de descuento, 303
  unitaria(s), 333
Tasas unitarias, 333
Temperatura, fórmula para la conversión de, 372
Tendencia central, 401
Teorema de Pitágoras, 520
Teorema fundamental de la aritmética, 52
Teorema(s), A-17
  de Pitágoras, 520
Término, 457, A-1
Término algebraico, A-1
Términos, 14, 459
Términos definidos, A-17
Términos indefinidos, A-17
Términos semejantes, 459
  reducción de, 460, 461
Tiempo, 310
Transportador, 496
Transversal, 504
Trapecio, 512
  área de un, 530
Triángulo equiangular, 511
Triángulo isósceles, 511
  ángulo del vértice, 511
  ángulos de la base, 511
Triángulo rectángulo, 511
Triángulo(s), 511
  ángulo de un, 511
  área de un, 530
  rectángulo, 511
Triángulo(s) congruente(s), 517
  propiedad ALA, 519
  propiedad LAL, 518
  propiedad LLL, 518
Triángulos semejantes, 519
  propiedad de los, 520
Trinomio, A-1

U

Unidades
  de tiempo, 354
  métricas de capacidad, 364
  métricas de longitud, 358, 359

métricas de masa, 362
norteamericanas de capacidad, 353
norteamericanas de longitud, 350
norteamericanas de peso, 352
Unidades americanas
de capacidad, 353
de longitud, 350
de peso, 352

V
Valor absoluto, 82
Valor modal, 404
Variable, 422
Vértice, 495
Vértices de un polígono, 510
Volumen, 547
de un cilindro, 547
de un cono, 547
de un cubo, 547
de un prisma, 548
de un sólido rectangular, 547
de una esfera, 548
de una pirámide, 548

El propósito de este libro es enseñar a los alumnos cómo leer, escribir y pensar matemáticamente aplicando el lenguaje de las matemáticas. Esta obra fue escrita para los alumnos que estudian matemáticas por primera vez, y para los que necesitan un repaso básico. *Matemáticas básicas*, tercera edición, emplea una amplia variedad de métodos de instrucción que reflejan las recomendaciones del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y de la Asociación Matemática Americana de Universidades (AMATYC), ambas de Estados Unidos. Los lectores encontrarán una infinidad de oportunidades para poner en práctica sus habilidades y podrán beneficiarse del enfoque pedagógico que se utiliza, ambas son características que integran el enfoque tradicional de la enseñanza de las matemáticas. Los autores hacen énfasis en el raciocinio, la elaboración de modelos y las habilidades de comunicación, ya que todos estos elementos forman parte de la reforma actual en la enseñanza de la materia. Esta nueva edición conserva la filosofía básica de la anterior; sin embargo, se han aplicado varias mejoras como resultado directo de los comentarios y sugerencias que recibimos de profesores y de alumnos. La meta de los autores fue elaborar un libro que resultara más agradable en su lectura, fácil de entender y relevante para la vida de los alumnos.

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481464-4
ISBN-10: 607481464-3

9 786074 814644